

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Ж. ДУМАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *duman@ysu.am*

Аннотация. Получены условия на коэффициенты младших членов, при которых решение задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} - \sum_{i=1}^n (c_i(x)u)_{x_i} + d(x)u = f(x) - \operatorname{div} F(x), \quad x \in Q,$$

$$u|_{\partial Q} = u_0 \in L_2(\partial Q),$$

обладает свойством $(n-1)$ -мерной непрерывности (принадлежит пространству А.К.Гуцина $C_{n-1}(\bar{Q})$); при этом граничное значение u_0 является пределом в L_2 следов решения на поверхностях из довольно широкого класса (не обязательно “параллельных” границе). Для решения задачи установлена ограниченность интеграла Дирихле с весом $r(x)$, т.е. интегрируемость в Q функции $r(x)|\nabla u(x)|^2$, где $r(x)$ – расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

MSC2000 number: 35B60, 35D99, 35J25

Ключевые слова: Эллиптические уравнения, задача Дирихле, поведение вблизи границы, граничное значение, интеграл Дирихле.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению поведения вблизи границы решения задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial Q \in C^1$ для эллиптического уравнения второго порядка

$$(1) \quad -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} - \sum_{i=1}^n (c_i(x)u)_{x_i} + d(x)u = f(x) - \operatorname{div} F(x), \quad x \in Q;$$

$$(2) \quad u|_{\partial Q} = u_0,$$

где $u_0 \in L_2(\partial Q)$, функции f и $F = (f_1, \dots, f_n)$ принадлежат $L_{2,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x) = (a_{ij}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$(3) \quad \gamma_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j = (\xi, A(x) \xi) \leq \gamma_2 |\xi|^2$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $x \in Q$ с положительными постоянными γ_1 и γ_2 , а коэффициенты $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$, $c(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

Целью работы является получение условий на коэффициенты младших членов уравнения, при которых решение рассматриваемой задачи обладает свойством $(n-1)$ -мерной непрерывности. Понятие s -мерной непрерывности, являющееся естественным обобщением непрерывности функции по совокупности переменных, было предложено А. К. Гуциным в работе [1] и заключается в следующем. Пусть μ и ν — меры (будем считать их единичными) в $\mathbb{R}^n$ с носителями в $\bar{Q}$ и удовлетворяют условию: существует такая постоянная C , что для всех $r > 0$ и $x^0 \in \bar{Q}$ мера шара $U_{x^0}^{(r)}$ радиуса r с центром в точке x^0 не превосходит числа Cr^s , $0 < s < n$; наименьшую из таких постоянных C будем называть нормой меры и обозначать через $\|\mu\|$ (или, соответственно, $\|\nu\|$). Пусть ϕ — такая мера в $\mathbb{R}^{2n}$ с носителем в $\bar{Q} \times \bar{Q}$, что $\mu(G) = \phi(G \times \mathbb{R}^n)$, $\nu(G) = \phi(\mathbb{R}^n \times G)$ для всех (борелевских) множеств $G \subset \bar{Q}$. Функцию v будем называть s -мерно непрерывной, если для любого положительного числа ε найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\frac{1}{\|\mu\| + \|\nu\|} \int_{\bar{Q} \times \bar{Q}} (v(x) - v(y))^2 d\phi(x, y) < \varepsilon,$$

как только

$$\int_{\bar{Q} \times \bar{Q}} |x - y| d\phi(x, y) < \delta.$$

Отметим, что если в этом определении взять произвольные меры ($s = 0$), то получится классическое определение равномерной непрерывности функции на

$\bar{Q}$. Множество всех s -мерно непрерывных (в $\bar{Q}$) функций образует банахово пространство $C_s(\bar{Q})$, являющееся пополнением $C(\bar{Q})$ по норме, эквивалентной функционалу

$$\ell(v) = \int_0^\infty M_s(\{x \in \bar{Q} : |v(x)|^2 > \lambda\}) d\lambda, \quad v \in C(\bar{Q}),$$

в котором

$$M_s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty r_i^s, \bigcup_{i=1}^\infty U^{(r_i)} \supset E \right\},$$

а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества E шарами $U^{(r_i)}$ радиуса r_i ; $C_0(\bar{Q}) = C(\bar{Q})$, а $C_n(\bar{Q}) = L_2(Q)$, см. [1]. Свойство $(n-1)$ -мерной непрерывности решения задачи Дирихле с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$ для уравнения без младших членов (т.е. $b_i = 0, c_i = 0, d = 0$) с $f \in W_2^{-1}$ и $F = 0$ было установлено в [1]. При этом предполагалось, что единичный вектор внутренней нормали $\bar{\nu}$ к границе удовлетворяет условию Дини:

$$(4) \quad \left| \bar{\nu}(x) - \bar{\nu}(y) \right| \leq \omega(|x - y|)$$

для всех x и y из ∂Q , где ω – такая монотонная функция, что

$$\int_0^\infty \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

а коэффициенты a_{ij} непрерывны по Дини на границе:

$$(5) \quad |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x - y|)$$

для всех $x \in \partial Q, y \in Q$ и $i, j = 1, \dots, n$. Не ограничивая общности можно считать, что функция ω в условиях (4) и (5) одна и та же. Обобщение приведенного выше результата на более широкий класс правых частей было получено в работе [2], где было показано, что результат остается справедливым, если

$$(6) \quad r^{\frac{1}{2}}(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}} |F(x)| \in L_2(Q),$$

$$(7) \quad r^{\frac{3}{2}}(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}} |f(x)| \in L_2(Q),$$

где $r(x)$ – расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

Установлению $(n-1)$ -мерной непрерывности решения задачи Дирихле для уравнения с младшими членами $c(x) = 0$ посвящены работы [3], [4] в которых относительно коэффициентов $b(x)$ и $d(x)$ предполагается выполнение следующих условий:

существует постоянная $K > 0$, такая что

$$(8) \quad |b(x)| \leq \frac{K}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}}, \quad x \in Q,$$

$$(9) \quad \int_0^t (1 + |\ln t|)^{\frac{3}{2}} D^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } D(t) \equiv \sup_{r(x) \geq t} |d(x)|.$$

Далее мы также будем предполагать условия (4) – (9) выполненными.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию u из $W_{2,loc}^1(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле обобщенных функций, т.е. для всех $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$(10) \quad \int_Q (A(x) \nabla u + c(x)u, \nabla \eta) dx + \int_Q ((b(x), \nabla u) + d(x)u) \eta dx = \int_Q (f \eta + (F, \nabla \eta)) dx,$$

и удовлетворяющую условию (2) в следующем смысле:

для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$(11) \quad \int_{V_{x^0}} \left(u(x + \delta \bar{\nu}(x^0)) - u_0(x) \right)^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0.$$

Понятие решения из $W_{2,loc}^1(Q)$ было введено в случае области с дважды гладкой границей В. П. Михайловым в работах [5], [6], (см. также [7], [8] и [9]). При этом принятие решением своего граничного значения понималось в следующем смысле

$$\int_{\partial Q} (u(\varphi_\delta(x)) - u_0(x))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0$$

где $\varphi_\delta(x) = x + \delta \bar{\nu}(x)$. В [5], [6] было установлено, что в случае уравнения с гладкими коэффициентами

$$(a_{ij}(x), b_i(x) \in C^1(\bar{Q}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad d(x) \in C^1(\bar{Q}), \quad \text{а } c(x) = 0),$$

задача (1), (2) в приведенной выше постановке Фредгольмова и имеет тот же спектр, что и задача в $W_2^1(Q)$. Если ноль не является точкой спектра, то задача

разрешима при любой граничной функции $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и любой правой части f (с $F \equiv 0$), удовлетворяющей условию

$$\int_Q r^\theta(x) f^2(x) dx < \infty, \quad \text{с некоторым показателем } \theta < 3.$$

Обобщение этого результата на области с Ляпуновской границей было получено в работах [10] и [11]; при этом выполнение граничного условия (2) формулировалось в локальных терминах – требовалось выполнение (11). Тем самым было показано, что в отображении $x \rightarrow \varphi_\delta(x)$, $x \in \partial Q$, ставящем в соответствие точкам границы точки “параллельной” ей поверхности, можно немного отойти от выделенного (“ортогонального” к границе) направления и брать нормаль в фиксированной точке рассматриваемой окрестности. Свойство $(n-1)$ -мерной непрерывности показывает, что от выделенного направления нормали можно отказаться полностью: со значениями граничной функции u_0 можно сравнить не только значения решения u на “параллельных” к границе или близких к ним поверхностях, но и на образах ∂Q при отображениях из довольно широкого класса. В частности, поверхность ∂Q можно разбить на достаточно мелкие части, и каждую из них подвинуть и повернуть (не выходя из $\bar{Q}$) так, чтобы точки переместились “не очень далеко”; при этом разные точки границы могут перейти в одну точку, но нельзя допустить, чтобы таких точек было “слишком много”. Кроме того, обсуждаемое свойство позволяет дать определение решения задачи Дирихле с квадратично суммируемой граничной функцией, не использующее условия гладкости границы (см. [1]).

В настоящей работе устанавливается принадлежность пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$ решения из $W_{2,loc}^1$ задачи Дирихле для общего уравнения второго порядка (см. [12], [13]). Относительно коэффициента $c(x)$ предполагается выполнение следующего условия:

$$(12) \quad \int_0^\infty t(1 + |\ln t|)^{\frac{3}{2}} C^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } C(t) \equiv \sup_{r(x) \geq t} |c(x)|.$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполнены условия (3)-(9) и (12). Тогда решение из $W_{2,loc}^1$ задачи Дирихле (1), (2) принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$.

Отметим, что доказательство этого утверждения не следует из результатов работ [1] и [2]: если перенести младшие члены уравнения в правую часть и рассмотреть исследуемое решение как решение уравнения без младших членов, то из (6), (7), (8), (9) и (11), вообще говоря (без привлечения дополнительных свойств решений эллиптических уравнений), не следует выполнение условий (6) и (7) для новой правой части. Кроме того, так как постановка исследуемой задачи не требует условий гладкости коэффициентов уравнения внутри области, то рассматриваемое в настоящей работе уравнение общего вида (1) не сводится к ранее изученному в работах [3], [4] случаю (при $c(x) = 0$).

2. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

Доказательство теоремы существенно использует следующее утверждение об ограниченности весового интеграла Дирихле решения задачи (1), (2) (см. [14]).

Лемма. Пусть $u(x)$ решение из $W_{2,loc}^1$ задачи Дирихле (1), (2). Тогда функция $r(x) |\nabla u(x)|^2$ интегрируема по Q , т.е.

$$\int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx < \infty.$$

Доказательство. Как и в работе [4], будем следовать схеме доказательства леммы 1 работы [1]. Пусть $x^0 \in \partial Q$ произвольная точка границы ∂Q области Q . Фиксируем локальную систему координат (x', x_n) с началом в точке x^0 , а ось x_n направим по внутренней нормали $\nu(x^0)$ к ∂Q в точке x^0 . Поскольку ∂Q принадлежит классу C^1 , то существует число $r_{x^0} > 0$ и функция $\varphi_{x^0} \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, удовлетворяющая условию:

$$\varphi_{x^0}(0) = 0, \nabla \varphi_{x^0}(0) = 0 \text{ и } |\nabla \varphi_{x^0}(x')| \leq \frac{1}{2} \text{ для всех } x' \in \mathbb{R}^{n-1},$$

такие, что пересечение области Q с шаром

$$U_{x^0}^{(r_{x^0})} = \{x : |x - x^0| < r_{x^0}\}$$

радиуса r_{x^0} с центром в точке x^0 имеет вид

$$Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \{(x', x_n) : x_n > \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Тогда

$$\partial Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \{(x', x_n) : x_n = \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Будем считать, что r_{x^0} такое, что $\partial Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})}$ принадлежит окрестности V_{x^0} из условия (11) (этого можно добиться уменьшая r_{x^0}). Тогда будем иметь

$$\int_{\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x'| < \frac{2}{\sqrt{5}} r_{x^0}\}} (u(x', \varphi_{x^0}(x') + \delta) - u_0(x', \varphi_{x^0}(x')))^2 dx' \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow +0.$$

Положим $\ell_{x^0} = \frac{r_{x^0}}{\sqrt{2}}$ и из покрытия $\{U_{x^0}^{(\ell_{x^0})}, x^0 \in \partial Q\}$ границы ∂Q выберем конечное подпокрытие: $U_{x^m}^{(\ell_{x^m})}, m = 1, \dots, p$. Обозначим

$$U_m = U_{x^m}^{(r_{x^m})}, \quad r_m = r_{x^m}, \quad \ell_m = \ell_{x^m}, \quad \varphi_m = \varphi_{x^m},$$

где $m = 1, \dots, p$. Пусть

$$h = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \min(1, r_1, \dots, r_p).$$

Тогда каждый из криволинейных “цилиндров”

$$\Pi_m^{\ell_m+h, h} = \{(x', x_n) : |x'| < \ell_m + h, \varphi_m(x') < x_n < \varphi_m(x') + h\}$$

лежит в соответствующем шаре U_m , также как и в $U_m \cap Q$ (напомним, что здесь (x', x_n) — координаты точки в локальной системе координат с началом в точке x^m). Пусть $\ell_0 \in (0, h/4)$ такое число, что дополнение в Q области

$$Q_{3\ell_0} = \{x \in Q : r(x) = \text{dist}(x, \partial Q) > 3\ell_0\}$$

содержится в объединении “цилиндров”

$$\Pi_m^{\ell_m, h} = \{(x', x_n) : |x'| < \ell_m, \varphi_m(x') < x_n < \varphi_m(x') + h\}, \quad m = 1, \dots, p,$$

и поэтому

$$Q^{3\ell_0} = \{x \in Q : r(x) = \text{dist}(x, \partial Q) \leq 3\ell_0\} \subset \bigcup_{m=1}^p \Pi_m^{\ell_m, h}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Pi_m^h &= \Pi_m^{\ell_m+\ell_0, h} \subset \Pi_m^{\ell_m+h, h} \subset U_m \cap Q, \quad Q_m = (Q \setminus Q^{2\ell_0}) \cup \Pi_m^h, \\ Q'_m &= (Q \setminus Q^{3\ell_0}) \cup \Pi_m^{\ell_m, h}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что для всех $x = (x', x_n) \in \Pi_m^h, m = 1, \dots, p$

$$(13) \quad r(x) \leq x_n - \varphi_m(x') \leq \frac{\sqrt{5}}{2} r(x) < \frac{4}{3} r(x).$$

Зафиксируем некоторый номер $m, 1 \leq m \leq p$, и возьмем локальную систему координат с началом в точке x^m . В дальнейшем зависимость функции φ_m от

номера m отмечать не будем: $\varphi = \varphi_m$.

Определим отображения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{-1}(y)$ пространства $\mathbb{R}^n$ на себя соотношениями:

$$\mathcal{L}(x) = (x', x_n - \varphi(x')), \quad x = (x', x_n) \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_{-1}(y) = (y', y_n + \varphi(y')), \quad y = (y', y_n).$$

Образ множества при отображении $\mathcal{L}$ будем обозначать той же буквой с волной сверху, в частности

$$\mathcal{L}(Q) = \tilde{Q}, \quad \mathcal{L}(Q_m) = \tilde{Q}_m, \quad \mathcal{L}(\Pi_m^h) = \tilde{\Pi}_m^h, \quad \mathcal{L}(\Pi_m^{\ell_m, h}) = \tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}.$$

Пусть $u(x)$ решение из $W_{2,loc}^1$ задачи (1), (2). Возьмем произвольную функцию $\tilde{\eta}$ из $W_2^1(\tilde{Q})$ с носителем в $\tilde{Q}$. Тогда функция

$$\eta(x) = \tilde{\eta}(x', x_n - \varphi(x')), \quad x = (x', x_n) \in Q,$$

принадлежит $W_2^1(Q)$ и ее носитель содержится в Q .

Обозначая $\tilde{u}(y) = u(y', y_n + \varphi(y'))$, $\tilde{f}(y) = f(y', y_n + \varphi(y'))$ и $\tilde{d}(y) = d(y', y_n + \varphi(y'))$, из интегрального тождества (10) получаем

$$(14) \quad \int_{\tilde{Q}} \left(\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}(y) \tilde{u}_{y_i}(y) \tilde{\eta}_{y_j}(y) dy + \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i(y) \tilde{u}(y) \tilde{\eta}_{y_i}(y) \right) dy + \\ \int_{\tilde{Q}} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(y) \tilde{u}_{y_i}(y) + \tilde{d}(y) \tilde{u}(y) \right) \tilde{\eta}(y) dy = \int_{\tilde{Q}} \tilde{f}(y) \tilde{\eta}(y) dy + \int_{\tilde{Q}} \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(y) \tilde{\eta}_{y_i}(y) dy,$$

где матрица $\tilde{A}(y) = (\tilde{a}_{ij}(y))$ и векторы

$$\tilde{b}(y) = (\tilde{b}_1(y), \dots, \tilde{b}_n(y)), \quad \tilde{c}(y) = (\tilde{c}_1(y), \dots, \tilde{c}_n(y)), \quad \tilde{F}(y) = (\tilde{f}_1(y), \dots, \tilde{f}_n(y))$$

имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij}(y) &= a_{ij}(y', y_n + \varphi(y')) \quad \text{при } i < n, \quad j < n, \\ \tilde{a}_{ni}(y) &= \tilde{a}_{in}(y) = a_{ni}(y', y_n + \varphi(y')) - \sum_{k=1}^{n-1} a_{ki}(y', y_n + \varphi(y')) \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k} \quad \text{при } i < n, \\ \tilde{a}_{nn}(y) &= \sum_{k,m=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k} a_{km}(y', y_n + \varphi(y')) \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_m} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}(y', y_n + \varphi(y')) \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k} + \\ &\quad + a_{nn}(y', y_n + \varphi(y')), \\ \tilde{b}_i(y) &= b_i(y', y_n + \varphi(y')) \quad \text{при } i < n, \\ \tilde{b}_n(y) &= b_n(y', y_n + \varphi(y')) - \sum_{k=1}^{n-1} b_k(y', y_n + \varphi(y')) \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k}, \\ \tilde{c}_i(y) &= c_i(y', y_n + \varphi(y')) \quad \text{при } i < n, \\ \tilde{c}_n(y) &= c_n(y', y_n + \varphi(y')) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k(y', y_n + \varphi(y')) \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k}, \\ \tilde{f}_i(y) &= f_i(y', y_n + \varphi(y')) \quad \text{при } i < n, \\ \tilde{f}_n(y) &= f_n(y', y_n + \varphi(y')) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(y', y_n + \varphi(y')) \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k}. \end{aligned}$$

Это значит, что функция $\tilde{u}(y)$ (из $W_{2,loc}^1(\tilde{Q})$) является решением уравнения

$$(15) \quad -\operatorname{div}(\tilde{A}(y), \nabla \tilde{u}(y)) + (\tilde{b}(y), \nabla \tilde{u}(y)) - \operatorname{div}(\tilde{c}(y)\tilde{u}(y)) + \tilde{d}(y)\tilde{u}(y) = \tilde{f}(y) - \operatorname{div} \tilde{F}(y).$$

Матрица $\tilde{A}(y)$ равномерно по $y \in \tilde{Q}$ положительно определена, а коэффициент $\tilde{a}_{nn}(y)$ удовлетворяет неравенствам

$$\gamma_1 \leq \gamma_1 (1 + |\nabla \varphi(y')|^2) \leq \tilde{a}_{nn}(y) \leq \gamma_2 (1 + |\nabla \varphi(y')|^2) \leq \frac{5}{4} \gamma_2.$$

Обозначим через $A_0(y) = (a_{ij}^0(y))$ матрицу, элементы которой определены в $\tilde{\Pi}_m^h$ и имеют следующий вид:

$$a_{ij}^0(y) = \tilde{a}_{ij}(y) \quad \text{для } i < n, j < n,$$

$$a_{ni}^0(y) = a_{in}^0(y) = a_{in}^0(y', y_n) = \frac{1}{\operatorname{mes}_{n-1}\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi| < y_n\}} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi - y'| < y_n\}} \tilde{a}_{in}(\xi, 0) d\xi \quad \text{для } i < n,$$

$$a_{nn}^0(y) = \tilde{a}_{nn}(y', 0).$$

В [1] установлено, что в $\tilde{\Pi}_m^h$

$$(16) \quad \left(\sum_{i=1}^n |a_{in}^0(y) - \tilde{a}_{in}(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \tilde{w}(y_n),$$

и

$$(17) \quad \left| \frac{\partial a_{in}^0(y)}{\partial y_i} \right| \leq \frac{\tilde{w}(y_n)}{y_n}, i = 1, \dots, n-1,$$

где $\tilde{w}(t) = Cw(2\sqrt{2}t)$ ($w(t)$ из условий (4) и (5)); постоянная C зависит только от n и γ_2 .

Зафиксируем произвольное положительное число $\delta_0 < \frac{\ell_0}{2}$. Далее зависимость от выбранных и зафиксированных чисел $p, r_m, \ell_m, m = 1, \dots, p, \ell_0, n, \gamma_1, \gamma_2, \delta_0$ отмечать не будем.

В области $\tilde{Q}_m$ для произвольного $\delta \in (0, \delta_0)$ определим функцию $\varrho_\delta(y)$ следующим образом:

$$\varrho_\delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{для } |y'| < \ell_m + \ell_0, \quad 0 < y_n < \delta, \\ y_n - \delta & \text{для } |y'| < \ell_m + \ell_0, \quad \delta \leq y_n \leq 4\delta_0, \\ 4\delta_0 - \delta & \text{для остальных точек } y \text{ из } \tilde{Q}_m. \end{cases}$$

Функция ϱ_δ удовлетворяет неравенствам

$$(18) \quad r_\delta(x) \leq \varrho_\delta(\mathcal{L}(x)) \leq \frac{4}{3} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) \quad \text{для всех } x \in Q_m,$$

где $r_\delta(x) = \min\{3\delta_0, \max\{0, r(x) - \delta\}\}$. Кроме того $\left\| |\nabla \varrho_\delta| \right\|_{L^\infty(\tilde{Q}_m)} \leq 1$. Зафиксируем функцию $\psi \in C^1(\overline{Q})$ такую, что $\psi(x) = 1$ при $x \in Q'_m$, $\psi(x) = 0$ при $x \in Q^{\frac{5\ell_0}{2}} \setminus \Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h}$, и $0 \leq \psi(x) \leq 1$ для всех $x \in Q$. Кроме того, будем предполагать, что при $|y'| < \ell_m + \ell_0$ и $0 < y_n < 2\ell_0$ функция $\tilde{\psi}(y) = \psi(\mathcal{L}_{-1}(y))$ не зависит от переменной y_n .

Подставляя в интегральное тождество (15) функцию $\tilde{\eta}(y) = \varrho_\delta(y) \tilde{\psi}(y) \tilde{u}(y)$, получим

$$(19) \quad \begin{aligned} & \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta \tilde{\psi} (\nabla \tilde{u}, \tilde{A} \nabla \tilde{u}) dy + \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta \tilde{u} (\nabla \tilde{\psi}, \tilde{A} \nabla \tilde{u}) dy + \int_{\tilde{Q}_m} \tilde{\psi} \tilde{u} (\nabla \varrho_\delta, \tilde{A} \nabla \tilde{u}) dy + \\ & + \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta \tilde{\psi} \tilde{u} (\tilde{b}, \nabla \tilde{u}) dy + \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta \tilde{\psi} (\nabla \tilde{u}, \tilde{c} \tilde{u}) dy + \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta \tilde{u} (\nabla \tilde{\psi}, \tilde{c} \tilde{u}) dy + \\ & + \int_{\tilde{Q}_m} \tilde{\psi} \tilde{u} (\nabla \varrho_\delta, \tilde{c} \tilde{u}) dy + \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta \tilde{\psi} \tilde{d} \tilde{u}^2 dy = \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta \tilde{\psi} \tilde{u} \tilde{f} dy + \\ & + \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta \tilde{\psi} (\tilde{F}, \nabla \tilde{u}) dy + \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta \tilde{u} (\tilde{F}, \nabla \tilde{\psi}) dy + \int_{\tilde{Q}_m} \tilde{\psi} \tilde{u} (\tilde{F}, \nabla \varrho_\delta) dy. \end{aligned}$$

В силу (18)

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1^{(m)}(\delta) &= \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y) \tilde{\psi}(y) (\nabla \tilde{u}(y), \tilde{A}(y) \nabla \tilde{u}(y)) dy \geq \\ &\geq \int_{Q'_m} r_\delta(x) (\nabla u(x), A(x) \nabla u(x)) dx \geq \gamma_1 \int_{Q'_m} r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Остальные члены равенства (19) оценим сверху.

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_2^{(m)}(\delta) = \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y) \tilde{u}(y) (\nabla \tilde{\psi}(y), \tilde{A}(y) \nabla \tilde{u}(y)) dy.$$

Из (18) имеем

$$\begin{aligned} \left| \tilde{I}_2^{(m)}(\delta) \right| &\leq \frac{4}{3} \int_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |u(x)| |(\nabla \psi(x), A(x) \nabla u(x))| dx \leq \\ &\leq \frac{4}{3} \|\psi\|_{C^1(\overline{Q})} \gamma_2 \int_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |u(x)| |\nabla u(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{4}{3} \|\psi\|_{C^1(\overline{Q})} \gamma_2 \left\{ \int_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) u^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{(Q \setminus Q^{\frac{5\ell_0}{2}}) \cup \Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{4}{3} \|\psi\|_{C^1(\overline{Q})} \gamma_2 \left\{ \int_Q r(x) u^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \left\{ \frac{\delta}{2} \int_{\left(\Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h} \cap Q^{\frac{5\delta}{4}}\right) \setminus Q^{\frac{3\delta}{4}}} |\nabla u(x)|^2 dx + 2 \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \epsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\epsilon \delta}{4} \int_{\left(\Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h} \cap Q^{\frac{5\delta}{4}}\right) \setminus Q^{\frac{3\delta}{4}}} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{C'_2}{\epsilon} \int_Q r(x) u^2(x) dx,
\end{aligned}$$

где $0 < \epsilon < 1$, которое мы выберем позже.

Так как для решений эллиптического уравнения (1) справедлива оценка (см. [15])

(20)

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 dx \leq C_0(n, \gamma_1, \gamma_2) \left(\frac{1}{\sigma^2} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} (|b|^2 + |c|^2 + |d|) u^2 dx + \sigma^2 \int_{\Omega} f^2 dx + \int_{\Omega} |F|^2 dx \right)$$

где $\Omega' \Subset \Omega$ а $\sigma = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, то в силу (8) и (12)

$$\begin{aligned}
&\delta \int_{\left(\Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h} \cap Q^{\frac{5\delta}{4}}\right) \setminus Q^{\frac{3\delta}{4}}} |\nabla u(x)|^2 dx \leq C_0 \delta \left(\left(\frac{16}{\delta^2} + \|b\|_{L^\infty(Q_{\frac{\delta}{2}} \setminus \overline{Q}_{\frac{3}{2}\delta})}^2 \right) \times \right. \\
&\quad \int_{\left(\Pi_m^{\ell_m + \ell_0, h} \cap Q^{\frac{3\delta}{2}}\right) \setminus Q^{\frac{\delta}{2}}} u^2(x) dx + \int_{\left(\Pi_m^{\ell_m + \ell_0, h} \cap Q^{\frac{3\delta}{2}}\right) \setminus Q^{\frac{\delta}{2}}} (|c|^2 + |d|) u^2(x) dx + \\
&\quad \left. \frac{\delta^2}{16} \int_{\left(\Pi_m^{\ell_m + \ell_0, h} \cap Q^{\frac{3\delta}{2}}\right) \setminus Q^{\frac{\delta}{2}}} f^2(x) dx + \int_{\left(\Pi_m^{\ell_m + \ell_0, h} \cap Q^{\frac{3\delta}{2}}\right) \setminus Q^{\frac{\delta}{2}}} |F(x)|^2 dx \right) \leq \\
&\leq C''_2 \left(\left(1 + \frac{1}{(1 + |\ln \delta|)^{\frac{3}{2}}} + \delta \int_{\frac{3\delta}{8}}^{\frac{3\delta}{2}} (C^2(t) + D(t)) dt \right) \max_{\substack{\frac{\delta}{2} \leq y_n \leq 2\delta \\ |y'| < \ell_m + \ell_0}} \int \tilde{u}^2(y', y_n) dy' + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{(1 + |\ln \frac{3}{2}\delta|)^{\frac{3}{2}}} \int_{\left(\Pi_m^{\ell_m + \ell_0, h} \cap Q^{\frac{3\delta}{2}}\right) \setminus Q^{\frac{\delta}{2}}} r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} f^2(x) dx + \right.
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\left(1 + \left|\ln \frac{3}{2}\delta\right|\right)^{\frac{3}{2}}} \int_{\left(\Pi^{\ell_m + \ell_0, h} \cap Q^{\frac{3\delta}{2}}\right) \setminus Q^{\frac{\delta}{2}}} r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} |F(x)|^2 dx \Bigg).$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M &= \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{u}^2(y', y_n) dy', \\ \|f\|^2 &= \int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} f^2(x) dx, \\ \|F\|^2 &= \int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} |F(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Так как в силу (9), (12)

$$\begin{aligned} \delta \int_{\frac{3}{8}\delta}^{\frac{3}{2}\delta} (C^2(t) + D(t)) dt &\leq \frac{8}{3} \int_{\frac{3}{8}\delta}^{\frac{3}{2}\delta} t(C^2(t) + D(t)) dt \leq \frac{8}{3} \left(\int_{\frac{3}{8}\delta}^{\frac{3}{2}\delta} t(1 + |\ln t|)^{\frac{3}{2}} C^2(t) dt + \right. \\ &\quad \left. \left(\int_{\frac{3}{8}\delta}^{\frac{3}{2}\delta} \frac{1}{t(1 + |\ln t|)^{\frac{3}{2}}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{3}{8}\delta}^{\frac{3}{2}\delta} t^3 (1 + |\ln t|)^{\frac{3}{2}} D^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq C_2''', \end{aligned}$$

то

$$(21) \quad \delta \int_{\left(\Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h} \cap Q^{\frac{5\delta}{4}}\right) \setminus Q^{\frac{3\delta}{4}}} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \tilde{C}_0 (M + \|f\|^2 + \|F\|^2).$$

Следовательно, получаем оценку

$$|\tilde{I}_2^{(m)}(\delta)| \leq \epsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + I_2^{(m)}(\epsilon),$$

где

$$I_2^{(m)}(\epsilon) = C_2 \left(\frac{1}{\epsilon} \int_Q r(x) u^2(x) dx + \epsilon (M + \|f\|^2 + \|F\|^2) \right).$$

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_3^{(m)}(\delta) = \int_{\tilde{Q}_m} \tilde{\psi}(y) \tilde{u}(y) (\nabla \varrho_\delta(y), \tilde{A}(y) \nabla \tilde{u}(y)) dy.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_3^{(m)}(\delta) &= \int_{\delta}^{4\delta_0} \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{\psi}(y') \tilde{u}(y', y_n) (\nabla \varrho_\delta(y_n), (\tilde{A}(y', y_n) - A_0(y', y_n)) \nabla \tilde{u}(y', y_n)) dy' dy_n - \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{\delta}^{4\delta_0} \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{\psi}(y') \tilde{u}^2(y', y_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a_{in}^0(y', y_n)}{\partial y_i} dy' dy_n - \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{\delta}^{4\delta_0} \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{u}^2(y', y_n) \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(y', y_n) \frac{\partial \tilde{\psi}(y')}{\partial y_i} dy' dy_n + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{a}_{nn}(y', 0) \tilde{\psi}(y') \tilde{u}^2(y', 4\delta_0) dy' - \frac{1}{2} \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{a}_{nn}(y', 0) \tilde{\psi}(y') \tilde{u}^2(y', \delta) dy' = \\ &\quad \tilde{I}_{31}^{(m)}(\delta) + \tilde{I}_{32}^{(m)}(\delta) + \tilde{I}_{33}^{(m)}(\delta) + \tilde{I}_{34}^{(m)}(\delta_0) + \tilde{I}_{35}^{(m)}(\delta). \end{aligned}$$

В силу (16) и (13)

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_{31}^{(m)}(\delta)| &\leq \int_{\delta}^{4\delta_0} \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{\psi}(y') |\tilde{u}(y)| |\nabla \tilde{u}(y)| \tilde{\omega}(y_n) dy' dy_n \leq I_{31}^{(m)'}(\delta) + \\ &\quad \tilde{\omega}(4\delta_0) \int_{\delta_0}^{4\delta_0} \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{\psi}(y') |\tilde{u}(y)| |\nabla \tilde{u}(y)| dy' dy_n, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_{31}^{(m)'}(\delta) &= \left(\int_{\delta}^{\delta_0} \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{\psi}(y') y_n |\nabla \tilde{u}(y)|^2 dy' dy_n \right)^{\frac{1}{2}} \left(M \int_0^{\delta_0} \frac{\tilde{\omega}^2(y_n)}{y_n} dy_n \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \int_{\Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h} \cap Q_{\frac{2\delta}{\sqrt{5}}}} r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(M \int_0^{\delta_0} \frac{\tilde{\omega}^2(y_n)}{y_n} dy_n \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(4\sqrt{5} \int_{\Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(M \int_0^{\delta_0} \frac{\tilde{\omega}^2(y_n)}{y_n} dy_n \right)^{\frac{1}{2}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{8\sqrt{5}}{\epsilon} M \int_0^{\delta_0} \frac{\tilde{\omega}^2(y_n)}{y_n} dy_n.$$

Далее, в силу (21)

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon}{2} \int_{\Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\delta}{2} \int_{\left(\Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h} \cap Q^{\frac{5\delta}{4}}\right) \setminus Q^{\frac{3\delta}{4}}} |\nabla u(x)|^2 dx + 2 \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right) \leq \\ & \leq \epsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\epsilon}{4} \tilde{C}_0 (M + \|f\|^2 + \|F\|^2). \end{aligned}$$

$$\text{Итак } |\tilde{I}_{31}^{(m)}(\delta)| \leq \epsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + I_{31}^{(m)}(\delta_0, \epsilon),$$

$$\text{где } I_{31}^{(m)}(\delta_0, \epsilon) = \frac{\epsilon}{4} \tilde{C}_0 (M + \|f\|^2 + \|F\|^2) + \frac{8\sqrt{5}}{\epsilon} M \int_0^{\delta_0} \frac{\tilde{\omega}^2(y_n)}{y_n} dy_n +$$

$$\tilde{\omega}(4\delta_0) \int_{\delta_0}^{4\delta_0} \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{\psi}(y') |\tilde{u}(y)| |\nabla \tilde{u}(y)| dy' dy_n.$$

В силу (17)

$$\begin{aligned} \left| \tilde{I}_{32}^{(m)}(\delta) \right| & \leq \frac{n-1}{2} \int_0^{4\delta_0} \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{\psi}(y') \tilde{u}^2(y', y_n) \frac{\tilde{\omega}(y_n)}{y_n} dy' dy_n \leq \\ & \leq M \frac{n-1}{2} \int_0^{4\delta_0} \frac{\tilde{\omega}(y_n)}{y_n} dy_n = I_{32}^{(m)}(\delta_0), \\ \left| \tilde{I}_{33}^{(m)}(\delta) \right| & \leq \frac{1}{2} \int_0^{4\delta_0} \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{u}^2(y', y_n) \left| \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(y', y_n) \frac{\partial \tilde{\psi}(y')}{\partial y_i} \right| dy' dy_n = I_{33}^{(m)}(\delta_0), \\ \left| \tilde{I}_{35}^{(m)}(\delta) \right| & \leq \frac{5}{8} \gamma_2 M = I_{35}^{(m)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили

$$|\tilde{I}_3^{(m)}(\delta)| \leq \epsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + I_3^{(m)}(\epsilon),$$

где $I_3^{(m)}(\epsilon) = I_{31}^{(m)}(\delta_0, \epsilon) + I_{32}^{(m)}(\delta_0) + I_{33}^{(m)}(\delta_0) + \tilde{I}_{34}^{(m)}(\delta_0) + I_{35}^{(m)}$.

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_4^{(m)}(\delta) = \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y) \tilde{\psi}(y) \tilde{u}(y) \left(\tilde{b}(y), \nabla \tilde{u}(y) \right) dy.$$

В силу (18)

$$\begin{aligned} \left| \tilde{I}_4^{(m)}(\delta) \right| &\leq \frac{4}{3} \int_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) \psi(x) |u(x)| |b(x)| |\nabla u(x)| dx \leq \\ &\left(2 \int_{Q_m \cap Q_{\frac{3}{4}\delta}} r(x) \psi(x) u^2(x) |b(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q_m \cap Q_{\frac{3}{4}\delta}} \psi(x) r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\frac{\epsilon}{2} \int_{\left(Q \setminus Q^{\frac{5\ell_0}{2}} \right) \cup \Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{Q_m \cap Q_{\frac{3}{4}\delta}} \frac{K^2 u^2(x)}{r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}} dx \leq \\ &\epsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\epsilon}{4} \tilde{C}_0 (M + \|f\|^2 + \|F\|^2) + \\ &\frac{K^2}{\epsilon} \left(\int_{Q \setminus Q^{2\ell_0}} \frac{u^2(x)}{r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}} dx + \int_{\Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h} \cap Q_{\frac{3}{4}\delta}} \frac{u^2(x)}{r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}} dx \right) \leq \\ &\epsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\epsilon}{4} \tilde{C}_0 (M + \|f\|^2 + \|F\|^2) + \frac{K^2}{2\epsilon\ell_0} \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \\ &\frac{\sqrt{5} K^2}{2} \frac{1}{\epsilon} \int_{\frac{3\delta}{4}}^h \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \frac{\tilde{u}^2(y)}{y_n (1 + |\ln y_n|)^{\frac{3}{2}}} dy' dy_n \leq \epsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + I_4^{(m)}(\epsilon), \end{aligned}$$

где $I_4^{(m)}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{4} \tilde{C}_0 (M + \|f\|^2 + \|F\|^2) + \frac{K^2}{2\epsilon\ell_0} \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{\sqrt{5} K^2}{2} \frac{1}{\epsilon} M \int_0^h \frac{dy_n}{y_n (1 + |\ln y_n|)^{\frac{3}{2}}}.$

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_5^{(m)}(\delta) = \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y) \tilde{\psi}(y) (\tilde{c}(y) \tilde{u}(y), \nabla \tilde{u}(y)) dy.$$

В силу (10), (18)

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{I}_5^{(m)}(\delta) \right| &\leq \frac{4}{3} \int_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) \psi(x) |c(x)| |u(x)| |\nabla u(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{Q_m} \psi(x) r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \\
&+ \frac{16}{9\varepsilon} \int_{Q_m} \psi(x) r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |c(x)|^2 u^2(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\left(Q \setminus Q^{\frac{5\ell_0}{2}}\right) \cup \Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \\
&+ \frac{16}{9\varepsilon} \int_{Q_m \cap Q^{\frac{3\delta}{4}}} \psi(x) r(x) C^2(r(x)) u^2(x) dx \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\delta}{2} \int_{\left(\Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h} \cap Q^{\frac{5\delta}{4}}\right) \setminus Q^{\frac{3\delta}{4}}} |\nabla u(x)|^2 dx + 2 \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right) + \\
&+ \frac{16}{9\varepsilon} \left(\int_{Q \setminus Q^{2\ell_0}} \psi(x) r(x) C^2(r(x)) u^2(x) dx + \int_{\Pi_m^{\ell_m + \frac{\ell_0}{2}, h} \cap Q^{\frac{3\delta}{4}}} \psi(x) r(x) C^2(r(x)) u^2(x) dx \right) \leq \\
&\leq \varepsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{4} \tilde{C}_0 (M + \|f\|^2 + \|F\|^2) + \frac{16}{9\varepsilon} C^2(2\ell_0) \int_Q r(x) u^2(x) dx + \\
&+ \frac{16}{9\varepsilon} \int_{\frac{3\delta}{4}}^h \int_{|y'| < \ell_m + \frac{\ell_0}{2}} \tilde{u}^2(y', y_n) y_n C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy' dy_n \leq \\
&\leq \varepsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{4} \tilde{C}_0 (M + \|f\|^2 + \|F\|^2) + \frac{16}{9\varepsilon} C^2(2\ell_0) \int_Q r(x) u^2(x) dx + \\
&+ \frac{16}{9\varepsilon} M \int_0^h y_n C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy_n.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| \tilde{I}_5^{(m)}(\delta) \right| \leq \varepsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + I_5^{(m)}(\varepsilon),$$

где

$$I_5^{(m)}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4} \tilde{C}_0 (M + \|f\|^2 + \|F\|^2) + \frac{16}{9\varepsilon} C^2(2\ell_0) \int_Q r(x) u^2(x) dx + \frac{16}{9\varepsilon} M \int_0^h y_n C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy_n.$$

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_6^{(m)}(\delta) = \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y) \tilde{u}(y) (\tilde{c}(y) \tilde{u}(y), \nabla \tilde{\psi}(y)) dy.$$

Опять в силу (10), (18)

$$\begin{aligned} \left| \tilde{I}_6^{(m)}(\delta) \right| &\leq \frac{4}{3} \int_{\tilde{Q}_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) C(r(x)) u^2(x) |\nabla \psi(x)| dx \leq \\ &\frac{4}{3} \|\psi\|_{C^1(\overline{Q})} \left(\int_{Q \setminus Q^{2\ell_0}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) C(r(x)) u^2(x) dx + \int_{\Pi_m^{\ell_m+\ell_0, h} \cap Q_{\frac{3\delta}{4}}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) C(r(x)) u^2(x) dx \right) \leq \\ &\frac{4}{3} \|\psi\|_{C^1(\overline{Q})} \left(C(2\ell_0) \int_Q r(x) u^2(x) dx + \int_{\frac{3\delta}{4}}^h \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} \tilde{u}^2(y', y_n) y_n C\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy' dy_n \right) \leq \\ &\frac{4}{3} \|\psi\|_{C^1(\overline{Q})} \left(C(2\ell_0) \int_Q r(x) u^2(x) dx + M \int_0^h y_n C\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy_n \right) \leq \\ &\frac{4}{3} \|\psi\|_{C^1(\overline{Q})} \left(C(2\ell_0) \int_Q r(x) u^2(x) dx + M \int_0^h y_n dy_n + M \int_0^h y_n C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy_n \right) = \\ &\tilde{I}_6^{(m)}. \end{aligned}$$

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_7^{(m)}(\delta) = \int_{\tilde{Q}_m} \tilde{\psi}(y) \tilde{u}(y) (\tilde{c}(y) \tilde{u}(y), \nabla \varrho_\delta(y)) dy.$$

В силу (10),

$$\begin{aligned} \left| \tilde{I}_7^{(m)}(\delta) \right| &\leq \int_{\tilde{Q}_m} |\tilde{c}(y)| \tilde{u}^2(y) dy \leq \int_{Q \setminus Q^{2\ell_0}} |c(x)| u^2(x) dx + \int_{\Pi_m^{\ell_m+\ell_0, h}} |c(x)| u^2(x) dx \leq \\ &C(2\ell_0) \int_Q u^2(x) dx + M \int_0^h C\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy_n \leq C(2\ell_0) \int_Q u^2(x) dx + \\ &M \int_0^h \frac{1}{y_n(1 + |\ln y_n|)^{\frac{3}{2}}} dy_n + M \int_0^h y_n(1 + |\ln y_n|)^{\frac{3}{2}} C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy_n = I_7^{(m)}. \end{aligned}$$

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_8^{(m)}(\delta) = \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y) \tilde{\psi}(y) \tilde{d}(y) \tilde{u}^2(y) dy.$$

В силу (9),

$$\begin{aligned}
|\tilde{I}_8^{(m)}(\delta)| &\leq \frac{4}{3} \int_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) \psi(x) |d(x)| u^2(x) dx \leq \frac{4}{3} \int_{Q_m \cap Q_{\frac{3}{4}\delta}} r(x) D(r(x)) \psi(x) u^2(x) dx \leq \\
&\frac{4}{3} \left(D(2\ell_0) \int_{Q \setminus Q^{2\ell_0}} r(x) u^2(x) dx + \int_{\Pi_m^{\ell_m + \ell_0, h} \cap Q_{\frac{3}{4}\delta}} r(x) D(r(x)) u^2(x) dx \right) \leq \\
&\frac{4}{3} \left(D(2\ell_0) \int_Q r(x) u^2(x) dx + \int_{\frac{3\delta}{4}}^h \int_{|y'| < \ell_m + \ell_0} y_n D\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n \right) \leq \\
C_8 \left(\int_Q r(x) u^2(x) dx + M \int_0^h y_n D\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy_n \right) &= I_8^{(m)}.
\end{aligned}$$

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_9^{(m)}(\delta) = \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y) \tilde{\psi}(y) \tilde{u}(y) \tilde{f}(y) dy.$$

$$|\tilde{I}_9^{(m)}(\delta)| \leq \frac{4}{3} \int_{Q_m} r(x) |u(x)| |f(x)| dx \leq C_9 (\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|f\|^2 + M \int_0^h \frac{dy_n}{y_n (1 + |\ln y_n|)^{\frac{3}{2}}}) = I_9^{(m)}.$$

Для интеграла $\tilde{I}_{10}^{(m)}(\delta) = \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y) \tilde{\psi}(y) \left(\tilde{F}(y), \nabla \tilde{u}(y) \right) dy$ аналогично оценкам

$\tilde{I}_2^{(m)}(\delta)$ и $\tilde{I}_4^{(m)}(\delta)$ имеем

$$\begin{aligned}
|\tilde{I}_{10}^{(m)}(\delta)| &\leq \frac{4}{3} \int_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) \psi(x) |F(x)| |\nabla u(x)| dx \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{Q_m} \psi(x) r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \\
\frac{16}{9\epsilon} \|F\|^2 &\leq \epsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\epsilon}{4} \tilde{C}_0 (M + \|f\|^2 + \|F\|^2) + \frac{16}{9\epsilon} \|F\|^2 = \\
&\epsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + I_{10}^{(m)}(\epsilon).
\end{aligned}$$

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_{11}^{(m)}(\delta) = \int_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y) \tilde{u}(y) \left(\tilde{F}(y), \nabla \tilde{\psi}(y) \right) dy.$$

$$|\tilde{I}_{11}^{(m)}(\delta)| \leq \frac{4}{3} \int_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |u(x)| |F(x)| |\nabla \psi(x)| dx \leq$$

$$\frac{4}{3} \|\psi\|_{C^1(\bar{Q})} \left(\int_Q r(x) u^2(x) dx + \|F\|^2 \right) = I_{11}^{(m)}.$$

Наконец, оценим интеграл

$$\tilde{I}_{12}^{(m)}(\delta) = \int_{\tilde{Q}_m} \tilde{\psi}(y) \tilde{u}(y) \left(\tilde{F}(y), \nabla_{\varrho\delta}(y) \right) dy.$$

$$\left| \tilde{I}_{12}^{(m)}(\delta) \right| \leq \int_{Q_m} |u(x)| |F(x)| dx \leq \int_{Q_m} \frac{u^2(x) dx}{r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}} + \|F\|^2 \leq$$

$$\frac{1}{2\ell_0} \int_Q u^2(x) dx + \frac{\sqrt{5}}{2} M \int_0^h \frac{dy_n}{y_n (1 + |\ln y_n|)^{\frac{3}{2}}} + \|F\|^2 = I_{12}^{(m)}.$$

Подставляя полученные оценки в равенство (19) получаем

$$\gamma_1 \int_{Q'_m} r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq \tilde{I}_1^{(m)}(\delta) \leq \sum_{k=2}^{12} |\tilde{I}_k^{(m)}(\delta)| \leq 5\epsilon \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + I^{(m)}(\epsilon),$$

где $I^{(m)}(\epsilon) = \sum_{k=2}^{12} I_k^{(m)}.$

Суммируя полученные неравенства по m , $1 \leq m \leq p$, приходим к неравенствам

$$\gamma_1 \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq \gamma_1 \sum_{m=1}^p \int_{Q'_m} r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq$$

$$5\epsilon p \int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \sum_{m=1}^p I^{(m)}(\epsilon).$$

Беря $\epsilon < \frac{\gamma_1}{10p}$, получаем

$$\int_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq \frac{2}{\gamma_1} \sum_{m=1}^p I^{(m)}(\epsilon).$$

Так как правая часть последнего неравенства не зависит от δ , $0 < \delta < \delta_0$, то очевидно функция $r(x) |\nabla u(x)|^2$ интегрируема на Q . Лемма доказана. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Пусть $u(x)$ решение из $W_{2,loc}^1$ задачи (1), (2). Тогда, очевидно, функция $u(x)$ будет также решением из $W_{2,loc}^1$ следующей задачи Дирихле:

$$(1') \quad -\operatorname{div} (A(x), \nabla v(x)) = f(x) - (b(x), \nabla u(x)) - d(x)u(x) - \operatorname{div} (F(x) - c(x)u(x)),$$

$$(2') \quad v|_{\partial Q} = u_0,$$

Тогда, как следует из результатов работы [2], для установления $(n-1)$ -мерной непрерывности (т.е. принадлежности $C_{n-1}(\bar{Q})$) решения $v(x) = u(x)$ задачи (1'), (2') достаточно показать, что функции

$$h(x) = F(x) - c(x)u(x)$$

и

$$g(x) = f(x) - (b(x), \nabla u(x)) - d(x)u(x)$$

удовлетворяют условиям (6) и (7) соответственно, т.е.

$$(6') \quad r^{\frac{1}{2}}(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}} h(x) \in L_2(Q),$$

$$(7') \quad r^{\frac{3}{2}}(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}} g(x) \in L_2(Q).$$

В силу (12),

$$\begin{aligned} \int_Q r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} |c(x)|^2 u^2(x) dx &\leq C^2(2\ell_0) \int_{Q_{2\ell_0}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} u^2(x) dx + \\ \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} C^2(r(x)) u^2(x) dx &\leq \\ C' \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} y_n \left(1 + \left|\ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right|\right)^{\frac{3}{2}} C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n &< \infty. \end{aligned}$$

Аналогично, в силу (9),

$$\begin{aligned} \int_Q r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} d^2(x) u^2(x) dx &\leq D^2(2\ell_0) \int_{Q_{2\ell_0}} r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} u^2(x) dx + \\ \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} r^3(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} D^2(r(x)) u^2(x) dx &\leq \end{aligned}$$

$$C'' \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_{m,h}}} y_n^3 \left(1 + \left|\ln \frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right|\right)^{\frac{3}{2}} D^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n < \infty.$$

В силу (8) и доказанной леммы,

$$\int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}} |(b(x), \nabla u(x))|^2 dx \leq K^2 \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx < \infty.$$

Далее, учитывая (6) и (7), получаем справедливость условий (6') и (7'). $\square$

Abstract. Conditions on the low-order terms of the general second order elliptic equation are obtained for the solution of the Dirichlet problem

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} - \sum_{i=1}^n (c_i(x)u)_{x_i} + d(x)u = f(x) - \operatorname{div} F(x), \quad x \in Q,$$

$$u|_{\partial Q} = u_0 \in L_2(\partial Q),$$

to be $(n-1)$ -dimensional continuous (belongs to the Gushchin space $C_{n-1}(\bar{Q})$); at the same time the boundary value u_0 is the limit in L_2 of traces of the solution on surfaces from a rather wide class (not only “parallel” to the boundary). For the solution we prove boundedness of the Dirichlet integral with the weight $r(x)$, i.e. that the function $r(x)|\nabla u(x)|^2$ is integrable over Q , where $r(x)$ is the distance from a point $x \in Q$ to the boundary ∂Q .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. К. Гуцин, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, Матем. сб., **137**(179), 1(9), 19 - 64 (1988).
- [2] А. К. Гуцин, В. П. Михайлов, “О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения”, Матем. сб., **182** (6), 787 - 810 (1991).
- [3] В. Ж. Думанян, “О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, ДАН РАН, **386** (6), 735 - 737 (2002).
- [4] V. Zh. Dumanyan, “On the behaviour near the boundary of solutions of the Dirichlet problem for elliptic equations”, Note di matematica, **21** (2), 99 - 118 (2002/2003).
- [5] В. П. Михайлов, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, Дифференц. уравнения, **12** (10), 1877 - 1891 (1976).
- [6] В. П. Михайлов, “О граничных свойствах решений эллиптических уравнений”, Матем. заметки, **27** (1), 137 - 145 (1980).
- [7] А. К. Гуцин, В. П. Михайлов, “Обобщенные функции и их применения в математической физике”. Труды Международной конференции, Москва 24 - 28 ноября (1980), М. Вычислительный центр АН СССР, 189 - 205 (1981).
- [8] В. П. Михайлов, “Дифференциальные уравнения в частных производных”, М., Наука, 424 с. (1983).
- [9] О. И. Богоявленский, В. С. Владимиров, И. В. Волович, А. К. Гуцин, Ю. Н. Дрожжинов, В. В. Жаринов, В. П. Михайлов, “Краевые задачи математической физики”, Труды МИАН, **175**, 63 - 102 (1986).

- [10] И. М. Петрушко, “О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей”, Матем. сб., **119** (161), 48 - 77 (1982).
- [11] И. М. Петрушко, “О граничных значениях решений в L_p , $p > 1$, эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей”, Матем. сб., **120** (162), 569 - 588 (1983).
- [12] В. Ж. Думанян, “О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка”, ДНАН Армении, **108** (2), 110 - 116 (2008).
- [13] В. Ж. Думанян, О граничных значениях решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, Второе российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам, Москва 5-11 октября 2008, Тезисы докладов, М. Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, с. 32.
- [14] В. Ж. Думанян, “Об ограниченности весового интеграла Дирихле решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, ДНАН Армении, **108** (1), 45 - 49 (2008).
- [15] В. Ж. Думанян, “Об оценке $\int |\nabla u|^2 dx$ для решений эллиптических уравнений второго порядка”, Ученые записки ЕГУ, (2), 145 - 147 (2008).

Поступила 8 марта 2009