Известия НАН Армении. Математика, том 44, н. 6, 2009, стр. 63-83.

ЗАДАЧА СВОБОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И БАЗИСНОСТЬ ОДНОЙ СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ

Г. М. АЙРАПЕТЯН

Государственный Инженерный Университет Армении
E-mail: *hhairapet@seua.am*

Аннотация. В работе рассматривается задача свободной интерполяции в весовом пространстве Харди $H^p(\rho)$. Предполагается, что ρ имеет единственную особенность в точке 1 порядка α. В частности, при $\alpha - p[(\alpha+1)p^{-1}] > 0$ формулируется соответствующая задача свободной интерполяции, доказывается, что она имеет решение.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Пусть $D^+ = \{z, |z| < 1\}$ – единичный круг, $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D^+$ – последовательность чисел, $M^p(Z) = \{\{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty} : f \in H^p\}$, а также

$$l^p(Z) = \left\{ \{w_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p (1 - |z_k|^2) < \infty \right\},$$

где H^p – пространство Харди. Задача свободной интерполяции состоит в нахождении условий на последовательность Z таких, чтобы имело место равенство $M^p(Z) = l^p(Z)$ $(p < \infty)$. Эта задача в H^∞ впервые была решена Карлесоном [1]. Им было установлено, что $M^\infty(Z) = l^\infty$ выполняется тогда и только тогда, когда последовательность Z удовлетворяет условию

$$\inf_{j \geq 1} \prod_{j \neq k}^{\infty} \left| \frac{z_j - z_k}{1 - \bar{z}_j z_k} \right| = \delta > 0. \tag{1.1}$$

В дальнейшем, Шапиро и Шилдс [2] доказали, что условие (1.1) равносильно равенству

$$M^p(Z) = l^p(Z), \quad p < \infty. \tag{1.2}$$

Для явного представления решений задач интерполяции и кратной интерполяции в H^2 М. М. Джрбашяном [3] была построена система $\{\Omega_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ ограниченных, аналитических в D^+ функций, которая, при выполнении условия Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty \tag{1.3}$$

биортогональна с системой $\{(s_k-1)!z^{s_k-1}(1-\bar{z}_k z)^{-s_k}\}_{k=1}^{\infty}$, где $s_k \geq 1$ – кратность появления числа z_k в множестве $\{z_k\}_{j=1}^{k}$. Путем некоторой модификации этой системы в [4] была построена другая система $\{\Omega_k^*(z)\}_{k=1}^{\infty}$, тоже биортогональная с $\{(s_k-1)!z^{s_k-1}(1-\bar{z}_k z)^{-s_k}\}_{k=1}^{\infty}$, и удалось установить результаты о существовании и явном представлении системой $\{\Omega_k^*(z)\}_{k=1}^{\infty}$ решения интерполяционной задачи вида

$$f \in H^2, \;\; f^{(s_j-1)}(z_j)=w_j, \quad j=1,2,\ldots$$

Подобное представление системой $\{\Omega_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ в H^p $(p>0)$ получено в [5].

Как оказалось, условие (1.1) существенно для того, чтобы простейшие рациональные функции с фиксированными полюсами ограниченного порядка были безусловным базисом в замыкании своей линейной оболочки в H^p $(1<p<\infty)$. Эти и смежные вопросы изучены в работах многих авторов (см. напр. [6]-[11]). О развитии в этих направлениях подробно изложено в монографии Н. К. Никольского [12].

1.2. В настоящей работе изложенные выше вопросы исследуются в пространстве $H_+^p(\rho)$ Харди с весом $\rho(t)$. В частности устанавлено, что если функция $\rho(t)$ удовлетворяет определенному условию, то (1.1) необходимо и достаточно для того чтобы имела решение интерполяционная задача

$$f \in H_+^p(\rho), \quad f(z_j)=w_j, \quad j=1,2,\ldots,$$

при любой последовательности $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}|w_k|^p\left(1-|z_k|^2\right)|F_\rho(z_k)|<\infty,$$

где

$$F_\rho(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_T \ln\left(\rho^{1/p}(t)\right)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}\right\}.$$

В параграфе 2 изучена граничная задача Римана в пространстве $L^p(\rho)$ $(p\geq 1)$ в случае, когда коэффициент тождественно равен единице (т.е. “задача о скачке”). Отметим, что в общем случае, когда порядок особенности весовой функции положителен, в $L^1(\rho)$ эта задача исследована в [13], а в $L^p(\rho)$ $(p>1)$ – в [14]. В параграфе 3 определены весовые пространства $H^p(\rho)$ и исследовано представление функции $f \in L^p(\rho)$ $(p > 1)$ в виде $f = f^+ - f^-$, где $f^+ \in H_+^p(\rho)$, $f^- \in H_-^p(\rho)$ $f^-(\infty) = 0$, а $H_-^p(\rho)$ – пространство Харди в $D^- = \{z,\ |z| > 1\}$. Также установлены проекционные теоремы и описаны сопряженные к $H_+^p(\rho)$ $(1 < p < \infty)$ пространства. Отметим, что эти вопросы изучены полностью в случае, когда весовая функция удовлетворяет условию Макенхаупта (см. подробно в [15]). Весовые же пространства $H_+^p(\rho)$ $(1 < p < \infty)$, в случае, когда весовая функция ρ не удовлетворяет этому условию, при неотрицательным порядке особенностей, исследованы К. С. Казаряном [16]. В параграфе 4 исследованы интерполяционные задачи в $H_+^p(\rho)$ и, в случае выполнения (1.1), доказана безусловная базисность рациональных функций, порожденных последовательностью $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^p(\rho)$ $(p > 1)$.

2. ЗАДАЧА О СКАЧКЕ В $L^p(\rho)$

2.1. Следуя [17], вещественную, неотрицательную и измеримую на $(0, \pi)$ функцию $g(\phi)$ будем называть медленно меняющейся в точке $\phi = 0$ справа, если ее можно представить в виде

$$g(\phi) = \exp\left\{g_1(\phi) + \int_{\phi}^{a} \frac{g_2(t)}{t} dt\right\}, \quad \phi \in (0, \pi], \tag{2.1}$$

где $a \in (0, \pi]$, $g_1(\phi)$ – измеримая, ограниченная на $(0, \pi]$ функция, а $g_2(\phi)$ непрерывна на $(0, \pi]$ и стремится к нулю при $\varphi \to +0$. Аналогично определяются функции, медленно меняющиеся слева в точке $\phi = 0$. Функция $g(\phi)$ называется медленно меняющейся в точке $\phi = 0$, если она медленно меняющаяся в точке $\phi = 0$ слева и справа и существуют положительные числа $c < C$ такие, что $cg(-\phi) < Cg(\phi)$ при $0 < |\phi| < \pi$.

Пусть $\rho(t)$ – вес на единичной окружности $T = \{z : |z| = 1\}$. Представим $\rho(t)$ в виде $\rho(t) = |1 - t|^{\alpha}\rho_1(t)$, где функция ρ_1 будет определена ниже. Далее, положив $n_p \equiv n_p(\alpha) = [(\alpha + 1)p^{-1}]$, где $[x]$ – целая часть числа x, продолжим функцию $\rho(t)$ вовнутрь единичного круга по формуле

$$\rho_{rp}(t) = \begin{cases} |1 - t|^{pn_p}\widetilde{\rho}_p(t) & \text{если} \quad \alpha > -1, \\ |1 - rt|^{pn_p}\widetilde{\rho}_p(t) & \text{если} \quad \alpha \le -1, \end{cases}$$

где $\widetilde{\rho}_p(t) = |1 - t|^{\alpha - pn_p}\rho_1(t)$. Число n_p будем называть “порядком особенности” весовой функции $\rho(t)$ в $L^p(\rho)$. При $p = 1$ скажем, что $\rho \in A_{\alpha 1}$, если $\rho_1(t) = \rho_1(e^{i\varphi})$ медленно меняющаяся функция в точке $\varphi = 0$ (или $t = 1$), $\rho_1, \rho_1^{-1} \in L^{\infty}(|t-1| > \delta)$

при любом $\delta > 0$ и для максимальной функции $M\widetilde{\rho}_1$ от $\widetilde{\rho}_1$

$$(M\widetilde{\rho}_1)(t) \equiv \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{\theta-h}^{\theta+h} \widetilde{\rho}_1(e^{i\varphi}) d\varphi < C\widetilde{\rho}_1(t), \tag{2.2}$$

где $t = e^{i\theta}$ и C – постоянная, не зависящая от t. Если $p > 1$, то скажем, что $\rho \in A_{\alpha p}$, если функция $\widetilde{\rho}_p(t)$ удовлетворяет условию Макенхаупта (A_p)

$$\left\{ \frac{1}{|I|} \int_I \widetilde{\rho}_p(t)|dt| \right\} \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I (\widetilde{\rho}_p(t))^{-\frac{1}{p-1}} |dt| \right\}^{p-1} < B < \infty, \tag{2.3}$$

для любого интервала $I \in T$ с длиною $|I|$ (см. [15]). Хорошо известно (см., напр., [15]), что если весовая функция ρ удовлетворяет условию (A_p), то интеграл типа Коши ограничен в $L^p(\rho)$ $(1 < p < \infty)$, т.е. если

$$K(f, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z},$$

то при некоторой постоянной C, не зависящей от r и f,

$$\|K(f, rt)\|_{L^p(\rho)} < C\|f\|_{L^p(\rho)}. \tag{2.4}$$

2.2. В банаховом пространстве $L^p(\rho)$ с нормой

$$\|f\|_{L^p(\rho)} = \left(\int_T |f(t)|^p \rho(t)|dt| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

рассмотрим граничную задачу Гильберта (задачу о скачке).

Задача H. *При $f \in L^p(\rho)$ найти аналитические в D^+ и D^- функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, $\Phi^-(\infty) = 0$ такие, чтобы имело место граничное условие*

$$\lim_{r \to 1-0} \left\| \Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t) - f(t) \right\|_{L^p(\rho_{rp})} = 0. \tag{2.5}$$

Здесь, наличие параметра r в ρ_{rp} обусловлено тем, что, вообще говоря, функция $\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t)$ не принадлежит $L^p(\rho)$ при $\alpha \le -1$. В дальнейшем, для аналитических в D^+ и D^- функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ будем обозначать

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z) & \text{если } z \in D^+, \\ \Phi^-(z) & \text{если } z \in D^-. \end{cases}$$

Далее, если функция $\Phi(z)$ аналитична в $D^+ \cup D^-$, то через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ будем обозначать сужения функции $\Phi(z)$ на D^+ и D^- соответственно. Заметим, что при $\rho(t) \equiv 1$, условие (2.5) принимает вид

$$\lim_{r \to 1-0} \left\| \Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t) - f(t) \right\|_{L^p} = 0.$$

Предположим, что для заданной $f \in L^p(\rho)$ эта задача имеет решение. Тогда, положив

$$\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t) = f_r(t)$$

получим, что аналитические функции $\Phi_r^+(z) = \Phi^+(rz)$ и $\Phi_r^-(z) = \Phi^-(r^{-1}z)$ $(\Phi_r^-(\infty) = 0)$ являются решением граничной задачи Гильберта (с коэффициентом, тождественно равным единице) в классе Гельдера. Хорошо известно, что последняя задача имеет единственное решение, и поэтому

$$\Phi_r^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_r(\tau)d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D^+ \cup D^-.$$

Переходя здесь к пределу при $r \to 1-0$ и учитывая, что $f_r(t) \to f(t)$ в $L^p(T)$, получаем

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D^+ \cup D^-. \tag{2.6}$$

Далее, из равенства

$$\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t) = \frac{1}{2\pi i}\int_T f(\tau)\frac{1-r^2}{|\tau - rt|^2}|d\tau|$$

заключаем, что функция $\Phi(z)$ является единственным решением задачи H при $\rho(t) \equiv 1$. Хорошо известно, что если $p > 1$, то $\Phi^+ \in H^p(D^+)$ и $\Phi^- \in H^p(D^-)$, а при $p = 1$ это, вообще говоря, не верно. Поэтому постановка (2.5) является обобщением граничной задачи Гильберта для случая, когда граничные условия понимаются в смысле L^p, и имеет место

Теорема 1. *Если $\rho(t) \equiv 1$, то задача H однозначно разрешима, и ее решение можно представить в виде* (2.6).

Отметим, что при $\rho(t) \equiv 1$ задача Римана-Гильберта с кусочно непрерывным в смысле Гельдера коэффициентом исследована в [13].

2.3. Если n – целое число и $f \in L^1(|1-t|^n)$, то положим

$$K_n(f,z) = \frac{1}{(1-z)^n}\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n}{\tau - z}d\tau, \quad z \in D^+ \cup D^-. \tag{2.7}$$

и докажем следующие четыре леммы.

Лемма 1. *Если $\rho \in A_{\alpha 1}$, то имеет место оценка*

$$\left\|K_{n_1}^+(f,rt) - K_{n_1}^-(f,r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho)} \le C\|f\|_{L^1(\rho)}, \tag{2.8}$$

где C – постоянная, не зависящая от r и f.

Доказательство. Из определения функции $K_n^+(f,z)$ получаем

$$K_{n_1}^+(f,rt) - K_{n_1}^-(f,r^{-1}t) = J_1(r,t) + J_2(r,t), \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} J_1(r,t) &= \left(\frac{1}{(1-rt)^{n_1}} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^{n_1}}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^{n_1}}{\tau - z}d\tau, \\ J_2(r,t) &= \frac{1}{(1-rt)^{n_1}}\frac{1}{2\pi i}\int_T f(\tau)(1-\tau)^{n_1}\frac{1-r^2}{|\tau - rt|^2}|d\tau|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Далее,

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^{n_1}} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^{n_1}}\right| < C_1\frac{1-r^2}{|\tau - rt|^{n_1+1}},$$

где C_1 – постоянная, не зависящая от r. Поэтому

$$\int_T |J_1(r,t)|\rho_{r1}(t)|dt| \le C_1\int_T |f(\tau)|\rho(\tau)\Big(\frac{1}{\widetilde{\rho}_1(\tau)}\int_T \frac{\widetilde{\rho}_1(t)(1-r^2)|1-t|}{|1-rt|^2|\tau - rt|}|dt|\Big)|d\tau|.$$

При более общих предположениях на функцию ρ в работе [18] установлено, что

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{\widetilde{\rho}_1(\tau)}\int_T \frac{\widetilde{\rho}_1(t)(1-r^2)|1-t|}{|1-rt|^2|\tau - rt|}|dt| < \infty.$$

Следовательно, $\|J_1(r,t)\|_{L^1(\rho_{r1})} \le C_2\|f\|_{L^1(\rho)}$, где C_2 - постоянная, не зависящая от r и f. Далее, $\|J_2(r,t)\|_{L^1(\rho_{r1})} \le C_3\|f\|_{L^1(\rho)}$, так как (см. [18])

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{\widetilde{\rho}_1(\tau)}\int_T \frac{\widetilde{\rho}_1(t)(1-r^2)|dt|}{|\tau - rt|^2} < \infty \quad \text{при} \quad \widetilde{\rho} \in A_{\alpha 1}.$$

Лемма 2. *Если $\widetilde{\rho}_p \in A_p$ $(p>1)$, то*

$$\left\|K_{n_p}^+(f,rt) - K_{n_p}^-(f,r^{-1}t)\right\|_{L^p(\rho_{rp})} \le C\|f\|_{L^1(\rho)}, \tag{2.11}$$

где C – постоянная, не зависящая от r и f.

Доказательство. Из определения функции $K_n^+(f,z)$ следуют те же формулы (2.9), (2.10), но с заменой n_1 на n_p. Далее, аналогично доказательству предыдущей леммы

$$\int_T |J_1(r,t)|^p\rho_{rp}(t)|dt| \le C_1\int_T\left|\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^{n_p}}{\tau - rt}d\tau\right|\widetilde{\rho}_p(t)|dt|.$$

Так как $f(\tau)(1-\tau)^{n_p} \in L^p(\widetilde{\rho}_p)$ и $\widetilde{\rho}_p \in A_p$ $(p>1)$, то в силу (2.4)

$$\int_T |J_1(r,t)|^p\rho_{rp}(t)|dt| < C_2\|f(\tau)(1-\tau)^{n_p}\|_{L^p(\widetilde{\rho}_p)} = C_2\|f\|_{L^p(\rho)}.$$

Аналогично $\|J_2(r,t)\|_{L^p(\rho_{rp})} < C_3\|f\|_{L^p(\rho)}$.

Лемма 3. *Если $\alpha \le -1$ и $P(z) = B_0 + B_1(1-z) + \ldots + B_N(1-z)^N$ – полином, удовлетворяющий однородному условию (2.5), т.е.*

$$\lim_{r\to 1-0}\|P^+(rt) - P^-(r^{-1}t)\|_{L^p(\rho_{rp})} = 0.$$

Тогда $B_1 = \ldots = B_{-n_p-1} = 0$.

Доказательство. Заметим, что если $P(z) = B_0 + B_{-n_p}(1-z)^{-n_p} + ... + B_N(1-z)^N$, то $P(z)$ удовлетворяет однородному условию (2.5). Пусть теперь B_k $(k < -n_p)$ – первый ненулевой коэффициент среди $B_1, B_2, \dots B_{-n_p-1}$. Тогда при $|1-t| > 2k(1-r)$ будем иметь $|P(rt) - P(r^{-1}t)| > a(1-r)|1-rt|^{k-1}$, где $a > 0$ – некоторая постоянная. Далее,

$$\left\|P(rt) - P(r^{-1}t)\right\|_{L^p(\rho_{rp})} > a|B_k|\left(\int_{|1-t|>2k(1-r)} \frac{(1-r)^p|dt|}{|1-rt|^{p+1}}\right)^{1/p},$$

где последний интеграл ограничен снизу некоторым положительным чилом. Это противоречит условиям леммы. Следовательно, $B_k = 0$.

Лемма 4. *Если $f \in L^1(\rho)$ с $\rho \in A_{\alpha 1}$, то*

$$\lim_{r\to 1-0} \left\|K^+_{n_1}(f, rt) - K^-_{n_1}(f, r^{-1}t) - f(t)\right\|_{L^1(\rho_{r1})} = 0.$$

Доказательство. Поскольку множество $M_1 = \{f : f \in L^1(T),\ f(t) \equiv 0,\ |1-t| < \delta,\ \delta > 0\}$ всюду плотно в $L^1(\rho)$, то в силу леммы 1 достаточно рассматривать случай $f \in M_1$. Пусть $f(t) \equiv 0$ при $|1-t| < \delta$. Тогда

$$K_{n_1}(z) = \frac{1}{(1-z)^{n_1}}(B_0 + B_1(1-z) + \ldots), \quad |1-z| < \delta$$

$$\left|K^+_{n_1}(f, rt) - K^-_{n_1(\alpha)}(f, r^{-1}t)\right| < C_1\frac{1-r}{|1-rt|^{n_1}}, \quad |1-t| < \delta,$$

где C_1 – постоянная, не зависящая от r и t. Поэтому

$$\int_{|1-t|<\delta} \left|K^+_{n_1}(f, rt) - K^-_{n_1}(f, r^{-1}t)\right| \rho_{r1}(t)|dt| < C_1 \int_{|1-t|<\delta} \frac{(1-r)\widetilde{\rho}_1(t)}{|1-rt|}|dt| \to 0$$

при $r \to 1-0$. Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\lim_{r\to 1-0} \int_{|1-t|>\delta} |K^+_{n_1}(f, rt) - K^-_{n_1}(f, r^{-1}t) - f(t)||dt| = 0.$$

Теорема 2. *Если $p = 1$ и $\rho \in A_{\alpha 1}$. Тогда:*

a) *Если $\alpha > -1$, то задача H имеет решение для любой функции $f \in L^1(\rho)$, и при $\alpha > 0$ общее решение можно представить в виде*

(2.12) $$\Phi(z) = K_{n_1}(f, z) + \sum_{k=1}^{n_1} \frac{A_k}{(1-z)^k}, \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

где $K_{n_1}(f, z)$ определяется формулой (2.7), а A_k – произвольные комплексные числа. Если же $\alpha \in (-1, 0]$, то $\Phi(z) = K_{n_1}(f, z)$.

b) *Если $\alpha \le -1$, то задача H имеет решение тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям*

$$\int_T \frac{f(\tau)d\tau}{(1-\tau)^k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, -n_1 - 1. \tag{2.13}$$

При условии (2.13) задача H имеет единственное решение, представимое в виде $\Phi(z) = K_{n_1}(f, z)$.

Доказательство. Если $\alpha > -1$, то (см. [18]) общее решение однородной задачи H можно представить в виде $\Phi_0(z) = \sum_{k=1}^{n_1} A_k(1-z)^{-k}$, где A_k – произвольные комплексные числа. Так как $K_{n_1}(f, \infty) = 0$ при $\alpha > -1$, то функция $K_{n_1}(f, z)$ - решение задачи H, и a) доказано. Пусть теперь $\alpha \le -1$. Тогда по лемме 3 функция $K_{n_1}(f, z)$ меет наименьший порядок на бесконечности среди функций, удовлетворяющих условию (2.5). Поэтому задача H при $\alpha \le -1$ разрешима тогда и только тогда, когда $K_{n_1(\alpha)}(f, \infty) = 0$, А это возможно лишь когда выполнены условия (2.13).

Лемма 5. *Если $f \in L^p(\rho)$ и $\widetilde{\rho}_p \in A_p$, то*

$$\lim_{r \to 1-0} \left\| K^+_{n_p}(f, rt) - K^-_{n_p}(f, r^{-1}t) - f(t) \right\|_{L^p(\rho_{rp})} = 0.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 4 предположим, что $f \in M_1$. Если $f(t) \equiv 0$ и $|1-t| < \delta$, то

$$\left| K^+_{n_p}(f, rt) - K^-_{n_p}(f, r^{-1}t) \right| < C_1 \frac{1-r}{|1-rt|^{n_p(\alpha)}}, \quad |1-t| < \delta,$$

Поэтому

$$\int_{|1-t|<\delta} \left| K^+_{n_p}(f, rt) - K^-_{n_p}(f, r^{-1}t) \right|^p \rho_{rp}(t)|dt| < C_1 \int_{|1-t|<\delta} \frac{(1-r)^p \widetilde{\rho}_p(t)}{|1-rt|^p} |dt| \to 0$$

при $r \to 1-0$. Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\lim_{r \to 1-0} \int_{|1-t|>\delta} \left| K^+_{n_1}(f, rt) - K^-_{n_1}(f, r^{-1}t) - f(t) \right|^p |dt| = 0.$$

Лемма 6. *Если $\alpha > 0$ и $p > 1$, то общее решение однородной задачи H можно представить в виде*

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=1}^{n_p} \frac{A_k}{(1-z)^k}, \tag{2.14}$$

где A_k – произвольные комплексные числа. Если же $\alpha \le -1$, то задача H имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Полагая, что $\Phi(z)$ - решение однородной задачи H и, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\Phi^+(rt)-\Phi^-(r^{-1}t)\right\|_{L^1(\rho_1)}=0,$$

где $\rho_1(t)=|1-t|^{n_p}$. Следовательно, при $\alpha>0$ верно представление (2.14), где A_k $(k=1,2,\dots n_p)$ – некоторые комплексные числа. Если же $\alpha\le -1$, то получаем $\Phi(z)\equiv 0$. Далее, непосредственной проверкой устанавливается, что $\Phi(z)$ удовлетворяет однородному условию (2.5) для любых чисел A_k $(k=1,2,\dots n_p)$.

Воспользовавшись леммами 3 и 6, аналогично теореме 2 доказывается

Теорема 3. *Пусть $p>1$ и $\rho\in A_{\alpha p}$. Тогда*

a) *если $\alpha>-1$, то задача H имеет решение для любой функции $f\in L^p(\rho)$, и при $\alpha>0$ общее решение можно представить в виде*

$$\Phi(z)=K_{n_p}(f,z)+\sum_{k=1}^{n_p}\frac{A_k}{(1-z)^k},\qquad z\in D^+\cup D^-,\tag{2.15}$$

где $K_{n_p}(f,z)$ определяется формулой (2.7), а A_k – произвольные комплексные числа. Если же $\alpha\in(-1,0]$, то $\Phi(z)=K_{n_p}(f,z)$.

b) *если $\alpha\le -1$, то задача H имеет решение тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям*

$$\int_T\frac{f(\tau)d\tau}{(1-\tau)^k}=0,\qquad k=0,1,2,\dots,-n_p(\alpha)-1.\tag{2.16}$$

При условии (2.16), задача H имеет единственное решение, которое можно представить в виде $\Phi(z)=K_{n_p}(f,z)$.

3. О ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ

3.1. Аналитическая в D^+ функция f принадлежит классу Харди $H^p_+(\rho)$, если

$$\|f\|_{H^p_+(\rho)}=\sup_{0<r<1}\left(\int_T|f(rt)|^p\rho_{rp}(t)|dt|\right)^{1/p}<\infty.\tag{3.1}$$

Аналогично определяется пространство $H^p_-(\rho)$ аналитических в D^- функций, равных нулю в бесконечности. Для доказательства следующей теоремы нам понадобятся две леммы.

Лемма 7. *Если $f\in H^p_+(\rho)$ при некоторых $p>1$ и $\rho\in A_{\alpha p}$, то*

a) $$f(z)=\frac{1}{(1-z)^{n_p}}\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f(\tau)(1-\tau)^{n_p(\alpha)}}{\tau-z}d\tau,$$

где $f(\tau)(1-\tau)^{n_p} \in L^p(\widetilde{\rho})$ *и*

$$\int_T f(\tau)(1-\tau)^{n_p}\tau^k d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

b) $\|f\|_{H^p_+(\rho)} < C\|f\|_{L^p(\rho)}$ *при некоторой постоянной* C, *не зависящей от* f.

Доказательство. Пусть $\alpha > -1$ и $f_r(z) = f(rz)(1-r^{-1}z)^{n_p}$. Так как семейство $f_r(t) = f(rt)(1-r^{-1}t)^{n_p}$, $t \in T$ $(0 < r < 1)$ равномерно ограничено в $L^p(\widetilde{\rho}_p)$ и $L^p(\widetilde{\rho}_p) = (L^q(\rho^*))^*$, где

$$\rho^*(t) = \big(\widetilde{\rho}_p(t)\big)^{-q/p}, \quad q = p(p-1)^{-1},$$

то из слабой компактности следует существование $\widetilde{f} \in L^p(\widetilde{\rho}_p)$ такой, что $f_{r_k} \to \widetilde{f}$ в слабом смысле. Поэтому, переходя к пределу в равенстве

$$f_{r_k}(z)(1-r^{-1}z)^{n_p} = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f_{r_k}(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

получаем

$$f(z)(1-z)^{n_p} = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\widetilde{f}(\tau)}{\tau - z}d\tau.$$

Обозначив $\widetilde{f}(t) = f(t)(1-t)^{n_p}$ придем к утверждению a) при $\alpha > -1$. Если же $\alpha < -1$, то $f(z)(1-z)^{n_p} \in H^p_+(\widetilde{\rho})$, и поэтому

$$f(z)(1-z)^{n_p} = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^{n_p}}{\tau - z}d\tau.$$

Тем самым, утверждение b) следует из (2.4).

Лемма 8. *Если* $f \in L^p(\rho)$ *при* $p > 1$ *и* $\rho \in A_{\alpha p}$, *то* $K^{\pm}_{n_p}(f,z) \in H^p_{\pm}(\rho)$ *и* $\|K^+_{n_p}(f,rt)\|_{L^p(\rho_{rp})} \le C\|f\|_{L^p(\rho)}$.

Доказательство. Пусть $\alpha > -1$. Тогда, в силу $|1-t| < 2|1-rt|$ и (2.7)

$$\begin{aligned}\left|K^+_{n_p}(f,rt)\right|^p\rho(t) &\le \frac{|1-t|^{pn_p}}{|1-rt|pn_p}|1-t|^{\alpha - pn_p}\rho_1(t)\left|\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^{n_p}}{\tau - rt}d\tau\right|^p \\ &< C\widetilde{\rho}_p(t)\left|\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^{n_p}}{\tau - rt}d\tau\right|^p.\end{aligned}$$

Далее, в силу включения $f(\tau)(1-\tau)^{n_p} \in L^p(\widetilde{\rho}_p)$ и (2.4)

$$\int_T\left|\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^{n_p}}{\tau - rt}d\tau\right|^p \widetilde{\rho}_p(t)|dt| < C\|f(\tau)(1-\tau)^{n_p}\|_{L^p(\widetilde{\rho}_p} = C\|f\|_{L^p(\rho)},$$

где C – постоянная, не зависящая от r и f. Следовательно, $K^+_{n_p}(f,z) \in H^p_+(\rho)$. Аналогично $K^-_{n_p}(f,z) \in H^p_-(\rho)$. Если же $\alpha \le -1$, то

$$\left|K^+_{n_p}(f,rt)\right|^p\rho_{rp}(t) \le \widetilde{\rho}_p(t)\left|\int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^{n_p}}{\tau - rt}d\tau\right|^p$$

и $\|K^+_{n_p}(f,rt)\|_{L^p(\rho_{rp})} \le C\|f\|_{L^p(\rho)}$.

Теорема 4. *Если $f \in L^p(\rho)$ при $p > 1$, $\alpha > -1$ и $\rho \in A_{\alpha p}$, то функцию f можно представить в виде*

$$f(t) = f^+(t) - f^-(t), \tag{3.2}$$

где $f^\pm \in H^p_\pm(\rho)$. Представление (3.2) не единственно, а именно

$$f^\pm(z) = K^\pm_{n_p}(f, z) + \sum_{k=1}^{n_p} \frac{A_k}{(1-z)^k}, \tag{3.3}$$

де A_k - произвольные комплексные числа.

Доказательство. Заметим, что $(1-z)^{-k} \in H^p_\pm(\rho)$ при $0 < k \le n_p$. Действительно,

$$\frac{1}{(1-z)^k} = \frac{1}{(1-z)^{n_p(\alpha)}} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{(1-t)^{n_p(\alpha)}}{(1-t)^k} \frac{dt}{t-z},$$

и по лемме 6 $(1-z)^{-k} \in H^p_\pm(\rho)$. Остается применить теорему 2 и лемму 6.

3.2. Пусть $\alpha \le -1$ и

$$\varphi_k(t) = \frac{(1-t)^{-n_p}}{t^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, -n_p \tag{3.4}$$

и h - линейная оболочка системы (3.4). Тогда имеет место

Теорема 5. *Если $f \in L^p(\rho)$ при $p > 1$, $\alpha \le -1$ и $\rho \in A_{\alpha p}$.*

a) *Имеет место представление*

$$f(t) = f^+(t) - f^-(t) + \sum_{k=1}^{-n_p} A_k \varphi_k(t), \tag{3.5}$$

где $f^\pm \in H^p_\pm(\rho)$ и A_k $(k = 1, 2, \ldots, -n_p)$ – комплексные числа, однозначно определяемые по функции f.

b) *При некоторых постоянных C и A, не зависящих от f и r,*

$$\|f^\pm\|_{L^p(\rho_{rp})} < C\|f\|_{L^p(\rho)} \quad \text{и} \quad \left\| \sum_{k=1}^{-n_p} A_k \varphi_k(t) \right\|_{L^p(\rho_{rp})} < A\|f\|_{L^p(\rho)}.$$

Доказательство. Функции φ_k таковы, что

$$\int_T \frac{\varphi_k(t)dt}{(1-t)^{-n_p(\alpha)-j+1}} = A_{kj}, \quad k = 1, 2, \ldots, -n_p, \quad j = 0, 1, \ldots, -n_p - 1,$$

где $A_{kj} = 0$ при $j < k$ и $A_{kj} = C^{k-1}_{j-1}$ при $j \ge k$. Действительно,

$$\int_T \frac{\varphi_k(t)dt}{(1-t)^{-n_p-j+1}} = \int_T \frac{(1-t)^{-n_p}dt}{t^k(1-t)^{-n_p-j}} = \int_T \frac{(1-t)^{j-1}}{t^k}dt = 0,$$

если $j < k$. А при $j \ge k$

$$\int_T \frac{\varphi_k(t)dt}{(1-t)^{-n_p-j+1}} = \int_T \frac{(1-t)^{j-1}}{t^k}dt = C^{k-1}_{j-1}.$$

Пусть теперь $f \in L^p(\rho)$ - произвольная функция. Тогда числа $A_1, A_2, \dots A_{-n_p}$ можно выбрать так, чтобы функция

$$\widetilde{f}(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{-n_p} A_k \varphi_k(t)$$

удовлетворяла условиям

$$\int_T \frac{\widetilde{f}(t)dt}{(1-t)^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, -n_p - 1.$$

Применив теорему 3 получим $\widetilde{f}(t) = K^+_{n_p}(\widetilde{f}, t) - K^-_{n_p}(\widetilde{f}, t)$. Тем самым

$$f(t) = K^+_{n_p}(\widetilde{f}, t) - K^-_{n_p}(\widetilde{f}, t) + \sum_{k=1}^{-n_p(\alpha)} A_k \varphi_k(t).$$

Заметим, что

$$K_{n_p}(\varphi_k, z) = \begin{cases} 0 & \text{если } z \in D^+, \\ \varphi_k(z) & \text{если } z \in D^-. \end{cases}$$

Поэтому $K^+_{n_p}(\widetilde{f}, z) = K^+_{n_p}(f, z)$ и $K^-_{n_p}(\widetilde{f}, z) = K^+_{n_p}(f, z) - \sum_{k=1}^{-n_p} A_k \varphi_k(z)$. Отсюда

$$f(t) = K^+_{n_p}(f, t) - K^-_{n_p}(f, t) + \sum_{k=1}^{-n_p} A_k \varphi_k(t).$$

Теперь утверждение a) теоремы следует ввиду того, что $K^\pm_{n_p} \in H^p_\pm(\rho)$ по лемме 8. Утверждение же b) следует из леммы 7.

Теорема 6. *При $p > 1$ и $\rho \in A_{\alpha p}$*

a) *Если $\alpha > -1$, то $(H^p_+(\rho))^* = H^q_+(\rho^*) \oplus h$, где $q = p(p-1)^{-1}$ и h – линейная оболочка системы φ_k $(k = 1, 2, \dots n_p)$.*

b) *Если $\alpha \leq -1$, то $(H^p_+(\rho))^* = H^q_+(\rho^*) \ominus h^1$, где h^1 – линейная оболочка системы $(1-z)^{-k}$ $(k = 1, 2, \dots - n_p)$.*

Доказательство. Заметим, что $(L^p(\rho))^* = L^q(\rho^*)$, где $\rho^*(t) = (\rho(t))^{-q\alpha/p}$, $q = p(p-1)^{-1}$ и порядок особенности весовой функции ρ^* в $L^q(\rho^*)$ равен $-n_p$. Пусть $\varphi \in L^q(\rho^*)$ – произвольная функция и

$$l_\varphi(f) = \int_T \overline{\varphi(t)} f(t) |dt|$$

– функционал, порожденный этой функцией. Если $\alpha > -1$, то по теореме 3 функция φ представима в виде $\varphi = \varphi^+ - \varphi^- + \sum_{k=1}^{-n_p} A_k \varphi_k(t)$, где $\varphi^\pm \in H^q_\pm(\rho^{-1})$. Так как $f \in H^p_+(\rho)$, то

$$\int_T \overline{\varphi^-(t)} f(t) |dt| = \int_T \overline{\varphi^-\Big(\frac{1}{\bar{t}}\Big)} f(t) \frac{dt}{t} = 0,$$

поскольку $\overline{\varphi^-(1/\bar{z})}$ аналитична в D^+ и равна нулю при $z = 0$. Так как

$$\left\| \sum_{k=1}^{-n_p} A_k \varphi_k(t) \right\|_{L^q(\rho^{-1})} < A\|\varphi\|_{L^q(\rho^{-1})},$$

а по лемме 5 $\|\varphi^+\|_{L^q(\rho^*)} < A\|\varphi\|_{L^q(\rho^*)}$, то

$$l_\varphi(f) = \int_T \overline{\left(\varphi^+(t) + \sum_{k=1}^{-n_p} A_k \varphi_k(t)\right)} f(t)|dt|, \quad f \in H^p(\rho),$$

$$\left\| \varphi^+(t) + \sum_{k=1}^{-n_p} A_k \varphi_k(t) \right\|_{L^q(\rho^*)} < A\|\varphi\|_{L^q.(\rho^*)}.$$

Для доказательства утверждения а) покажем, что $\psi \equiv 0$, если $\psi \in H^q_+(\rho^*) \oplus h$ и

$$\int_T \overline{\psi(t)} f(t)|dt| = 0, \quad f \in H^p_+(\rho).$$

Пусть $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$, где $\psi_1 \in H^q_+(\rho^*)$, $\psi_2 \in h$. Так как

$$\int_T \overline{\psi_1(t)} f_k(t)|dt| = 0, \quad k = 0, 1, \dots n_p,$$

при $f_k(t) = (1-t)^{-k} \in H^p_+(\rho)$ $(k = 0, 1, \dots n_p)$, то те же равенства верны для ψ_2. Если теперь

$$\psi_2(t) = (1-t)^{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} \frac{A_k}{t^k},$$

то получаем систему линейных однородных уравнений относительно чисел A_k $(k = 1, 2, \dots n_p)$. Эта система имеет только нулевое решение и поэтому $A_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots n_p)$. Тем самым $\psi_2(t) \equiv 0$,

$$\int_T \overline{\psi_1(t)} f(t)|dt| = 0, \quad f \in H^p_+(\rho)$$

и $\psi_1(t) \equiv 0$. Далее, утверждение b) следует ввиду того, что

$$\int_T \overline{(1-t)^{-k}} f(t)|dt| = 0, \quad k = 1, 2, \dots - n_p.$$

4. СВОБОДНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ

4.1. Полагая, что последовательность $\{z_k\}_{k=1}^\infty$, $z_k \in D^+$ удовлетворяет условию Бляшке (1.3) и

$$B(z) = \prod_{k=1}^\infty \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{|z_k|}{z_k}$$

– произведение Бляшке в пространстве $H^p_+(\rho)$ рассмотрим систему рациональных функций

$$r_k(z) = \frac{(1-z_k)^{n_p}}{(1-z)^{n_p}(1-\bar{z}_k z)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.1}$$

Рассмотрим также системы функций

$$\Omega_{nk}(z) = \frac{(1-z)^{n_p}}{z^{n_p}(1-\bar{z}_k)^{n_p}} \frac{B_n(z)}{(z-z_k)B_n'(z_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{4.2}$$

$$\Omega_k(z) = \frac{(1-z)^{n_p}}{z^{n_p}(1-\bar{z}_k)^{n_p}} \frac{B(z)}{(z-z_k)B'(z_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.3}$$

где $B_n(z)$ - конечное произведение Бляшке, составленное по отрезку последовательности $\{z_k\}_{k=1}^n$. Легко проверить, что функции $\Omega_{nk}(z)$ и $\Omega_k(z)$ удовлетворяют интерполяционным данным

$$\Omega_{nk}(z_j) = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, 2, \ldots n,$$
$$\Omega_k(z_j) = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, 2, \ldots$$

Кроме того, системы $\{r_k\}_{k=1}^n$ и $\{\Omega_{nk}\}_{k=1}^n$ таковы, что: a) $r_k \in H^p_+(\rho)$, $\Omega_{nk} \in H^q_+(\rho^*) \oplus h$ и b) они биортогональны на окружности T, т.е.

$$\int_T \overline{r_k(t)}\Omega_{nj}(t)|dt| = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, 2, \ldots n.$$

Лемма 9. *Справедливо равенство*

$$\frac{(1-\zeta)^{n_p}}{(1-z)^{n_p}(1-z\bar{\zeta})} = \sum_{k=1}^n r_k(z)\overline{\Omega_{nk}(z)} + \frac{(1-\zeta)^{n_p}B_n(z)\overline{B_n(\zeta)}}{(1-z)^{n_p}(1-z\bar{\zeta})}. \tag{4.4}$$

Доказательство. (4.4) непосредственно следует умножением равенства

$$\frac{1}{(1-z\bar{\zeta})} = \sum_{k=1}^n r_k(z)\overline{\Big(\frac{B_n(\zeta)}{(\zeta-z_k)B_n'(z_k)}\Big)} + \frac{B_n(z)\overline{B_n(\zeta)}}{(1-z\bar{\zeta})}$$

(см. [3]) на $(1-\zeta)^{n_p}(1-z)^{-n_p}$.

4.2. Для любой последовательности $Z = \{z_k\}_{k=1}^\infty \subset D^+$ удовлетворяющей условию Бляшке, через $L^p(\rho, Z_n)$ обозначим замыкание линейной оболочки системы $\{r_k\}_{k=1}^n$ по норме $H^p_+(\rho)$. Соответственно, через $H^p(\rho, Z)$ обозначим замыкание линейной оболочки системы $\{r_k\}_{k=1}^\infty$. Тогда имеет место

Теорема 7. *Функция $f \in H^p_+(\rho)$ принадлежит подпространству $H^p(\rho, Z)$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_T \frac{f(\zeta)(1-\zeta)^{n_p}}{B(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta = 0, \quad z \in D^+. \tag{4.5}$$

Доказательство. Для $f \in H^p_+(\rho)$, удовлетворяющей (4.5), применим леммы (2.4) и (2.6) и получим, что при любом $z \in D^+$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} c_{nk} r_k(z) + \frac{B_n(z)}{(1-z)^{n_p}} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\zeta)(1-\zeta)^{n_p}}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0, \tag{4.6}$$

где

$$c_{nk} = \frac{1}{2\pi} \int_T f(\zeta)\overline{\Omega_{nk}(\zeta)}|d\zeta|. \tag{4.7}$$

Положив

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\zeta)(1-\zeta)^{n_p}}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D^+,$$

в силу (2.4) будем иметь $F_n \in H^p_+(\widetilde{\rho})$ и $F_n \to F$ в $H^p_+(\widetilde{\rho})$, где

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\zeta)(1-\zeta)^{n_p}}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D^+.$$

Поэтому

$$\frac{B_n(z)}{(1-z)^{n_p}} F_n(z) \to \frac{B(z)}{(1-z)^{n_p}} F(z),$$

в $H^p_+(\rho)$ при $n \to \infty$. Тем самым, второе слагаемое в правой части (4.6) стремится к нулю в $L^p(\rho)$. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} r_k(z) \to f(z)$ в $L^p(\rho)$, и $f \in H^p_+(\rho, Z)$. Для завершения доказательства остается заметить, что функция r_k удовлетворяет условию (4.5) при любом k.

4.3. Полагая, что $f \in H^p_+(\rho)$, обозначим

$$f_B(z) = f(z) - \frac{B(z)}{(1-z)^{n_p}} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\zeta)(1-\zeta)^{n_p}}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

и заметим, что, как легко проверить, f_B удовлетворяет условию (4.2). Тем самым, каждую функцию $f \in H^p_+(\rho)$ можно представлять в виде

$$f(z) = f_B(z) + B(z)\widetilde{f}(z), \quad \widetilde{f} \in H^p_+(\rho).$$

Следовательно, $H^p_+(\rho) = H^p_+(\rho, Z) \oplus BH^p_+(\rho)$. Аналогично,

$$H^p_+(\rho) = H^p_+(\rho, Z_n) \oplus B_n H^p_+(\rho). \tag{4.8}$$

Теорема 8. *Для того, чтобы система функций* $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ *из* (4.1) *была замкнута в* $H^p_+(\rho)$ *необходимо и достаточно, чтобы имело место условие* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|) = \infty$.

Доказательство. Полагая, что $\psi \in (H^p_+(\rho))^*$ и $\int_T \overline{f(t)} r_k(t)|dt| = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, покажем, что $\psi(t) \equiv 0$. Если $\alpha > 0$, то $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$, где $\psi_1 \in H^q_+(\rho^*)$, $\psi_2 \in h$. Далее, так как

$$\int_T \psi_2(t)\overline{r_k(t)}|dt| = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то те же равенства верны и для ψ_1. Это означает, что $\psi_1(z_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Так как $\psi_1 \in H^p(D^+)$ для некоторого $p > 0$, то $\psi_1(z) \equiv 0$. В случае $\alpha \leq 0$ доказательство аналогично.

4.4. Перейдем к свободной интерполяции в весовых пространствах $H^p_+(\rho)$.

Лемма 10. *Пусть $\rho(t) = |1-t|^\alpha \rho_1(t)$, где $\rho_1(t)$ – медленно меняющаяся функция в точке $t = 1$. Тогда при $\alpha - pn_p < 0$ функция $\widetilde{\rho}_p^{1/p}$ одновременно удовлетворяет условиям* (2.2) *и* (2.3).

Доказательство. Из (2.1), следует, что функция $\rho_1(e^{i\theta})|\theta|^{-\delta}$ почти монотонно возрастает в $[-\pi, 0)$ и почти монотонно убывает в $(0, \pi]$ для любого $\delta > 0$. Поэтому

$$\left(M\widetilde{\rho}_p^{1/p}\right)(\theta) < \frac{C}{|\theta|}\rho_1^{1/p}(e^{i\theta})|1 - e^{i\theta}|^{\frac{\alpha - pn_p}{p}}|\theta| = C\widetilde{\rho}_p^{1/p}(\theta).$$

Следовательно, функция $\widetilde{\rho}_p^{1/p}$ удовлетворяет условию (2.2). Аналогично, функция $\widetilde{\rho}_p^{1/p}$ удовлетворяет условию (2.3). Кроме того, справедлива

Теорема 9. *Пусть последовательность $Z = \{z_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию* (1.1) *и, как прежде, $\rho(t) = |1 - t|^\alpha \rho_1(t)$, где $\rho_1(t)$ – медленно меняющаяся функция в точке $t = 1$. Тогда:*

a) *Если $\alpha - pn_p < 0$, то для любой функции $f \in H^p_+(\rho)$ $(p > 1)$*

$$\sum_{k=1}^\infty |f(z_k)|^p |1 - z_k|^{pn_p} |F_\rho(z_k)|^p (1 - |z|^2) < C\|f\|_{H^p_+(\rho)},$$

где C – постоянная, не зависящая от f и

$$F_\rho(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_T \ln\left(\widetilde{\rho}_p^{1/p}(t)\right)\frac{\tau + z}{\tau - z}\frac{d\tau}{\tau}\right\}, \quad z \in D^+.$$

b) *Если $\alpha - pn_p > 0$ и последовательность $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что*

$$\sum_{k=1}^\infty |w_k|^p |1 - z_k|^{pn_p} |F_\rho(z_k)|^p (1 - |z|^2) < \infty,$$

то существует $f \in H^p_+(\rho)$ такая, что $f(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Так как $(1-z)^{n_p}f(z)\in H^p(\widetilde{\rho}_p)$, то в силу (2.6)

$$\sup_{0<r<1}\int_T |f(rt)|^p|1-rt|^{pn_p}\widetilde{\rho}_p(t)|dt| < C\|(1-t)^{n_p}f(t)\|_{L^p(\widetilde{\rho}_p)}.$$

Далее, заметим, что $(1-z)^{n_p}f(z)F_\rho(z)\in H^p_+(D^+)$. Действительно, применяя неравенство Йенсена, получим

$$\int_T |f(rt)|^p|1-rt|^{pn_p}|F_\rho(rt)|^p|dt| < \int_T |f(rt)|^p|1-rt|^{pn_p}\left(\int_T (\widetilde{\rho}_p(\tau))^{1/p}\frac{1-r^2}{|\tau-rt|}|d\tau|\right)^p|dt|.$$

Так как (см. [15])

$$\int_T \widetilde{\rho}_p^{1/p}(\tau)\frac{1-r^2}{|\tau-rt|}|d\tau| < C\left(M\widetilde{\rho}_p^{1/p}\right)(t),$$

где C – постоянная, не зависящая от r, то ввиду леммы 10

$$\int_T \widetilde{\rho}_p^{1/p}(\tau)\frac{1-r^2}{|\tau-rt|}|d\tau| < C\widetilde{\rho}_p^{1/p}(t).$$

Следовательно,

$$\int_T |f(rt)|^p|1-rt|^{pn_p}|F_\rho(rt)|^p|dt| < C\int_T |f(rt)|^p|1-rt|^{pn_p}\widetilde{\rho}_p(t)|dt| = C\|f\|_{L^p(\rho)},$$

и $(1-z)^{n_p}f(z)F_\rho(z)\in H^p_+(D^+)$. Если последовательность Z удовлетворяет условию (1.1), то ввиду (1.2)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(z_k)|^p|1-z_k|^{pn_p}|F_\rho(z_k)|^p(1-|z|^2) < C\big\|(1-z)^{n_p}f(z)F_\rho(z)\big\|_{H^p} < C\|f\|_{L^p(\rho)},$$

что доказывает утверждение а). Пусть теперь последовательность $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию теоремы. Тогда $\{w_k(1-z_k)^{n_p}F_\rho(z_k)\}_{k=1}^{\infty}\in l^p(Z)$, и в силу (1.2) существует $f\in H^p(D^+)$ такая, что

$$f(z_k)=w_k(1-z_k)^{n_p}F_\rho(z_k),\quad k=1,2,\ldots$$

Применив лемму 10, получим $F(z)=(1-z)^{-n_p}f(z)(F_\rho(z))^{-1}\in H^p_+(\rho)$ и $F(z_k)=w_k$ $(k=1,2,\ldots)$.

Лемма 11. *Пусть* $\rho(t)=|1-t|^\alpha\rho_1(t)$, *где* ρ_1 *– медленно меняющаяся функция в точке* $t=1$ *и* $\alpha-pn_p\neq 0$. *Если* $t=1$ *не является точкой сгущения последовательности* Z *и выполнено условие* (1.1), *то* $H^p_+(Z)=l^p(Z)$.

Доказательство. Пусть $\alpha - pn_p < 0$ и $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p(Z)$. Тогда $\{w_k(1-z_k)^{n_p}\}_{k=1}^{\infty} \in l^p(Z)$ и функция

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k (1-z_k)^{n_p} \frac{B(z)}{(z-z_k)B'(z_k)}$$

такова, что $f \in H_+^p(\widetilde{\rho}_p)$ и $f(z_k) = w_k(1-z_k)^{n_p}$ (см. [5]). Следовательно, $(1-z)^{-n_p} f(z) \in H_+^p(\rho)$ и $(1-z_k)^{-n_p} f(z_k) = w_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тем самым, при $\alpha - pn_p < 0$ лемма следует из утверждения a) теоремы 9.

Пусть теперь $\alpha - pn_p > 0$. Тогда ввиду утверждения b) теоремы 2.6 достаточно показать, что для любой функции $f \in H_+^p(\rho)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(z_k)|^p (1-|z|^2) < C\|f\|_{L^p(\rho)}, \tag{4.9}$$

где C – постоянная, не зависящая от f. Так как $(1-z)f(z) \in H_+^p(\widetilde{\rho}_p)$, то по формуле (4.6)

$$\begin{aligned}(1-z)f(z) &= \sum_{k=1}^{n} (1-z_k)^{n_p} f(z_k) \frac{B_n(z)}{(z-z_k)B_n'(z_k)} \\ &+ \frac{B_n(z)}{2\pi} \int_T \frac{f(w)(1-w)^{n_p}\overline{B_n(w)}}{1-\overline{w}z} |dw|.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Пусть $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q(Z)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |w_k|^q (1-|z|^2) < 1$. Тогда

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \frac{B_n(z)}{(z-z_k)B_n'(z_k)} \in H_+^p(\widetilde{\rho}_p)$$

и $\|g\|_{L^p(\widetilde{\rho}_p)} < C$, где C – постоянная, не зависящая от $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$. Умножив обе стороны равенства (4.9) на $g(t)\overline{B(t)}$ и проинтегрировав, получим

$$\int_T (1-t)^{n_p} \frac{f(t)g(t)}{B_n(t)} |dt| = \sum_{k=1}^{n} (1-z_k)^{n_p} \frac{f(z_k)g(z_k)}{\pi_{nk}} (1-|z_k|^2) + \int_T g(t)F_n(t)|dt|,$$

где

$$F_n(z) = 2\pi \int_T \frac{f(w)(1-w)^{n_p}\overline{B_n(w)}}{1-\overline{w}z} |dw|.$$

Далее, так как $\inf \pi_{nk} > 0$, то в силу (2.4) $|\sum\limits_{k=1}^{n} f(z_k) w_k (1-|z_k|^2)| < C\|f\|_{L^p(\rho)}$, где C – постоянная, не зависящая от $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 10. *Пусть последовательность $Z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (1.1), $\rho(t) = |1-t|^{\alpha}\rho_1(t)$, где $\rho_1(t)$ медленно меняющаяся функция в точке $t = 1$. Если $t = 1$ не является точкой сгущения последовательности Z, то система*

$\{r_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ (4.1) *является безусловным базисом в* $H_+^p(\rho, Z)$, *т.е. при любом* $f \in H_+^p(\rho, Z)$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) r_k(z),$$

где ряд сходится в $H_+^p(\rho)$ *и* $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(t)\overline{\Omega_k(t)}|dt|$.

Доказательство. Для любой функции $f \in H_+^p(\rho)$ положим

$$F_n(z) = \frac{B_n(z)}{(1-z)^{n_p}} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\zeta)(1-\zeta)^{n_p}}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$
$$F(z) = \frac{B(z)}{(1-z)^{n_p}} \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\zeta)(1-\zeta)^{n_p}}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Так как $f(\tau)(1-\tau)^{n_p} \in L^p(\widetilde{\rho}_p)$ и $\rho \in A_{\alpha p}$, то $\|F_n - F\|_{L^p(\rho)} \to 0$ при $n \to \infty$. Если $f \in H_+^p(\rho, Z)$, то $\|F_n\|_{L^p(\rho)} \to 0$ при $n \to \infty$. В силу же (4.6)

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_{nk} r_k(z) - f(z) \right\|_{L^p(\rho)}. \tag{4.11}$$

Далее, ввиду (4.2) и (4.3)

$$c_k(f) = \frac{\widetilde{f}(\bar{z}_k)}{\pi_k}(1 - |z_k|^2), \quad c_{nk}(f) = \frac{\widetilde{f_n}(\bar{z})\widetilde{B}_n(\bar{z}_k)}{\pi_k}(1 - |z_k|^2),$$

где

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(1/t)(1-t)^{n_p}}{t^{n_p+1}(t-z)} \overline{B\left(\frac{1}{t}\right)} dt,$$
$$\widetilde{f}_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(1/t)(1-t)^{n_p}}{t^{n_p+1}(t-z)} \overline{B_n\left(\frac{1}{t}\right)} dt$$

и $\widetilde{B}_n(z) = B(z)/B_n(z)$. Тем самым,

$$c_k(f) - c_{mk}(f) = \frac{1 - |z_k|^2}{\bar{\pi}_k (1 - z_k)^{n_p}} \left[\widetilde{f}(\bar{z}_k) - \widetilde{B}_m(\bar{z}_k) \widetilde{f}_m(\bar{z}_k) \right], \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.12}$$

Далее, учитывая (4.12) будем иметь

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_{nk}(f) r_k(z) - \sum_{k=1}^{n} c_k(f) r_k(z) \right\|_{L^p(\rho)}$$
$$= \sup_{\|g\|_{L^q(\rho^*)}} \left| \int_T \sum_{k=1}^{n} \overline{(c_{nk}(f) - c_k(f)) r_k(t)} g(t) |dt| \right|$$
$$< \sum_{k=1}^{n} \left| \widetilde{f}(\bar{z}_k) - \widetilde{B}_n(\bar{z}_k) \widetilde{f}_n(\bar{z}_k) \right| |G(z_k)| (1 - |z_k|^2)$$
$$< \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \widetilde{f}(\bar{z}_k) - \widetilde{B}_n(\bar{z}_k) \widetilde{f}_n(\bar{z}_k) \right|^p (1 - |z_k|^2) \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |G(z_k)|^q (1 - |z_k|^2) \right)^{1/q},$$

где

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{g(t)t^{n_p}}{(1-t)^{n_p}}\frac{dt}{t-z}.$$

В силу лемм 7 и 11,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}c_{nk}(f)r_k(z)-\sum_{k=1}^{n}c_k(f)r_k(z)\right\|_{L^p(\rho)}<C\|\widetilde{f}-\widetilde{B}_n\widetilde{f}_n\|_{L^p(\rho)},$$

где C – постоянная, не зависящая от n. Так как

$$\lim_{m\to\infty}\|\widetilde{f}-\widetilde{B}_m\widetilde{f}_m\|_{L^p(\rho)}=0,$$

то, учитывая (4.11), заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}c_k(f)r_k-f\right\|_{L^p(\rho)}=0.$$

Abstract. The paper considers the free interpolation problem in the Hardy weighted space $H^p(\rho)$. It is assumed that the weight ρ has unique singularity of the order αonly at the point 1. Particularly, for $\alpha-p[(\alpha+1)p^{-1}]>0$ the corresponding free interpolation problem is stated and its solvability is proved.

Список литературы

[1] L. Carleson, "Interpolation by Bounded Analytic Functions and the Corona Problem", Ann. Math., **76** (3) 547-559 (1962).
[2] H. S. Shapiro, A. L. Shields, "On Some Interpolation Problems for Analytic Functions", Amer. J. Math., **83** (3) 513-532 (1961).
[3] М. М. Джрбашян, "Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши", Изв. АН Арм. ССР., сер. мат., **7** (5) 384-409 (1973).
[4] М. М. Джрбашян, "Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H^2", Изв. АН Арм. ССР., сер. мат., **9** (5) 339-373 (1974).
[5] Г. М. Айрапетян, "Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах H^p Харди", Изв. АН Арм. ССР., сер. мат., **12** (4) 262-277 (1977).
[6] В. Э. Кацнельсон, "Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов", Функц. анализ и его прил. , **1** (2) 39-51 (1967).
[7] Н. К. Никольский, Б. С. Павлов, "Базисы из собственных векторов вполне неунитарных сжатий и характеристическая функция", Изв. АН СССР, сер. Мат., **34** (1) 90-133 (1970).
[8] Г. М. Айрапетян, "О базисе рациональных функций в пространствах Харди H^p $(1<p<\infty)$", Изв. АН Арм. ССР., сер. мат., **8** (6) 429-450 (1973).
[9] С. А. Виноградов, В. П. Хавин, "Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций", Зап.науч. семин. ЛОМИ, **47**, 15-54 (1974).
[10] В. И. Васюнин, "Базисы из рациональных функций и кратная интерполяция", Зап.науч. семин. ЛОМИ, **56**, 174-176 (1976).
[11] Г. М. Айрапетян, "О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области", Изв. АН Арм. ССР., сер. мат., **10** (2) 133-152 (1975).
[12] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига* (Наука, Москва, 1980).
[13] Г. М. Айрапетян, М. С. Айрапетян, "Граничная задача Гильберта в весовых пространствах", Изв. НАН Армении, Математика, **43** (2) 85-99 (2008).

[14] К. Казарян, И. Спитковский, Ф. Сориа, "Краевая задача Римана в пространствах с весом", ДАН России, **357** (6) 717-719 (1997).

[15] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции* (Мир, Москва,1984).

[16] K. S. Kazaryan, "Weighted Norm Inequalities for Some Classes of Singular Integrals", Studia. Math., **86**, 97-130 (1987).

[17] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции* (Наука, Москва, 1985).

[18] Г. М. Айрапетян, "Задача Дирихле в весовых пространствах", Изв. НАН Армении, Математика, **36** (3) 22-44 (2001).

Поступила 21 октября, 2009