Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 1, 2010, стр. 25-30.

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ТЕОРЕМЫ ЛЕБЕГА-КОЛМОГОРОВА

А. Л. ГРИГОРЯН

Государственный инженерный университет Армении

Аннотация. Пусть W^r - класс функций периода 2π, имеющих r-ую производную, удовлетворяющую условию $|f^{(r)}(x)| \leq 1$. Абсолютное значение остаточного члена ряда Фурье функции $f(x) \in W^r$ имеет для этого класса функций конечную, не зависящую от x верхнюю грань C_m^r. А. Н. Колмогоровым доказана следующая теорема: Для любого натурального r справедлива асимптотическая формула $C_m^r = m^{-r} \cdot \ \frac{4}{\pi^2} \cdot \ln m + O(1)$. Цель настоящей предработы - доказать, что дискретизация непрерывной задачи не только представляет самостоятельный интерес, но и является одним из подходов ее решения.

MSC2000 number: 26A06, 26E05, 34E05

Ключевые слова: Дискретный ряд Фурье, асимптотическая формула.

Рассмотрим W^r - класс функций периода 2π, непрерывных вместе с их производными порядка r, удовлетворяющих неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq 1$. Абсолютное значение остаточного члена

$$R_m(f,x) = f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ряда Фурье имеет для этого класса функций конечную, не зависящую от x верхнюю грань C_m^r. А. Лебег [1] показал, что C_m^1 имеет порядок $(\ln m)/m$.
Можно рассматривать также класс всех периодических функций $f(x)$, непрерывных вместе с их производной порядка $(r-1)$, удовлетворяющих неравенству $|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$.
Верхняя грань величин $|R_m(f,x)|$ этого класса функций остается той же самой, что и для класса функций W^r. А. Н. Колмогоровым [2] доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Для любого натурального r справедлива асимптотическая формула*

$$C_m^r = m^{-r} \cdot \left(\frac{4}{\pi^2} \cdot \ln m + O(1)\right).$$

Рассмотрим дискретный аналог теоремы Лебега-Колмогорова.
Пусть $q \in N$, $x_j = \frac{2\pi j}{q}$ $(j \in Z)$,

$$\overrightarrow{e}_k = \left\{e_k(x_j) = e^{ikx_j}\right\}_{j=0}^{q-1}, \quad k = -\left[\frac{q-1}{2}\right], \dots, \left[\frac{q}{2}\right],$$

где $[\cdot]$ - целая часть. Тогда произвольную дискретную функцию $f : \{x_j\}_{j=0}^{q-1} \to R$ можно разложить по ортогональной системе $\overrightarrow{e}_k$, $k = -\left[\frac{q-1}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q}{2}\right]$ в следующий дискретный ряд Фурье

$$f(x_j) = \sum_{k=-\left[\frac{q-1}{2}\right]}^{k=+\left[\frac{q}{2}\right]} C_k \cdot e_k(x_j),$$

где

(1)
$$C_k = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} f(x_j) \cdot e^{-ikx_j}.$$

Пусть

$$\overrightarrow{f} = \{f(x_j)\}_{j=0}^{q-1}, \quad S_m(\overrightarrow{f}) = \sum_{k=-(m-1)}^{m-1} C_k \cdot \overrightarrow{e}_k$$

- частичная сумма дискретного ряда Фурье.

Обозначим через W_q^r- класс 2π-периодических дискретных функций $f(x_j)$, заданных на сетке $\{x_j\}$, $j \in \mathbb{Z}$ и таких, что

$$\max_j |\Delta_{2\pi/q}^r f(x_j)| \le (2\pi/q)^r,$$

где $\Delta_{2\pi/q}^r$- разность порядка r с шагом $2\pi/q$.

Обозначим

(2)
$$C_m(W_q^r) = \sup_{f \in W_q^r} \|\overrightarrow{f} - S_m(\overrightarrow{f})\|,$$

где

$$\|\overrightarrow{f} - S_m(\overrightarrow{f})\| = \max_j |f(x_j) - S_m(\overrightarrow{f}, x_j)|, \qquad S_m(\overrightarrow{f}, x_j) = \sum_{k=-(m-1)}^{m-1} C_k \cdot e_k(x_j).$$

Цель настоящей работы - доказать, что дискретизация непрерывной задачи не только представляет самостоятельный интерес, но и является одним из подходов ее решения.

Теорема 2. *Если m фиксировано, то*

$$\lim_{q \to \infty} C_m(W_q^r) = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\ln m}{m^r} + O(m^{-r}).$$

Доказательство. Докажем, что равномерно по m и q имеет место формула

(3)
$$C_m(W_q^r) = \left(\frac{\pi}{q \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{q}\right)} \right)^r \cdot (L_{2m-1}(q, r) + O(1)),$$

где

$$L_m(q, 2n) = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \frac{\left|\sin\left(\frac{mj\pi}{q}\right)\right|}{\sin(j \cdot \frac{\pi}{q})}, \quad n \in N,$$

$$L_m(q,2n-1)=\frac{1}{q}\sum_{j=[\frac{q}{m}]}^{q-[\frac{q}{m}]}\frac{\left|\cos\left(m\cdot(j+\frac{1}{2})\frac{\pi}{q}\right)\right|}{\sin((j+\frac{1}{2})\cdot\frac{\pi}{q})}.$$

Так как $\{f(x_{j+k})\}_{j=0}^{q-1}\in W_q^r$, $k\in Z$, то в определение $C_m(W_q^r)$ можно вместо нормы $\|\vec{f}-S_m(\vec{f})\|$ взять отклонение $|f(0)-S_m(f,0)|$.

Применяя r раз преобразование Абеля, получим для дискретных коэффициентов Фурье 2π-периодической функции следующее выражение

$$C_k=\frac{1}{q\cdot(1-e^{-ix_k})^r}\cdot\sum_{j=0}^{q-1}\Delta_{2\pi/q}^r f(x_j)\cdot e^{-ix_jk},\quad k\neq 0.$$

Следовательно, подставляя значения $f(0)$, $S_m(f,0)$ получим

$$|f(0)-S_m(f,0)|=\left|\sum_{k=m}^{[q/2]}(C_k+C_{-k})\right|+O(q^{-r})=2\left|\sum_{k=m}^{[q/2]}\operatorname{Re}C_k\right|+O(q^{-r}).$$

Замечая, что $1-e^{ix}=2\sin\frac{x}{2}\cdot e^{i(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})}$, имеем

$$C_m(W_q^r)=\sup_{f\in W_q^r}\frac{2}{q}\left|\sum_{j=0}^{q-1}\Delta_{2\pi/q}^r f(x_j)\cdot\operatorname{Re}\sum_{k=m}^{[q/2]}\frac{e^{-itx_j}}{(1-e^{ixk})^r}\right|+O(q^{-r})= \tag{4}$$

$$=\sup_{f\in W_q^r}\left|\frac{2}{q}\sum_{j=0}^{q-1}\Delta_{2\pi/q}^r f(x_j)\cdot\sum_{k=m}^{[q/2]}a_k\cdot\cos\left(k\cdot x_j+r\cdot\left(\frac{k}{q}-\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right|+O(q^{-r}),$$

где $a_k=\left(2\sin\frac{k\pi}{q}\right)^{-r}$. Пусть сначала $r=2n$. Из (4) следует

$$C_m(W_q^r)=\sup_{f\in W_q^r}\frac{2}{q}\left|\sum_{j=0}^{q-1}\Delta_{2\pi/q}^r f(x_j)\cdot\sum_{k=m}^{[q/2]}a_k\cdot\cos k\cdot x_{j+n}\right|+O(q^{-r})\leq \tag{5}$$

$$\leq\frac{2}{q}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^r\cdot\sum_{j=0}^{q-1}\left|\sum_{k=m}^{[q/2]}a_k\cdot\cos k\,x_j\right|+O(q^{-r}).$$

Обозначим $\Delta(k)=a_k-a_{k+1}$, $\Delta^2(k)=\Delta(k)-\Delta(k+1)$,

$$D_j(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{j}\cos nx,\qquad F_k(x)=\sum_{n=0}^{k}D_n(x).$$

Применяя дважды преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=m}^{[q/2]}a_k\cdot\cos kx_j=-a_m\cdot\frac{\sin\left((2n-1)\frac{x_j}{2}\right)}{2\sin\frac{x_j}{2}}+H(x_j), \tag{6}$$

где

$$H(x_j)=a_{[q/2]}\,D_{[q/2]}(x_j)+\sum_{k=m}^{[q/2]-2}\Delta^2(k)\cdot F_k(x_j)-\Delta(m)\cdot F_{m-1}(x_j)+$$

$$+\Delta\left(\left[\frac{q}{2}\right]-1\right) F_{[q/2]-1}(x_j).$$

Так как $F_k(x) \geq 0$ и $\sum\limits_{j=0}^{q-1} F_k(x_j) = \frac{(k+1)\,q}{2}$, то

$$\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1}\sum_{k=m}^{[q/2]-2} \Delta^2(k)\cdot F_k(x_j) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(m\cdot\Delta(m) - \left(\left[\frac{q}{2}\right]-1\right)\cdot\Delta\left(\left[\frac{q}{2}\right]-1\right) + a_m - a_{[q/2]-1}\Big).$$

Кроме того, $\Delta(k) = O\left(\frac{ak}{k}\right)$, $D_{\left[\frac{q}{2}\right]}(x_j) = O(1)$, $j \neq 0$. Следовательно

$$\sum_{j=0}^{q-1} |H(x_j)| = O(a_m). \tag{7}$$

Из (5) - (7) следует оценка сверху.

$$C_m(W_q^{2n}) \leq \left(\frac{\pi}{q\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{q}\right)}\right)^{2n}\cdot\left(L_{2m-1}(q,2n)+O(1)\right).$$

Докажем оценку снизу. Пусть

$$A = \left\{\left(\left[0;\,\frac{q}{4}-1\right]\cup\left[\frac{3q}{4}+2;\,q-1\right]\right)\cap Z\right\},\quad B = \{[0;q-1]\cap(Z\setminus A)\}$$

– множества целых точек. Положим

$$\varphi(x_j) = \left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2n}\cdot\begin{cases}\operatorname{sign}\frac{\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)x_j}{\sin\left(\frac{x_j}{2}\right)}, & j\in A\\ -\sum\limits_{p\in A}\frac{\varphi(x_p)}{|B|}, & j\in B,\end{cases}$$

где $|B|$ – число элементов B. Из условия $\sum\limits_{j=0}^{q-1}\varphi(x_j) = 0$ следует, что существует функция $f \in W_q^{2n}$ такая, что $\Delta_{2\pi/q}^{2n} f(x_j) = \varphi(x_j)$. Поэтому из (4) и (6) получаем

$$C_m(W_q^{2n}) \geq \frac{a_m}{q}\cdot\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2n}\left(\sum_{j=0}^{q-1}\frac{|\sin(m-\frac{1}{2})\cdot x_j|}{\sin\frac{x_j}{2}} - 2\cdot\sum_{j\in B}\frac{|\sin(m-\frac{1}{2})\cdot x_j|}{\sin\frac{x_j}{2}}\right)+$$

$$+O(a_m\cdot q^{-2n}) = a_m\cdot\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2n}\cdot\left(L_{2m-1}(q,2n)+O(1)\right).$$

Для четных r формула (3) установлена. Пусть теперь $r \equiv 1(\mathrm{mod}2)$. Обозначим

$$\varphi_0(x_j) = \left(\frac{2\pi}{q}\right)^{r}\cdot\operatorname{sign}\sum_{k=m}^{[q/2]} a_k\cdot\sin\left(\left(j+\frac{r}{2}\right)\cdot x_k\right).$$

Ясно, что $\sum\limits_{j=0}^{q-1} \varphi_0(x_j) = 0$. Поэтому существует функция $f \in W_q^r$ такая, что $\Delta_{2\pi/q} f(x_j) = \varphi_0(x_j)$. Следовательно, из (4) имеем

$$C_m(W_q^r) = \frac{2}{q} \cdot \left(\frac{2\pi}{q}\right)^r \cdot \sum_{j=0}^{q-1} |A_m(j)| + O(a_m \cdot q^{-r}), \tag{8}$$

где

$$A_m(j) = \sum_{k=m}^{[q/2]} a_k \cdot \sin\left(j + \frac{1}{2}\right) \cdot x_k.$$

Применяя дважды преобразование Абеля, получаем

$$A_m(j) = a_m \cdot \frac{\cos(2m-1) \cdot (j+\frac{1}{2})\frac{\pi}{q}}{2\sin(j+\frac{1}{2})\frac{\pi}{q}} + Q_m(j), \tag{9}$$

где

$$\frac{1}{q} \sum_{j=\left[\frac{q}{2m-1}\right]+2}^{q-\left[\frac{q}{2m-1}\right]-3} |Q_m(j)| = O(a_m). \tag{10}$$

Замечая, что

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{q}{2m-1}\right]+1} |A_m(j)| + \sum_{j=q-\left[\frac{q}{2m-1}\right]-2}^{q-1} |A_m(j)| = O(a_m),$$

из (8), (9) и (10) получим формулу (3) для нечетных r. Далее, аналогично доказательству неравенства (7) работы [3], доказывается, что

$$\frac{(4m-2)\ln m}{\pi\, q} \cot\frac{(2m-1)\,\pi}{2\,q} + O(1) \le L_{2m-1}(q,r) \le \frac{(4m-2)\cdot \ln m}{\pi\, q \cdot \sin(2m-1)\frac{\pi}{2q}} + O(1). \tag{11}$$

Из (3) и (11) следует утверждение Теоремы 2. □

Теорема 3. *Для фиксированного m имеет место формула:*

$$\lim_{q\to\infty} C_m(W_q^r) = C_m^r.$$

Доказательство. Докажем, что

$$\sup_{f\in W_q^r} |f(0) - S_{m-1}(f,0)| = \sup_{g\in W^r} |g(0) - S_{m-1}(g,0)|. \tag{12}$$

Пусть $f \in W_q^r$. Построим функцию $g \in W^r$. Обозначим

$$\varphi(x) = \left(\frac{q}{2\pi}\right)^r \cdot \Delta_{2\pi/q}^r f(x_j) \quad \text{при} \quad x \in [x_j; x_{j+1}), \quad j = 0, \dots, q-1.$$

Так как $\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = 0$ и $|\varphi(x)| \le 1$, то существует $g(x) \in W^r$ такая, что $g^{(r)}(x) = \varphi(x)$. Наоборот, пусть $g(x) \in W^r$. Построим функцию $f \in W_q^r$.

Рассмотрим уравнение в конечных разностях

$$\Delta^r_{2\pi/q} f(x_j) = \left(\frac{2\pi}{q}\right)^r \cdot g^{(r)}(x_j).$$

Как известно (см. [4], стр. 327)

$$f(x_j) = \left(\frac{2\pi}{q}\right)^r \cdot \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(j-i-1)\cdot(j-i-2)\cdots(j-i+r+1)}{(r-1)!} \cdot g^{(r)}(x_i) +$$

$$+ C_1 + C_2 \cdot x_j + \ldots + C_r \cdot x_j^{r-1}, \quad j = 0, 1, \ldots, q-1,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_r$ – произвольные постоянные. Возьмем $C_2 = C_3 = \ldots = C_r = 0$, а C_1 выбираем из условия $f(x_0) = f(x_q)$. $f(x_j)$ можно продолжить с периодом 2π. Ясно, что $f(x_j) \in W^r_q$. Формула (12) доказана. Замечая, что

$$\lim_{q\to\infty} S_m(g, 0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, D_m(x)\, dx,$$

где $D_m(x)$ – ядро Дирихле, из (12) получим

$$\lim_{q\to\infty} C_m(W^r_q) = \sup_{g\in W^r} \left| g(0) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, D_m(x)\, dx \right| = C^r_m.$$

Теорема 3 доказана. □

Из Теорем 2 и 3 следует доказательство Теоремы 1.

Abstract. Let W^r be the space of 2π-periodic functions $f(x)$ that are continuous together with their derivatives of order r ($r \in \mathbb{N}$), and satisfy the condition $|f^{(r)}(x)| \leq 1$. The absolute value of the remainder of the Fouries series of function $f(x) \in W^r$ has a finite upper bound which does not depend on x. A. N. Kolmogorov obtained the following result: For any natural r the following asymptotic relation holds $C^r_m = m^{-r} \cdot \left(\frac{4}{\pi^2} \cdot \ln m + O(1)\right)$. The aim of the present paper is to prove that discretization of the above continuous problem is one of the possible approaches of its solution.

Список литературы

[1] H. Lebesgue, "Sur la representation trigonometrique approachee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschits", Bull. Soc. math. France, **38**, 184 - 210 (1910).

[2] А. Н. Колмогоров, Избранные труды, Математика и механика, Наука, Москва, 179 - 185 (1985).

[3] А. Л. Григорян, "Интерполирование функций по способу наименьших квадратов", Мат. заметки, **66**, 3, 372 - 379 (1999).

[4] А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Издательство физикоматематической литературы, Москва (1959).

Поступила 14 февраля 2008