

СИЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ КАТЕГОРИИ И СИЛЬНАЯ ПОДВИЖНОСТЬ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Т. А. АВАКЯН, П. С. ГЕВОРКЯН

Московский Энергетический Институт (Технический Университет)
E-mail: *pgev@yandex.ru*

Аннотация. Работа посвящена одному из важных понятий теории шейпов. Это – понятие сильной подвижности, которое первоначально, для метризуемых компактов, было введено К. Борсуком. В данной статье доказан критерий сильной подвижности топологических пространств. Этот критерий, в частности, позволяет применить новый, категорный подход к понятию сильной подвижности.

MSC2000 number: 54C56, 55P55

Ключевые слова: шейп, сильная подвижность, обратная система, категория.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сильная подвижность является одним из важных понятий теории шейпов. Это понятие сыграло важную роль прежде всего при изучении устойчивости топологических пространств, т.е., пространств, имеющих шейп некоторого CW -комплекса (см. [3], [4], [11]). Понятие сильной подвижности первоначально, для метризуемых компактов, было введено К. Борсуком [3] с помощью окрестностей данного метризуемого компакта, замкнуто вложенного в некоторое AR -пространство. Для произвольного топологического пространства это понятие было определено Мардешичем [7] с помощью ассоциированных с данным пространством обратных спектров. Полученные в данной статье результаты, в частности, позволяют применить новый, более общий, подход к понятию сильной подвижности. В основе этого подхода лежат идеи, которые были применены в работах [2], [5] к подвижности топологических пространств. Эти идеи, как было показано И. Поп в работе [10] и вторым автором данной статьи совместно с И. Поп в работе [6], оказались пригодными и для изучения равномерной подвижности топологических пространств.

Критерий сильной подвижности топологических пространств, полученный в настоящей статье, позволяет также сделать некоторые уточнения и замечания по поводу формулировок Теоремы 4.1 из [2] и Теоремы 3 из [5].

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ.

Напомним некоторые необходимые для дальнейшего изложения определения и понятия из теории категорий и функторов и теории шейпов.

Пусть K произвольная категория. Класс всех объектов категории K обозначается через $\text{Ob}(K)$. Если A и B произвольные объекты категории K , короче $A, B \in K$, то класс всех морфизмов из A в B обозначается через $\text{Hom}_K(A, B)$ или $\text{Hom}(A, B)$, если из контекста становится понятным о какой категории идет речь. Этот класс обозначают также через $\text{Mor}_K(A, B)$.

Определение 1. Говорят, что категория K функторно доминируется категорией L , если существуют такие функторы $F : K \rightarrow L$ и $G : L \rightarrow K$, что $G \circ F = 1_K$. В этом случае будем писать $K \leq L$.

Определение 2. Пусть F и G – ковариантные функторы из категории K в категорию L . Говорят, что задан функторный морфизм или естественное преобразование $\varphi : F \rightarrow G$ функтора F в функтор G , если для произвольного объекта $A \in K$ задан морфизм $\varphi(A) : F(A) \rightarrow G(A)$ категории L так, что для любого морфизма $f : A \rightarrow B$ категории K диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\varphi(A)} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\varphi(B)} & G(B) \end{array}$$

коммутативна.

Если существует естественное преобразование $\varphi : F \rightarrow G$ функтора F в функтор G , будем писать $F \rightsquigarrow G$.

Пусть (K_i) , $i \in I$ – семейство категорий. Произведением категорий K_i , $i \in I$ называется категория $\prod_{i \in I} K_i$, объектами которой служат всевозможные семейства (X_i) , $i \in I$ где X_i – объект категории K_i , $i \in I$, а морфизмы определяются

следующим образом

$$\mathrm{Hom}_{\prod_{i \in I} K_i}((X_i), (Y_i)) = \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{K_i}(X_i, Y_i).$$

Если

$$(u_i) \in \mathrm{Hom}_{\prod_{i \in I} K_i}((X_i), (Y_i)),$$

а

$$(v_i) \in \mathrm{Hom}_{\prod_{i \in I} K_i}((Y_i), (Z_i)),$$

то композиция этих морфизмов определяется формулой

$$(v_i) \circ (u_i) = (v_i \circ u_i).$$

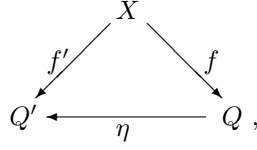
Пусть $HTOP$ – гомотопическая категория топологических пространств, а HCW – ее полная подкатегория, объектами которой являются топологические пространства, имеющие гомотопический тип CW -комплексов.

Определение 3 (К. Морита [9]). *Обратная система (обратный спектр) $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ категории HCW называется ассоциированной с топологическим пространством X , если для произвольного $\alpha \in A$ существует гомотопический класс $p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ такой, что*

- 1° $p_{\alpha\alpha'} \circ p_{\alpha'} = p_\alpha$ для произвольных $\alpha, \alpha' \in A$, $\alpha < \alpha'$;
- 2° для произвольного гомотопического класса $f : X \rightarrow Q$, $Q \in Ob(HCW)$, существуют $\alpha \in A$ и гомотопический класс $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Q$ такие, что $f = f_\alpha \circ p_\alpha$;
- 3° для произвольного $\alpha \in A$ и произвольных гомотопических классов $f_\alpha, g_\alpha : X_\alpha \rightarrow Q$, $Q \in Ob(HCW)$, удовлетворяющих условию $f_\alpha \circ p_\alpha = g_\alpha \circ p_\alpha$, существует индекс $\alpha' \in A$, $\alpha \leq \alpha'$ такой, что $f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha'} = g_\alpha \circ p_{\alpha\alpha'}$.

Известно [9], что для любого топологического пространства X существует ассоциированный с ним обратный спектр категории HCW . Иначе говоря, HCW является плотной подкатегорией категории $HTOP$, а, значит, можно построить теорию шейпов для всех топологических пространств, применяя ассоциированные обратные спектры.

Теорию шейпов топологических пространств можно построить и с помощью кома-категорий (см. [8]). Для этого каждому топологическому пространству X сопоставляется кома-категория W^X , объекты которой являются гомотопическими классами $f : X \rightarrow Q$, а морфизмы – коммутативными треугольниками



где $Q, Q' \in \text{Ob}(HCW)$. Тогда шейповый морфизм $F : X \rightarrow Y$ определяется как ковариантный функтор $F : W^Y \rightarrow W^X$, который оставляет неизменным гомотопический класс η .

Определение 4 ([8]). Обратная система $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ категории HCW называется сильно подвижной, если выполняется условие:

(SM1). для произвольного $\alpha \in A$, существует $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \alpha$ такое, что для любого $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$ существует $\alpha^* \in A$, $\alpha^* \geq \alpha'$, $\alpha^* \geq \alpha''$, и существует гомотопический класс $r^{\alpha'\alpha''} : X_{\alpha'} \rightarrow X_{\alpha''}$ такой, что одновременно выполняются равенства

$$(2.1) \quad p_{\alpha\alpha'} = p_{\alpha\alpha''} r^{\alpha'\alpha''},$$

$$(2.2) \quad r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'\alpha^*} = p_{\alpha''\alpha^*}.$$

Топологическое пространство X называется сильно подвижным, если существует ассоциированная с ним сильно подвижная обратная система $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ в категории HCW .

Для подробного ознакомления с вышеизложенными вопросами теории категорий и функторов и теории шейпов мы рекомендуем читателю книги [1] и [8].

3. СИЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ КАТЕГОРИИ

Пусть K и L произвольные категории, а $\Phi : K \rightarrow L$ – произвольный ковариантный функтор.

Определение 5. Будем говорить, что категория K подвижна относительно категории L и функтора $\Phi : K \rightarrow L$, если для произвольного объекта $X \in \text{Ob}(K)$ существуют объект $M(X) \in \text{Ob}(K)$ и морфизм $m_X \in \text{Mor}_K(M(X), X)$ такие, что для любого объекта $Y \in \text{Ob}(K)$ и любого морфизма $p \in \text{Mor}_K(Y, X)$ существует такой морфизм $u \in \text{Mor}_L(\Phi(M(X)), \Phi(Y))$, что $\Phi(p) \circ u = \Phi(m_X)$.

В случае, когда в последнем определении K – полная подкатегория категории L , а $\Phi : K \hookrightarrow L$ – функтор вложения, подкатегория K называется подвижной относительно категории L (см. Определение 1 статьи [2]).

Пусть X топологическое пространство, а W^X – кома-категория этого пространства. Определим ковариантный функтор $\Omega : W^X \rightarrow HCW$, который каждому объекту $f : X \rightarrow Q$ сопоставляет объект $Q \in HCW$, а каждому морфизму $\eta : (f : X \rightarrow Q) \rightarrow (f' : X \rightarrow Q')$, $(\eta \circ f = f')$ – морфизм $\eta : Q \rightarrow Q'$. Функтор Ω назовем *стирающим* функтором.

Теорема 1. *Топологическое пространство X подвижно тогда и только тогда, когда кома-категория W^X подвижна относительно категории HCW и стирающего функтора $\Omega : W^X \rightarrow HCW$.*

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 4, [2] (см. также, теорему 4.2, [5]). Отметим, что последняя теорема исправляет неточность, которая была замечена нами в формулировке теоремы 3, [2] (см. также, теорему 4.1, [5]).

Предложение 1. *Пусть K подвижна относительно категории L и функтора $\Phi : K \rightarrow L$, а $F : L \rightarrow L'$ – произвольный функтор. Тогда категория K будет подвижной относительно категории L' и функтора $F \circ \Phi : K \rightarrow L'$.*

Доказательство. По определению 5 для произвольного объекта $X \in Ob(K)$ существуют объект $M(X) \in Ob(K)$ и морфизм $m_X \in Mor_K(M(X), X)$ такие, что для любого объекта $Y \in Ob(K)$ и любого морфизма $p \in Mor_K(Y, X)$ существует такой морфизм $u \in Mor_L(\Phi(M(X)), \Phi(Y))$, что $\Phi(p) \circ u = \Phi(m_X)$. Но поскольку $F : L \rightarrow L'$ ковариантный функтор, то из последнего равенства следует, что $F(\Phi(p)) \circ F(u) = F(\Phi(m_X))$. А это значит, что морфизм $F(u) \in Mor_{L'}((F \circ \Phi)(M(X)), (F \circ \Phi)(Y))$ – искомый, т.е., категория K подвижна относительно категории L' и функтора $F \circ \Phi : K \rightarrow L'$. $\square$

Определение 6. *Категорию K назовем сильно подвижной, если она подвижна относительно самой себя и тождественного функтора 1_K . Иначе говоря, если для произвольного объекта $X \in Ob(K)$ существуют объект $M(X) \in Ob(K)$ и морфизм $m_X \in Mor_K(M(X), X)$ такие, что для любого объекта $Y \in Ob(K)$ и морфизма $p \in Mor_K(Y, X)$ существует такой морфизм $u_p \in Mor_K(M(X), Y)$, что $p \circ u_p = m_X$.*

Естественность этого определения станет очевидной ниже, после доказательства теоремы 6.

Пример 1. Пусть S_0 – категория множеств с отмеченным элементом, объектами которой служат всевозможные пары (A, a_0) , где A – непустое множество, а a_0 – некоторый отмеченный элемент множества A , а морфизмами – всевозможные отображения $(A, a_0) \rightarrow (B, b_0)$, переводящие отмеченный элемент a_0 в отмеченный элемент b_0 . Нетрудно проверить, что категория S_0 является сильно подвижной категорией.

Пример 2. Пусть Gr – категория групп, объектами которой служат всевозможные группы, а морфизмами – всевозможные гомоморфизмы между группами. Легко убедиться, что категория Gr также является сильно подвижной категорией.

Следующая теорема дает множество нетривиальных и интересных примеров сильно подвижных категорий.

Теорема 2. Пусть Q произвольный CW -комплекс. Тогда кома-категория W^Q является сильно подвижной категорией.

Доказательство. Пусть $X = f' : Q \rightarrow Q'$ – произвольный объект кома-категории W^Q . Докажем, что объект $M(X) = 1_Q : Q \rightarrow Q$ и морфизм $m_X = f' : M(X) \rightarrow X$ кома-категории W^Q удовлетворяют условию определения 6 сильной подвижности для кома-категории W^Q . В самом деле, пусть $Y = f'' : Q \rightarrow Q''$ – произвольный объект, а $p : Y \rightarrow X$ – произвольный морфизм кома-категории W^Q . По определению кома-категории W^Q , $p = \eta : Y \rightarrow X$ – гомотопический класс, удовлетворяющий равенству

$$(3.1) \quad \eta \circ f'' = f'.$$

Теперь в качестве искомого морфизма $u_p : M(X) \rightarrow Y$ положим $u_p = f'' : M(X) \rightarrow Y$. Осталось проверить равенство $p \circ u_p = m_X$, что с точностью до обозначений есть равенство 3.1. $\square$

Предложение 2. Если K сильно подвижная категория, то она подвижна относительно любой категории L и любого функтора $\Phi : K \rightarrow L$.

Доказательство. Пусть K – сильно подвижная категория, L – произвольная категория, а $\Phi : K \rightarrow L$ – произвольный функтор. По определению сильной

подвижности (см. определение 6), K подвижна относительно самой себя и тождественного функтора $1_K : K \rightarrow K$. Но тогда, в силу Предложения 1, категория K подвижна относительно категории L и функтора $\Phi \circ 1_K = \Phi : K \rightarrow L$. $\square$

Предложение 3. Пусть категория K подвижна относительно категории L и функтора $\Phi : K \rightarrow L$. Если $\Phi : K \rightarrow L$ – функторное доминирование, то K – сильно подвижная категория.

Доказательство. По условию существует функтор $\Psi : L \rightarrow K$ такой, что $\Psi \circ \Phi = 1_K$. Но тогда, согласно Предложению 1, категория K подвижна относительно самой себя и функтора $\Psi \circ \Phi = 1_K : K \rightarrow K$. А это, по определению, означает, что K – сильно подвижная категория. $\square$

Теорема 3. Произведение $\prod_{i \in I} K_i$ категорий K_i , $i \in I$ сильно подвижно тогда и только тогда, когда сильно подвижны все сомножители K_i , $i \in I$.

Доказательство. Пусть произведение $\prod_{i \in I} K_i$ категорий K_i , $i \in I$ – сильно подвижно. Докажем, что для произвольного $i_0 \in I$ категория K_{i_0} – сильно подвижна.

Пусть X – произвольный объект категории K_{i_0} . Рассмотрим произвольный объект $(X_i) \in \prod_{i \in I} K_i$, где $X_{i_0} = X$. Для этого объекта, в силу сильной подвижности произведения $\prod_{i \in I} K_i$, существуют объект $(M(X_i)) \in \prod_{i \in I} K_i$ и морфизм $(m_{X_i}) : (M(X_i)) \rightarrow (X_i)$, которые удовлетворяют определению сильной подвижности произведения $\prod_{i \in I} K_i$. Обозначим через $M(X_{i_0})$ i_0 -ю компоненту объекта $(M(X_i))$, а через $m_{X_{i_0}}$ – i_0 -ю компоненту морфизма (m_{X_i}) .

Пусть теперь Y – произвольный объект, а $p : Y \rightarrow X$ – произвольный морфизм категории K_{i_0} . Рассмотрим объект $(Y_i) \in \prod_{i \in I} K_i$ и морфизм $(p_i) : (Y_i) \rightarrow (X_i)$, где $Y_{i_0} = Y$ и $p_{i_0} = p$, а $Y_i = X_i$, и $p_i = 1_{X_i}$, если $i \neq i_0$. Пусть $(u_i) : (M(X_i)) \rightarrow (Y_i)$ – морфизм, существование которого следует из определения сильной подвижности объекта (X_i) , т. е., $(p_i) \circ (u_i) = (m_{X_i})$. Но тогда морфизм $u_{i_0} : M(X_{i_0}) \rightarrow Y_{i_0} = Y$ удовлетворяет равенству $p_{i_0} \circ u_{i_0} = m_{X_{i_0}}$, а значит K_{i_0} – сильно подвижная категория.

Теперь предположим, что для произвольного $i \in I$ категория K_i – сильно подвижна. Докажем, что тогда произведение $\prod_{i \in I} K_i$ также является сильно подвижной категорией.

Пусть (X_i) – произвольный объект категории $\prod_{i \in I} K_i$. Для каждого $X_i \in K_i$ найдем объект $M(X_i)$ и морфизм $m_{X_i} : M(X_i) \rightarrow X_i$, существование которых следует из определения сильной подвижности категории K_i . Рассмотрим объект $(M(X_i)) \in \prod_{i \in I} K_i$ и морфизм $(m_{X_i}) : (M(X_i)) \rightarrow (X_i)$.

Пусть теперь $(Y_i) \in \prod_{i \in I} K_i$ – произвольный объект, а $(p_i) : (Y_i) \rightarrow (X_i)$ – произвольный морфизм. Для каждого $p_i : Y_i \rightarrow X_i$, $i \in I$, существует морфизм $u_i : M(X_i) \rightarrow Y_i$ такой, что $p_i \circ u_i = m_{X_i}$. Но тогда морфизм $(u_i) : (M(X_i)) \rightarrow (Y_i)$ удовлетворяет равенству $(p_i) \circ (u_i) = (m_{X_i})$. Это и означает, что категория $\prod_{i \in I} K_i$ является сильно подвижной. $\square$

Определение 7. Будем говорить, что категория K функторно слабо доминируется категорией L , если существуют такие функторы $F : K \rightarrow L$ и $G : L \rightarrow K$, что $G \circ F \rightsquigarrow 1_K$ (см. определение 2). В этом случае пишем $K \lesssim L$.

Замечание 1. Очевидно, что функторное доминирование влечет за собой слабое функторное доминирование, т. е. из $K \leq L$ следует $K \lesssim L$.

Теорема 4. Пусть $K \lesssim L$. Если категория L сильно подвижна, то категория K также сильно подвижна.

Доказательство. Пусть $F : K \rightarrow L$ и $G : L \rightarrow K$ такие функторы, что $G \circ F \rightsquigarrow 1_K$ и пусть $\varphi : G \circ F \rightarrow 1_K$ – некоторое естественное преобразование.

Возьмем произвольный объект X категории K . Рассмотрим объект $M(F(X))$ и морфизм $m_{F(X)} : M(F(X)) \rightarrow F(X)$ категории L , существование которых следует из определения сильной подвижности категории L . Теперь покажем, что для объекта $X \in K$ объект $M(X) = G(M(F(X))) \in K$ и морфизм $m_X = \varphi(X) \circ G(m_{F(X)}) : M(X) \rightarrow X$ удовлетворяют определению сильной подвижности категории K . В самом деле, пусть Y – произвольный объект, а $p : Y \rightarrow X$ – произвольный морфизм категории K . Тогда для морфизма $F(p) : F(Y) \rightarrow F(X)$ категории L , в силу сильной подвижности категории L , существует такой морфизм $v : M(F(X)) \rightarrow F(Y)$, что $F(p) \circ v = m_{F(X)}$. Осталось заметить, что морфизм $u = \varphi(Y) \circ G(v) : M(X) \rightarrow Y$ удовлетворяет равенству $p \circ u = m_X$. Действительно, $p \circ u = (p \circ \varphi(Y)) \circ G(v) = (\varphi(X) \circ G(F(p))) \circ G(v) = \varphi(X) \circ G(m_{F(X)}) = m_X$. Итак, K – сильно подвижная категория. $\square$

Из последней теоремы и замечания 1 немедленно вытекает

Следствие 1. *Если категория K функторно доминируется категорией L : $K \leq L$ и категория L сильно подвижна, то тогда категория K также сильно подвижна.*

4. СИЛЬНАЯ ПОДВИЖНОСТЬ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ.

Понятие сильной подвижности топологических пространств с помощью обратных спектров было введено Мардешичем [7] (см. определение 4). Однако, в дальнейшем, для наших целей будет удобной другая формулировка понятия сильной подвижности, которая дается следующим предложением.

Предложение 4. *Пусть обратная система $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ категории HCW ассоциирована с пространством X . Топологическое пространство X сильно подвижно тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

(SM2). *для любого $\alpha \in A$, существует $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \alpha$ такое, что для любого $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$, существует гомотопический класс $r^{\alpha'\alpha''} : X_{\alpha'} \rightarrow X_{\alpha''}$ такой, что одновременно выполняются равенства:*

$$(4.1) \quad p_{\alpha\alpha''} r^{\alpha'\alpha''} = p_{\alpha\alpha'},$$

$$(4.2) \quad r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'} = p_{\alpha''}.$$

Доказательство. Пусть X – сильно подвижное пространство. Согласно определению 4, достаточно показать справедливость равенства (4.2). Это равенство следует из формулы (2.2) и условия 1° определения 3: $r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'} = r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'\alpha^*} \circ p_{\alpha^*} = p_{\alpha''\alpha^*} \circ p_{\alpha^*} = p_{\alpha''}$.

Теперь докажем обратное. Пусть выполняется условие (SM2). Докажем, что выполняется условие (SM1) определения 4. Для этого достаточно доказать существование такого индекса $\alpha^* \in A$, $\alpha^* \geq \alpha'$, $\alpha^* \geq \alpha''$, что справедлива формула (2.2). Рассмотрим произвольный индекс $\alpha^0 \in A$, $\alpha^0 \geq \alpha'$, $\alpha^0 \geq \alpha''$ и заметим, что равенство (4.2) можно переписать в виде: $r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'\alpha^0} \circ p_{\alpha^0} = p_{\alpha''\alpha^0} \circ p_{\alpha^0}$. В силу условия 3° определения 3 существует такой индекс $\alpha^* \in A$, $\alpha^* \geq \alpha^0$, что

$$r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'\alpha^0} \circ p_{\alpha^0\alpha^*} = p_{\alpha''\alpha^0} \circ p_{\alpha^0\alpha^*},$$

или

$$r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'\alpha^*} = p_{\alpha''\alpha^*}.$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 5. *Топологическое пространство X сильно подвижно тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

(*) для произвольного CW -комплекса Q и любого гомотопического класса $f : X \rightarrow Q$ существуют CW -комплекс Q' , гомотопические классы $f' : X \rightarrow Q'$ и $\eta : Q' \rightarrow Q$, удовлетворяющие равенству $f = \eta \circ f'$ такие, что каковы бы не были CW -комплекс Q'' , гомотопические классы $f'' : X \rightarrow Q''$ и $\eta' : Q'' \rightarrow Q$, удовлетворяющие равенству $f = \eta' \circ f''$, существует такой гомотопический класс $\eta'' : Q' \rightarrow Q''$, что выполняются

$$(4.3) \quad \eta' \circ \eta'' = \eta,$$

$$(4.4) \quad \eta'' \circ f' = f''.$$

Доказательство. Пусть выполняется условие (*). Докажем, что пространство X сильно подвижно. Для этого рассмотрим некоторый ассоциированный с X спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ и докажем, что он сильно подвижен, т.е. удовлетворяет условию (SM2) предложения 4.

Пусть $\alpha \in A$ произвольный элемент, а $p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ естественная проекция. Для гомотопического класса $p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ рассмотрим подходящий CW -комплекс Q' , гомотопические классы $f' : X \rightarrow Q'$ и $\eta : Q' \rightarrow X_\alpha$, удовлетворяющие условию $\eta \circ f' = p_\alpha$, существование которых следует из условия (*).

Так как $assX = \{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$, то для $f' : X \rightarrow Q'$ существуют $\tilde{\alpha} \in A$, $\tilde{\alpha} \geq \alpha$ и $\tilde{f}' : X_{\tilde{\alpha}} \rightarrow Q'$ такие, что

$$(4.5) \quad f' = \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$(4.6) \quad p_{\alpha\tilde{\alpha}} \circ p_{\tilde{\alpha}} = \eta \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}}.$$

В самом деле,

$$\eta \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}} = \eta \circ f' = p_\alpha = p_{\alpha\tilde{\alpha}} \circ p_{\tilde{\alpha}}.$$

В силу равенства (4.6), из определения ассоциированности 3 следует, что существует такой индекс $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \tilde{\alpha}$, что

$$(4.7) \quad p_{\alpha\tilde{\alpha}} \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} = \eta \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'}.$$

Оказывается, что найденный $\alpha' \in A$ удовлетворяет условию (SM2) предложения 4. В самом деле, пусть $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$ – произвольный элемент. Для гомотопических классов $p_{\alpha\alpha''} : X_{\alpha''} \rightarrow X_{\alpha}$ и $p_{\alpha''} : X \rightarrow X_{\alpha''}$, в силу условия (*), существует такой гомотопический класс $\eta'' : Q' \rightarrow X_{\alpha''}$, что

$$(4.8) \quad \eta = p_{\alpha\alpha''} \circ \eta'',$$

$$(4.9) \quad \eta'' \circ f' = p_{\alpha''}.$$

Теперь нетрудно убедиться, что гомотопический класс $r^{\alpha'\alpha''} = \eta'' \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} : X_{\alpha'} \rightarrow X_{\alpha''}$ – искомый, т. е. справедливы равенства (4.1) и (4.2) (см. предложение 4). В самом деле, справедливость равенства (4.1) проверяется непосредственно, учитывая (4.8) и (4.7):

$$p_{\alpha\alpha''} \circ r^{\alpha'\alpha''} = p_{\alpha\alpha''} \circ \eta'' \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} = \eta \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} = p_{\alpha\tilde{\alpha}} \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} = p_{\alpha\alpha'}.$$

Справедливость равенства (4.2) следует из (4.5) и (4.9):

$$r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'} = \eta'' \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} \circ p_{\alpha'} = \eta'' \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}} = \eta'' \circ f' = p_{\alpha''}.$$

Теперь докажем обратное. Пусть X – сильно подвижное топологическое пространство, а $\{X_{\alpha}, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ – некоторый ассоциированный с ним обратный спектр. Докажем, что выполняется свойство (*).

Рассмотрим произвольный гомотопический класс $f : X \rightarrow Q$, где Q – некоторый CW-комплекс. В силу ассоциированности спектра $\{X_{\alpha}, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ с пространством X , существуют индекс $\alpha \in A$ и гомотопический класс $f_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow Q$ такие, что

$$(4.10) \quad f = f_{\alpha} \circ p_{\alpha}.$$

Для найденного $\alpha \in A$ существует индекс $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \alpha$, который удовлетворяет условию сильной подвижности (SM2) пространства X (см. предложение 4). Теперь убедимся, что CW-комплекс $X_{\alpha'}$, гомотопические классы

$$(4.11) \quad f' = p_{\alpha'} : X \rightarrow X_{\alpha'} \quad \text{и} \quad \eta = f_{\alpha} \circ p_{\alpha\alpha'} : X_{\alpha'} \rightarrow Q$$

удовлетворяют свойству (*). В самом деле, пусть Q'' произвольный CW-комплекс, а $f'' : X \rightarrow Q''$ и $\eta' : Q'' \rightarrow Q$ такие гомотопические классы, которые удовлетворяют условию

$$(4.12) \quad f = \eta' \circ f''.$$

Для гомотопического класса $f'' : X \rightarrow Q''$ существуют индекс $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$ и гомотопический класс $\tilde{f}'' : X_{\alpha''} \rightarrow Q''$ такие, что

$$(4.13) \quad f'' = \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''}.$$

Из равенств (4.10), (4.12) и (4.13) следует, что

$$f_{\alpha} \circ p_{\alpha\alpha''} \circ p_{\alpha''} = \eta' \circ \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''}.$$

Следовательно, согласно определению ассоциированности, можно найти такой индекс $\alpha''' \in A$, $\alpha''' \geq \alpha''$, что выполняется равенство:

$$(4.14) \quad f_{\alpha} \circ p_{\alpha\alpha''} \circ p_{\alpha''\alpha'''} = \eta' \circ \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha''' }.$$

В силу сильной подвижности пространства X и предложения 4, существует гомотопический класс $r^{\alpha'\alpha'''} : X_{\alpha'} \rightarrow X_{\alpha'''}$ такой, что

$$(4.15) \quad p_{\alpha\alpha'''} \circ r^{\alpha'\alpha'''} = p_{\alpha\alpha'},$$

$$(4.16) \quad r^{\alpha'\alpha'''} \circ p_{\alpha'} = p_{\alpha''' }.$$

Положим

$$(4.17) \quad \eta'' = \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ r^{\alpha'\alpha'''} : X_{\alpha'} \rightarrow X_{\alpha''' }.$$

Остается заметить, что гомотопический класс $\eta'' : X_{\alpha'} \rightarrow Q''$ удовлетворяет равенствам (4.3) и (4.4).

Равенство (4.3) следует из (4.17), (4.14), (4.15) и (4.11):

$$\begin{aligned} \eta' \circ \eta'' &= \eta' \circ \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ r^{\alpha'\alpha'''} = f_{\alpha} \circ p_{\alpha\alpha''} \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ r^{\alpha'\alpha'''} = \\ &= f_{\alpha} \circ p_{\alpha\alpha'''} \circ r^{\alpha'\alpha'''} = f_{\alpha} \circ p_{\alpha\alpha'} = \eta. \end{aligned}$$

Равенство (4.4) следует из (4.17), (4.11), (4.16) и (4.13):

$$\eta'' \circ f' = \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ r^{\alpha'\alpha'''} \circ p_{\alpha'} = \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ p_{\alpha'''} = \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''} = f''.$$

Теорема доказана. □

Из последней теоремы следует

Теорема 6. *Топологическое пространство X сильно подвижно тогда и только тогда, когда кома-категория W^X сильно подвижна.*

Заметим, что теорема 6 позволяет применить результаты, относящиеся к сильно подвижным категориям, для изучения свойства сильной подвижности топологических пространств. В самом деле, из теорем 2 и 6 следует хорошо известный результат о том, что *произвольный CW -комплекс является сильно подвижным пространством*. Поскольку шейповое доминирование $sh(X) \leq sh(Y)$ означает категорное доминирование $W^X \leq W^Y$, то из теоремы 6 и следствия 1 непосредственно следует другой известный результат: *пусть $sh(X) \leq sh(Y)$ и Y является сильно подвижным топологическим пространством. Тогда топологическое пространство X также является сильно подвижным*.

Предложение 5. *Пусть X – несвязная топологическая сумма топологических пространств X_1 и X_2 : $X = X_1 \sqcup X_2$. Тогда $W^X = W^{X_1 \sqcup X_2} \lesssim W^{X_1} \times W^{X_2}$.*

Доказательство. Мы должны доказать, что существуют функторы $F : W^{X_1 \sqcup X_2} \rightarrow W^{X_1} \times W^{X_2}$ и $G : W^{X_1} \times W^{X_2} \rightarrow W^{X_1 \sqcup X_2}$ такие, что $G \circ F \rightsquigarrow 1_{W^{X_1 \sqcup X_2}}$ (см. определение 7).

Пусть $f : X_1 \sqcup X_2 \rightarrow Q$ – произвольный объект категории $W^{X_1 \sqcup X_2}$. Функтор $F : W^{X_1 \sqcup X_2} \rightarrow W^{X_1} \times W^{X_2}$ определим, полагая $F(f) = (f|_{X_1} : X_1 \rightarrow Q, f|_{X_2} : X_2 \rightarrow Q) \in W^{X_1} \times W^{X_2}$.

Пусть теперь $(f_1 : X_1 \rightarrow Q, f_2 : X_2 \rightarrow Q')$ – произвольный объект категории $W^{X_1} \times W^{X_2}$. Определим функтор $G : W^{X_1} \times W^{X_2} \rightarrow W^{X_1 \sqcup X_2}$, полагая $G(f_1, f_2) = f : X_1 \sqcup X_2 \rightarrow Q \sqcup Q'$, где $f|_{X_1} = f_1$ и $f|_{X_2} = f_2$. Теперь нетрудно проверить, что $G \circ F \rightsquigarrow 1_{W^{X_1 \sqcup X_2}}$. $\square$

Из теорем 3, 4, 6 и предложения 5 следует

Теорема 7. *Если топологическое пространство X имеет конечное число компонент связности и все они сильно подвижны, то топологическое пространство X также сильно подвижно.*

Abstract. The present paper is devoted to the one of the important notion of shape theory. This is the notion of strong movability, which for metrizable compacts was introduced by K. Borsuk. In this paper the criterion of strong movability of topological space is proved. This criterion, in particular, gives a new categorical approach to the strong movability.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Букур, А. Деляну, Введение в теорию категорий и функторов, М. (1972).
- [2] П.С. Геворкян, “Об одном критерии подвижности”, Матем. заметки, **71** (2), 311-315 (2002).
- [3] K. Borsuk, “A note on the theory of shape of compacta”, Fund. Math. **67**, 265-278 (1970).
- [4] J. Dydak, “On the Whitehead Theorem in pro-homotopy and on a question of Mardešić”, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys, **23**, 775-779 (1975).
- [5] P. S. Gevorgyan, “Movable categories”, Glasnik Mat., **38** (58), 177-183 (2003).
- [6] P. S. Gevorgyan, I. Pop, “Uniformly movable categories and uniform movability of topological spaces”, Bull. Polish Acad. Sci. Math., **55**, 229-242 (2007).
- [7] S. Mardešić, “Strongly movable compacta and shape retracts”, Proc. Intern. Sym. on Top. and its Appl., (Budva, 1972).
- [8] S. Mardešić, J. Segal, Shape theory – The inverse system approach, North-Holland, Amsterdam (1982).
- [9] K. Morita, “On shapes of topological spaces”, Fund. Math., **86**, 251-259 (1975).
- [10] I. Pop, “A Categorical notion of movability”, Anal.Sci. University AL.I.CUZA, v. XLIX, 327-341 (2003).
- [11] T. Watanabe, “On strong movability”, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys, **25**, 813-816 (1977).

Поступила 11 ноября 2008