

СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ В ТЕОРИИ ФАКТОРИЗАЦИИ М. М. ДЖРБАШЯНА И ПРИЛЕЖАЩИХ ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА

А. М. ДЖРБАШЯН, В. С. ЗАХАРЯН

Институт математики, НАН Армении
Государственный Инженерный Университет Армении
E-mail: armen_jerbashian@yahoo.com, uzakarian@comcast.net

Аннотация. В этой обзорной статье даны концепция, предыстория и результаты, лежащие в основе исследований в области теории факторизации М. М. Джрбашяна и прилежащих задачах анализа. Кроме того, отмечены некоторые приложения и приведены результаты, определяющие и выявляющие направления дальнейших, современных исследований.

Авторы статьи благодарны Ф. А. Шамояну и А. О. Карапетяну за ценные замечания по кругу рассмотренных ими задач.

1. КОНЦЕПЦИЯ И ПРЕДЫСТОРИЯ

1.1. Общая концепция. Если дробный интеграл от регулярной функции (который “лучше” начальной функции) достаточно “хорош”, чтоб иметь интегральное представление с ядром Пуассона или Коши по мере ограниченной вариации, то представление первоначальной функции может быть получено применением обратного оператора, т.е. дробного дифференцирования. Представление, получающееся в результате будет несколько “хуже”, ибо будет содержать производную ядра.

Обратное рассуждение настолько же естественно и ведет к представлениям функции, дробная производная которой достаточно “хороша”, чтобы допускать интегральное представление. Тогда, применение обратного оператора, т.е. дробного интегрирования приводит к “хорошему” представлению с дробным интегралом ядра. Функция, представимая в некоторой области интегралом, особенность ядра которого интегрируема, может обладать “хорошими” граничными свойствами.

Это, по существу, основная концепция теории весовых классов и пространств функций, ассоциированных с дробным интегро-дифференцированием. Она, начиная с 1945 г., лежала в основе многих работ М. М. Джрбашяна, которые в конечном итоге привели к теории факторизации и граничных свойств классов $N\{\omega\}$ типа Неванлинны в $|z| < 1$, построенной им и одним из авторов данной статьи [23, 34]. Классы $N\{\omega\}$ могут быть произвольно широки и содержать неванлинновский класс N (случай представлений с “плохими” ядрами), или содержаться в N и иметь “хорошие” граничные свойства (благодаря представлениям с “хорошими” ядрами).

1.2. Первоначальные результаты. Первоначальные, основополагающие результаты М. М. Джрбашяна 1945г. (см. [15], а также подробную, дополненную версию [16] этой работы от 1948г.), были посвящены исследованию весовых классов и пространств, определенных условием ограниченности дробного интеграла от интегрального среднего или неванлинновской характеристики рассматриваемой голоморфной или мероморфной функции в $|z| < 1$. То есть классов

$$(1.1) \quad \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} T(r, f) dr = \sup_{0 < r < 1} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} T(rt, f) dt < \infty \quad (\alpha > 0),$$

где $T(r, f)$ - неванлинновская характеристика роста, и их естественных подмножеств - пространств

$$(1.2) \quad \begin{aligned} A_\alpha^p (\alpha > 0) : & \iint_{|\zeta| < 1} (1-|\zeta|)^{\alpha-1} |f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \\ & = \sup_{0 < r < 1} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t dt \int_0^{2\pi} |f(tr e^{i\vartheta})|^p d\vartheta < +\infty, \end{aligned}$$

где $\sigma(\zeta)$ - мера Лебега по площади круга и $p \geq 1$.¹

Работами [15, 16] была заложена основа для дальнейшего построения теории факторизации в $|z| < 1$. Главной целью этих работ было усиление результата Р. Неванлинны (см. [11], раздел 216) о плотности множеств нулей и полюсов мероморфных классов (1.1), т.е. утверждения, о том, что *если мероморфная функция*

¹Отметим, что пространства A_α^p (в другом обозначении, $B_\delta(\alpha)$, или $H^p(\alpha)$) очевидно являются естественными подмножествами в неванлинновском весовом классе (1.1), ровно настолько, насколько пространства Харди H^p в классе Неванлинны N . Кроме того, отметим, что для целостности изложения здесь и в дальнейшем α часто заменено на $\alpha - 1$.

$f(z)$ удовлетворяет условию (1.1), то последовательности ее нулей $\{a_k\}$ и полюсов $\{b_n\}$, пронумерованных с учетом кратностей, таковы, что

$$(1.3) \quad \sum_{|a_k| < 1} (1 - |a_k|)^{1+\alpha} < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{|b_n| < 1} (1 - |b_n|)^{1+\alpha} < +\infty.$$

В [15, 16] получена каноническая факторизация неванлинновского весового класса (1.1), содержащая некоторые произведения типа Бляшке и, в экспоненте, интеграл от $\log |F(z)|$ по поверхности круга. А именно, установлена

Теорема 1. *Если мероморфная в $|z| < 1$ функция $F(z)$ удовлетворяет условию (1.1) при каком-либо значении $\alpha > 0$, то условие плотности (1.3), имеющее место для нулей и полюсов функции $F(z)$, обеспечивает сходимость в $|z| < 1$ произведений типа Бляшке вида*

$$(1.4) \quad \pi_\alpha(z, \{\zeta_m\}) = \prod_m \exp \left\{ - \int_{|\zeta_m|^2}^1 \frac{(1-t)^\alpha}{\left(1 - \frac{z}{\zeta_m} t\right)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \right\},$$

где $\{\zeta_m\} \equiv \{a_k\}$ или $\{\zeta_m\} \equiv \{b_n\}$. Каждый фактор произведения - голоморфная в $|z| < 1$ функция с единственным, простым нулем в точке $z = \zeta_m$. Кроме того, имеет место каноническая факторизация

$$(1.5) \quad F(z) = \frac{k_\alpha}{C_\lambda} z^\lambda \frac{\pi_a(z, \{a_k\})}{\pi_\alpha(z, \{b_n\})} \times \exp \left\{ \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2)^{\alpha-1} \frac{\log |F(\rho e^{i\vartheta})|}{(1 - z \rho e^{-i\vartheta})^{1+\alpha}} \rho d\rho d\vartheta \right\},$$

где C_λ - первый ненулевой коэффициент разложения Лорана функции $F(z)$ в окрестности начала координат и

$$k_\alpha = \exp \left\{ 4\lambda\alpha \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha-1} t \log \frac{1}{t} dt \right\}.$$

Это усиление результата Р. Неванлинны побудило многих математиков называть классы мероморфных функций (1.1), а также другие, подобные (1.1) классы, исследованные М. М. Джрбашяном в дальнейшем, *классами Неванлинны - Джрбашяна*.

Отметим, что значительно позже произведения (1.4) были переоткрыты М. Цудзи (см. [157], глава IV), для натуральных значений $\alpha = 1, 2, \dots$

Позже, Ф. А. Шамояном [56] было доказано некоторое неравенство для произведений π_α , переходящее в неравенство, доказанное Цудзи для этих произведений в случае, когда $\alpha = 0, 1, 2, \dots$. На основе этого, в [56] было установлено, что

условие (1.3) полностью характеризует плотность нулей и полюсов мероморфных функций из неванлинновского класса (1.1). Более того, в [56] было доказано, что замена параметра α на $\beta > \alpha$ в правой части факторизации (1.5) превращает эту факторизацию в представление, где все факторы принадлежат тому же классу (1.1).

Кроме упомянутого усиления результата Р. Неванлинны, в работах [15, 16] М. Джрбашяна содержится анализ пространств A_α^p ($\alpha > 0$, $1 \leq p < +\infty$) голоморфных в единичном круге функций, удовлетворяющих условию (1.2). Там были найдены сразу два канонических представления для общих, весовых банаховых пространств A_α^p . А именно, была установлена

Теорема 2. *Если $f(z) \in A_\alpha^p$ ($\alpha > 0$, $1 \leq p < +\infty$), то в $|z| < 1$ справедливы интегральные представления:*

$$(1.6) \quad f(z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2)^{\alpha-1} \frac{f(\rho e^{i\vartheta})}{(1 - z\rho e^{-i\vartheta})^{1+\alpha}} \rho d\rho d\vartheta$$

$$(1.7) \quad = -\overline{f(0)} + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2)^{\alpha-1} \frac{\operatorname{Re} f(\rho e^{i\vartheta})}{(1 - z\rho e^{-i\vartheta})^{1+\alpha}} \rho d\rho d\vartheta.$$

Работа [16] содержит также исследование плотности нулей функций $f(z) \in A_\alpha^p$, что приводит к теоремам единственности в этих классах.² Далее, найден изометрический оператор между A_α^2 и пространством Харди H^2 в $|z| < 1$, который вместе со своим обратным задается в явном, интегральном виде. Далее, в пространствах A_α^2 установлены теоремы о полноте систем рациональных функций и интерполяции. Затем исследованы обобщения известных пространств Фока - гильбертовых пространств целых функций, вводимых условием

$$(1.8) \quad M_2(\sigma, \alpha) : \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^\alpha} \rho^{\alpha-1} |f(\rho e^{i\vartheta})|^2 d\rho d\vartheta < \infty, \quad 0 < \sigma, \alpha < \infty.$$

А именно, установлено, что любая целая функция $f(z) \in M_2(\sigma, \alpha)$ ($0 < \sigma, \alpha < +\infty$) допускает интегральное представление

$$(1.9) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\sigma\rho^\alpha} \rho^{\alpha-1} f(\rho e^{i\vartheta}) E_{\sigma,\alpha}(z\rho e^{-i\vartheta}) d\rho d\vartheta, \quad |z| < \infty,$$

где ядро - целая функция типа Миттаг-Леффлера

$$(1.10) \quad E_{\sigma,\alpha}(z) = \sigma\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2n/\alpha}}{\Gamma(1 + 2n/\alpha)} z^n, \quad |z| < 1,³$$

²Некоторые результаты о плотности нулей функций классов A_α^p даны также в гл. 4 [127].

³здесь мы придерживаемся обозначения, примененного в [16] от 1948г.

порядка $\alpha/2$ и типа σ . Установлено также, что функции классов $M_2(\sigma, \alpha)$ обладают порядком $< \alpha$ и типом $\leq \sigma/2$, что формулой (1.9) с подынтегральной функцией $F(z)$ из лебегова пространства $L_{\sigma, \alpha}$, определенного только условием (1.8), без требования о голоморфности, задается ортогональный проектор $L_{\sigma, \alpha}^2 \mapsto M_2(\sigma, \alpha)$. Затем исследована плотность нулей функций классов $M_2(\sigma, \alpha)$ и доказаны теорема единственности и теорема о полноте в $M_2(\sigma, \alpha)$ некоторых ортогональных систем целых функций.

2. ТЕОРИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ И ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ МЕРОМОРФНЫХ В $|z| < 1$

Применение нового подхода с дробным интегро-дифференцированием привело (см. [17], гл. IX, а также [18, 19, 23, 32, 33]) к теории факторизации и граничных свойств классов $N\{\omega\}$ неванлинновского типа, которые зависят от функции-параметра $\omega(x)$, заданной в $[0, 1)$. *Объединение этих классов совпадает уже со множеством всех функций, мероморфных в $|z| < 1$* , что и побудило применять в обозначениях последнюю букву греческого алфавита ω . Эта теория в законченной и дополненной форме дана в книге М. М. Джрбашяна и В. С. Захаряна [34].

2.1. Классы $N\{\omega\}$. Введем обозначения, необходимые для изложения основных результатов, относящихся к классам $N\{\omega\}$. В этом и последующем пунктах, если не будет оговорено иное, то будем полагать, что функция $\omega(x) > 0$ непрерывна в $[0, 1)$, $\omega(0) = 1$, а также, что

$$\int_0^1 \omega(x) dx < +\infty \quad \text{и} \quad |\omega(x) - 1| \leq Kx, \quad 0 \leq x < \delta,$$

при некоторых $K > 0$ и $\delta \in (0, 1)$. Далее, отметим, что

$$(2.1) \quad C_\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}, \quad S_\omega(z) = 2C_\omega(z) - C_\omega(0) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k},$$

где

$$(2.2) \quad \Delta_k = - \int_0^1 x^k d\omega(x) = k \int_0^1 x^{k-1} \omega(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- введенные в [18] ядра типа Коши и Шварца, которые голоморфны в $|z| < 1$ благодаря соотношению

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\Delta_k} = 1,$$

следующему из свойств функции $\omega(x)$. Причем, в случае $\omega(x) \equiv 1$ эти функции переходят в обычные ядра Коши и Шварца

$$(2.3) \quad C(z) = \frac{1}{1-z}, \quad S(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

а если $\omega(x)$ не убывает в $[0, 1)$, то $\operatorname{Re} C_\omega(z) \geq 0$ и $\operatorname{Re} S_\omega(z) \geq 0$ в $|z| < 1$. Обобщенный оператор Римана-Лиувилля формально определяется следующим образом:

$$(2.4) \quad L_\omega u(z) = -\frac{d}{d|z|} \left\{ |z| \int_0^1 u(tz) dp(t) \right\}, \quad p(t) = t \int_t^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx, \quad p(0) = 1.$$

В случае $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ этот оператор переходит в интегро-дифференцирование Римана-Лиувилля:

$$L_\omega u(z) \Big|_{\omega(r)=(1-r)^\alpha} = \alpha \int_0^{|z|} (|z| - t)^{\alpha-1} u(te^{i \arg z}) dt \equiv \Gamma(1+\alpha) |z|^{-\alpha} D^{-\alpha} u(z).^4$$

Как нетрудно убедиться, применение оператора L_ω к какой-либо функции $f(z)$, голоморфной в окрестности начала координат, означает умножение коэффициентов степенного ряда $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ на величины Δ_k , что не меняет радиус сходимости, т.е.

$$L_\omega f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Delta_k z^k.$$

При этом, если $\omega(x) \equiv 1$, то оператор L_ω - тождественный, а в общем случае этот оператор является взаимоднозначным соответствием в классе голоморфных в $|z| < 1$ функций. Применение же обратного оператора суть деление коэффициентов степенного ряда функции на величины Δ_k , что опять же не меняет радиус сходимости⁵. В частности, оператор L_ω переводит ядра $C_\omega(z)$ и $S_\omega(z)$ в обычные ядра Коши и Шварца (2.3).

На основании сказанного следует теорема типа Герглотца-Рисса о представлении класса голоморфных в $|z| < 1$ функций $f(z)$, для которых $L_\omega \operatorname{Re} f(z) \geq 0$ в $|z| < 1$, посредством интегралов с ядром $\operatorname{Re} S_\omega(z)$ и неотрицательных, ограниченных мер на $[0, 2\pi]$. Другой основной предпосылкой для факторизации классов $N\{\omega\}$ являются новые ω -произведения, не совпадающие с (1.4) при $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ и переходящие в обычные произведения Бляшке при $\omega(x) \equiv 1$.

⁴Здесь и далее обозначение $L^{(\omega)}$ заменено на L_ω .

⁵Отметим, что теоремой 8 работы [18] установлено, что если $\omega(x) \nearrow$ (т.е. монотонно не убывает на $[0, 1)$), то обратный к L_ω оператор - суть интегральный оператор, по природе близкий к операторам L_ω с $\omega(x) \searrow$ (т.е. монотонно невозрастающими на $[0, 1)$).

Теорема 3. 1°. При любом ζ таком, что $|\zeta| < 1$, функция

$$(2.5) \quad A_\omega(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\omega(z e^{-i\vartheta}) L_\omega \log \left| 1 - \frac{e^{i\vartheta}}{\zeta} \right| d\vartheta \right\}$$

голоморфна в $|z| < 1$, где имеет единственный, простой нуль в точке $z = \zeta$. При этом

$$|A_\omega(z, \zeta)| \leq |A_\omega(z, \zeta)|_{\omega \equiv 1} = \left| \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \frac{|\zeta|}{\zeta} \right|, \quad |z| < 1,$$

если $\omega(x)$ монотонно не убывает на $[0, 1)$.

2°. При любом ζ таком, что $|\zeta| < 1$, функция $L_\omega \log |A_\omega(z, \zeta)|$ непрерывно продолжается во всю комплексную плоскость, кроме луча $\{t\zeta : 1 \leq t < +\infty\}$, и $L_\omega \log |A_\omega(r e^{i\vartheta}, \zeta)| \in L(0, 2\pi)$ при любом $r > 0$.

3°. Если $\{z_k\}$ - последовательность точек из $|z| < 1$, то произведение

$$(2.6) \quad B_\omega(z, \{z_k\}) = \prod_k A_\omega(z, z_k)$$

сходится в $|z| < 1$ и представляет там голоморфную функцию с нулями $\{z_k\}$ в том и только том случае, когда

$$(2.7) \quad \sum_k \int_{|z_k|}^1 \omega(x) \frac{dx}{x} < +\infty.$$

Отщеплением нулей $\{a_k\}$ и полюсов $\{b_n\}$ мероморфной в $|z| < 1$ функции $F(z)$ в круге $|z| < \rho < 1$ посредством приведенных произведений и, далее, применением интегрального представления с ядром $S_\omega(z)$ для логарифма от модуля функции без нулей и полюсов в круге $|z| < \rho$ устанавливается формула типа Пуассона-Иенсена. Затем, подстановка $z = 0$ приводит к формуле типа Иенсена-Неванлинны, порождающей характеристики типа Неванлинны и соотношение равновесия между ними. А именно, характеристики

$$m_\omega(\rho, F) \equiv m_\omega(\rho, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [L_\omega \log |F(\rho e^{i\vartheta})|]^+ d\vartheta,$$

$$m_\omega(\rho, 1/F) \equiv m_\omega(\rho, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [L_\omega \log |F(\rho e^{i\vartheta})|]^- d\vartheta,$$

где, как обычно $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x = x^+ - x^-$, и

$$N_\omega(\rho, F) = \int_0^\rho \frac{n(t, F) - n(0, F)}{t} \omega\left(\frac{t}{\rho}\right) dt + n(0, F) \{\ln \rho - K_\omega\},$$

$$N_\omega(\rho, 1/F) = \int_0^\rho \frac{n(t, 1/F) - n(0, 1/F)}{t} \omega\left(\frac{t}{\rho}\right) dt + n(0, 1/F) \{\ln \rho - K_\omega\},$$

где $n(t, F)$ - количество полюсов функции $F(z)$ в замкнутом круге $|z| \leq t$,

$$K_\omega = \int_0^1 (1 - \omega(x))x^{-1}dx,$$

и

$$T_\omega(\rho, F) = m_\omega(\rho, F) + N_\omega(\rho, F), \quad T_\omega(\rho, 1/F) = m_\omega(\rho, 1/F) + N_\omega(\rho, 1/F).$$

Соотношение же равновесия имеет вид

$$T_\omega(\rho, F) = \log |c_\lambda| + T_\omega(\rho, 1/F), \quad 0 < \rho < 1,$$

где c_λ - первый ненулевой коэффициент разложения Лорана функции $F(z)$ в окрестности начала координат.

Условием ограниченности характеристики T_ω вводятся классы $N\{\omega\}$ мероморфных в $|z| < 1$ функций:

$$N\{\omega\} : \sup_{0 < \rho < 1} T_\omega(\rho, F) < +\infty.$$

При этом

$$\begin{aligned} N\{\omega\} &\subseteq N, & \text{если } \omega(x) \nearrow & \quad (\text{монотонно неубывающая функция}), \\ N\{\omega\} &\supseteq N, & \text{если } \omega(x) \searrow & \quad (\text{монотонно невозрастающая функция}). \end{aligned}$$

Устремлением $\rho \rightarrow 1 - 0$ в формуле типа Пуассона-Иенсена доказывается

Теорема 4. 1°. Класс $N\{\omega\}$ совпадает со множеством функций, допускающих в $|z| < 1$ представление

$$(2.8) \quad F(z) = e^{i\gamma + K_\omega} z^\gamma \frac{B_\omega(z, \{a_k\})}{B_\omega(z, \{b_n\})} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\omega(ze^{-i\vartheta}) d\psi(\vartheta) \right\},$$

где $\text{Im } \gamma = 0$, λ - целое число, $B_\omega(z, \{a_k\})$ и $B_\omega(z, \{b_n\})$ - сходящиеся произведения типа Бляшке, а $\psi(\vartheta)$ - функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$.

2°. Если $F(z) \in N\{\omega\}$, то имеет место аналог формулы обращения Стильтеса - почти для всех $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$

$$\psi(\vartheta) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_0^\vartheta L_\omega \log |F(re^{it})| dt.$$

Отметим, что в отличие от факторизации (1.5) класса (1.1), все множители факторизации (2.8) принадлежат классу $N\{\omega\}$. Следует отметить, что при

$\omega(x) \searrow$ любая функция класса $N\{\omega\}$ представима в виде частного от двух голоморфных функций $f_{1,2}(z)$ таких, что $L_\omega \log |f_{1,2}(z)| \leq 0$ в $|z| < 1$, а L_ω становится тождественным оператором, если $\omega(x) \equiv 1$. В этом смысле функции класса $N\{\omega\}$ естественно называть функциями ω -ограниченного вида.

Далее, нетрудно видеть, что при дополнительных, не существенных ограничениях на $\omega_1(x)$, соотношение

$$\omega_2(x) = \int_x^1 (1-t)^{\varepsilon-1} \omega_1\left(\frac{x}{t}\right) dt, \quad 0 \leq x < 1, \quad \varepsilon > 0,$$

обеспечивает разложимость $L_{\omega_2} = L_{\omega_1} L_{(1-t)^\varepsilon} = L_{(1-t)^\varepsilon} L_{\omega_1}$, и, тем самым, вложение $N\{\omega_1\} \subseteq N\{\omega_2\}$ для любых, сколь угодно широких классов.

Однако, предполагалось [25, 26], что путь к решению проблемы вложения классов $N\{\omega\}$ пролегает через решение некоторой проблемы моментов Хаусдорфа, разрешимость которой обеспечивает как разложение оператора L_{ω_2} в произведение подобных ему операторов, так и вложение $N\{\omega_1\} \subseteq N\{\omega_2\}$. По выдвинутой гипотезе [25, 26], эта проблема моментов должна была быть разрешимой, если отношение ω_1/ω_2 монотонно не убывает. Позднее, отмеченная гипотеза была подтверждена И. В. Островским [165] при более сильных предположениях относительно поведения функций ω_1 и ω_2 . Там же было доказано, что замена этих предположений неубыванием отношения ω_1/ω_2 может привести к противоречию. Однако, результат [165] приводит лишь к теореме о вложении классов $N\{\omega\}$, содержащихся в неванлинновском классе N , т.е. к частичному решению задачи. Отметим, что к тому же кругу задач относится работа [88].

В заключение этого пункта отметим, что М. М. Джрбашяном [24, 20] установлены также результаты о факторизации аналогичных $N\{\omega\}$ классов целых мероморфных функций, исчерпывающих множество всех целых мероморфных функций (см. также [26], стр. 522-526).

2.2. Некоторые тонкие свойства функций классов $N\{\omega\}$. В этом пункте изложены результаты совместных работ М. М. Джрбашяна, В. С. Захаряна [29, 30, 31, 32, 33], а также В. С. Захаряна и его учеников [44] - [52], которые подытожены и дополнены в книге [34].

А. Для изложения результатов, относящихся к граничным свойствам классов $N\{\omega\} \subset N$ напомним определение ω -емкости [34], превращающейся в хорошо известную α -емкость О. Фростмана в специальном случае, когда $\omega(x) = (1-x)^\alpha$

($-1 < \alpha < 0$). Полагая, что функция $\omega(x)$ монотонно не убывает в $[0, 1]$, говорится, что борелево множество $E \subset [0, 2\pi]$ обладает положительной ω -емкостью, если существует неотрицательная мера $\mu \prec E$ (т.е. сосредоточенная на E), для которой

$$(2.9) \quad \sup_{|z| \leq 1} \int_0^{2\pi} |C_\omega(z e^{-i\vartheta})| d\mu(\vartheta) < +\infty.$$

В противном случае (т.е. когда интеграл (2.9) не ограничен при любом $\mu \prec E$) говорится, что E обладает нулевой ω -емкостью.

Теорема 5. [34] Пусть функция $\omega(x)$ монотонно не убывает на $[0, 1]$, и, тем самым, $N\{\omega\} \subset N$.

- 1°. Если $F(z) \in N\{\omega\}$, то для всех значений $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, кроме, быть может, множества нулевой ω -емкости, существует конечное угловое предельное значение $F(e^{i\vartheta}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\vartheta}} F(z)$.
- 2°. Если функция $F(z) \in N\{\omega\}$ голоморфна в $|z| < 1$ и $F(e^{i\vartheta}) = 0$ для ϑ из множества положительной ω -емкости, то $F(z) \equiv 0$.

Кроме этого результата, в книге [34] дан анализ других тонких свойств функций классов $N\{\omega\}$, в том числе, в случае, когда $\omega(x) = (1-x)^\alpha$. Для таких классов используется обозначение N_α , а для соответствующих произведений типа Бляшке - $B_\alpha(z, \{z_k\})$. Отметим, что теория классов N_α в менее полной форме дана в гл. IX монографии [17].

В. Пусть, в дополнение к ограничениям пункта 2.1, функция $\omega(x) \nearrow$ такова, что для любых $0 \leq x' \leq x'' < \Delta < 1$

$$|\omega(x') - \omega(x'')| \leq K |x' - x''|,$$

где $K \equiv K(\Delta)$ - постоянная. Тогда, если последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ из $\{|z| < 1\}$ такова, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^1 \omega(x) dx < +\infty$$

и для данного $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$(2.10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|e^{i\varphi} - z_k|} \int_{|z_k|}^1 \omega(x) dx < +\infty,$$

то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} L_\omega \log |B_\omega(r e^{i\varphi}, \{z_k\})| = 0.$$

При этом, соотношение (2.10) имеет место для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$ кроме, быть может, множества нулевой $\omega \equiv 1$ - емкости Фростмана. Более того, доказано, что (2.10) имеет место для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$, кроме, быть может, множества $E \subset [0, 2\pi]$ нулевой h -меры Хаусдорфа, для любой функции меры $h(r)$ (т.е. непрерывной, вещественной, неубывающей и такой, что $r^{-2}h(r)$ не убывает при $r \rightarrow +0$ и $h(0) = 0$), подчиненной условию

$$\sum_{\delta_k \leq 1} \delta_k \int_{\delta_k}^1 \frac{h(r)}{r^2} dr < +\infty, \quad \delta_k \equiv \int_{|z_k|}^1 \omega(x) dx.$$

С. Говорят, что голоморфная в круге $|z| < 1$ функция имеет *конечное радиальное изменение в точке $e^{i\varphi}$* , если радиус круга с концом в $e^{i\varphi}$ этой функцией отображается на спрямляемую кривую. Ясно, что конечность радиального изменения функции в данной точке обеспечивает существование конечного радиального предела функции в точке $e^{i\varphi}$.

В [34] установлено, что если для последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ из $\{|z| < 1\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - |z_k|}{|e^{i\varphi} - z_k|} \right)^{1+\alpha} < +\infty$$

при каких-либо $\alpha \in (-1, 0)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$, то произведение $B_\alpha(z, \{z_k\})$ имеет конечное радиальное изменение в точке $e^{i\varphi}$. Если же последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ из $|z| < 1$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < +\infty$$

с $\alpha \in (-1, 0)$, то произведение $B_\alpha(z, \{z_k\})$ имеет конечное радиальное изменение всюду на $[0, 2\pi]$ кроме, быть может, множества нулевой $1+\alpha$ -емкости Фростмана.

Отметим также работы [83, 84], выявляющие несколько иные граничные свойства как произведений B_α , так и других, родственных функций.

Д. В книге [34] исследовано также распределение значений в подклассах классов $N_\alpha \subset N$ ($-1 < \alpha < 0$), состоящих из голоморфных, ограниченных функций. Доказано, что распределение любых значений a , кроме, быть может, множества нулевой емкости, характеризуется условием плотности

$$\sum_n (1 - |r_n(a)|)^{1+\beta} < +\infty, \quad \beta > \alpha,$$

множества a -точек $\{r_n(a)\}$ функции из рассматриваемого подкласса, которое сколь угодно близко к плотности

$$\sum_k (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < +\infty$$

ее нулей $\{z_k\}$. Далее, установлены двусторонние оценки для модуля произведения $B_\alpha(z, \{z_k\})$.

Е. Оценка тейлоровских коэффициентов

$$|a_n| \leq \exp \left\{ C n^{1/2} (1 + O(1)) \right\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad C = \text{const},$$

установленная С. Н. Мергеляном (см. [140]) для голоморфных функций ограниченного вида в $|z| < 1$, уточнена в [34] для голоморфных функций из классов N_α ($-1 < \alpha < 0$). А именно, установлено, что если $f(z) = \sum_k a_k z^k$ - голоморфная функция класса N_α , то имеет место неуклучшаемая оценка

$$|a_n| \leq \exp \left\{ C_\alpha n^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}} \right\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad C_\alpha = \text{const}.$$

Г. Далее, в [34] исследованы вопросы единственности в классах N_α ($-1 < \alpha < +\infty$). Пусть дуга L , соединяющая начало координат с точкой единичной окружности, является образом отрезка $[0, 1)$ при отображении круговой дугой и пусть она пересекается с любой концентрической окружностью $|z| = \text{const} < 1$ лишь в одной точке. Далее, пусть $0 \leq \lambda(r) \leq 1$ - непрерывная невозрастающая в $(0, 1)$ функция, подчиненная условию

$$\int_0^1 \frac{\lambda(r)}{1-r} dr < +\infty.$$

Тогда для любой функции $f(z) \in N_\alpha$ ($-1 < \alpha < +\infty$)

$$\int_L \lambda(|z|)(1 - |z|)^\alpha \log |f(z)| |dz| > -\infty.$$

Причем, это неравенство не улучшаемо в том смысле, что при $\lambda(r) \equiv 1$ оно может быть неверно. Если же интеграл расходится, то $f(z) \equiv 0$.

Отметим, что в случае $\alpha = 0$ этот результат содержит в себе теорему, установленную А. Л. Шагиняном [146] для обычного произведения Бляшке. Однако, во избежание совпадения с предыдущими обозначениями, вместо $\omega(r)$, примененного в [146] и [34], здесь мы пишем $\lambda(r)$.

2.3. Предыстория пространств A_α^p в $|z| < 1$. Повидимому, интенсивные исследования таких пространств были начаты Л. Бибербахом [1] в 1914г. Как эта работа Бибербаха, так и последующие работы Т. Карлемана [2] (1922г.), С. Такенака [6] (1925г.), С. Бергмана [8] (1929г.), М. В. Келдыша [12] (1941г.), а также многочисленные работы Дж. Л. Уолша (см. в [14]) и других авторов, были посвящены аппроксимациям рациональными функциями в пространстве функций с производными из *простейшего, гильбертова, не весового пространства A_0^2* (см. [14], стр. 44, 150, 322, там же, довольно полную библиографию старых работ по этой тематике). Г. Г. Харди и Дж. Е. Литтлвуд [10] (1932г.) исследовали вопросы вложения пространств типа A_α^p , при частных значениях p и α , после применения оператора дробного интегрирования.

Каноническое представление и проекционную теорему в простейшем, *не весовом, гильбертовом A_0^2* доказал У. Виртингер [7] (1932г., см. также [14], стр. 150). В работах же М. М. Джрбашяна [15, 16] (1945, 1948гг.) были найдены сразу два канонических представления для общих, весовых банаховых пространств A_α^p ($-1 < \alpha < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$) (см. формулы (1.6), (1.7) теоремы 2). Первое из них при $\alpha = 0$, $p = 2$ совпадает с представлением Виртингера, а второе - (1.7), где под интегралом - вещественная часть голоморфной функции, в конечном итоге привела к теореме 1 о канонической факторизации (1.5) класса (1.1) Р. Неванлинны.

Наиболее содержательное объяснение терминам “пространства Бергмана” и “ядро Бергмана” применительно к A_α^p можно найти в [128] (стр. 2): “... *Стефан Бергман [126] развил элегантную теорию гильбертовых пространств аналитических функций в плоских областях и в многомерном комплексном пространстве, существенно опирающуюся на воспроизводящее ядро, которое стало известно как *кern-функция Бергмана*. Работа Бергмана сфокусирована на пространствах аналитических функций, которые суммируемы с квадратом в данной области по плоской или объемной мере Лебега. Позже, когда внимание было направлено на пространства A^p в единичном круге, их было естественно называть пространствами Бергмана*”.

Действительно, воспроизводящими ядрами в не весовом, гильбертовом A_0^2 занимались Н. Ароншайн [123, 125] и С. Бергман [9, 124]. Однако, пространства A_α^p функций, голоморфных в $|z| < 1$ функций с их метрикой были введены и их каноническое представление с воспроизводящим ядром и теорема проекции

были доказаны весьма известными математиками, раньше работы С. Бергмана [9]. Поэтому мы избегаем применения терминов "пространство Бергмана", "ядро Бергмана", "метрика Бергмана", "проекция Бергмана" в отношении пространств A_α^p в $|z| < 1$.

Создание М. М. Джрбашяном основополагающего аналитического аппарата, открывшего дорогу к современному анализу пространств A_α^p , A_ω^p , иных, родственных пространств и факторизациям, побудило многих специалистов называть отмеченные пространства его именем, а класс (1.1) мероморфных функций - классом Неванлинны-Джрбашяна.

3. ПРОИЗВОЛЬНО ШИРОКИЕ КЛАССЫ N_ω δ -СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Дальнейшее развитие методов исследования привело [87] к расширению части теории факторизации М. М. Джрбашяна, относящейся к широким классам $N\{\omega\} \supset N$, на множество всех функций δ -субгармонических в $|z| < 1$. На этом множестве результаты обрели новую интерпретацию. А именно, при некоторых естественных условиях на функцию $\omega(x)$ оператор L_ω (см. (2.4)), использованный в определении [19] классов $N\{\omega\} \supset N$, можно записать в упрощенной форме

$$L_\omega \log |f(z)| = - \int_0^1 \log |f(tz)| d\omega(t), \quad |z| < 1.$$

Далее, как известно, функция $u(z)$ называется δ -субгармонической в области G и ν называется ее ассоциированной мерой, если $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ и $\nu = \nu_1 - \nu_2$, где функции $u_{1,2}(z)$ субгармоничны в G и обладают риссовскими мерами $\nu_{1,2}$. При этом, полагают, что две δ -субгармонические функции $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ и $v(z) = v_1(z) - v_2(z)$ равны, т.е. $u(z) = v(z)$, если $u_1(z) + v_2(z) = u_2(z) + v_1(z)$ везде в G .

Замена $\log |f(z)|$ произвольной δ -субгармонической в $|z| < 1$ функции $u(z)$ привела к следующему пониманию классов N_ω δ -субгармонических в $|z| < 1$ функций.

Характеристика T_ω вводится аналогично пункту 2.1, заменив $\log |F(z)|$ δ -субгармонической функцией $u(z)$, а $n(t, F)$ и $n(t, 1/F)$ - соответственно на

$$n_\pm(t) = \iint_{|\zeta| \leq t} d\nu_\mp(\zeta),$$

где $\nu_{\pm}(\zeta)$ - положительная и отрицательная вариации знакопеременной риссовской меры $\nu(\zeta)$ функции $u(z)$. Тогда оказывается, что неванлинновская характеристика T - это случай, когда $\omega(x) \equiv 1$ в T_{ω} , и для δ -субгармонических функций

$$(3.1) \quad T_{\omega}(r, u) = T(r, L_{\omega}u), \quad 0 < r < +\infty.^6$$

Установлена также сходимость потенциала типа Грина

$$\iint_{|\zeta| < 1} \log |A_{\omega}(z, \zeta)| d\nu(\zeta),$$

составленного посредством функций (2.5), а также его представление, после применения оператора L_{ω} , обычным гриновским потенциалом:

$$(3.2) \quad L_{\omega} \iint_{|\zeta| < 1} \log |A_{\omega}(z, \zeta)| d\nu(\zeta) = \iint_{|\zeta| < 1} \log \left| \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \right| d\nu_{\omega}(\zeta), \quad |z| < 1,$$

где

$$\nu_{\omega}(E) = L_{\omega}\nu(E) \equiv - \int_0^1 \omega'(t) \nu(tE) dt$$

для любого борелева множества E , компактно содержащегося в $|z| < 1$. При этом, имеет место также эквивалентность условий

$$\iint_{|\zeta| < 1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(x) dx \right) d\nu(\zeta) < +\infty$$

и

$$\iint_{|\zeta| < 1} (1 - |\zeta|) d\nu_{\omega}(\zeta) < +\infty,$$

обеспечивающих как сходимость рассматриваемых потенциалов, так и справедливость формулы (3.2). На основе (3.1), условием

$$L_{\omega}u(z) \in N$$

вводятся классы N_{ω} функций $u(z)$ δ -субгармонических в $|z| < 1$. Причем, эти классы произвольно широки в том смысле, что любая δ -субгармоническая в $|z| < 1$ функция принадлежит классу N_{ω} при надлежащем выборе функции-параметра $\omega(x)$. Кроме того, формула (3.2) позволяет точно описать то подмножество класса N , с которым с применение оператора L_{ω} отождествляется класс N_{ω} .

Далее, к представлениям функций $u(z) \in N_{\omega}$ приводит рассуждение, основанное на *взаимооднозначности оператора L_{ω} в классе субгармонических функций*.

⁶Отметим, что связь между характеристическими функциями Р. Неванлинны и М. М. Джрбашяна была задачей, интересовавшей многих специалистов.

А именно, установлено, что неванлинновское представление функции $L_\omega u(z)$ эквивалентно представлению $u(z)$ в виде суммы потенциала типа Грина и интеграла с ядром $\operatorname{Re} S_\omega(z)$, что в частном случае переходит в факторизацию (2.8), когда $u(z) = \log |F(z)|$, где $F(z)$ мероморфна в $|z| < 1$.

4. ОЦЕНКА ω -ЯДЕР

Ниже приведены результаты работы [89], посвященной оценкам ядер C_ω (и, тем самым $S_\omega = 2C_\omega - 1$), что, как часто отмечал М. М. Джрбашян - одна из наиболее важных задач, связанных с его теорией факторизации. Позже, при решении задач представимости в многомерных, трубчатых областях, А. О. Карапетян [96, 97] построил некоторое ядро, которое в одномерном случае переходит в аналог ядра (2.1) в полуплоскости $G^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$:

$$(4.1) \quad C_\omega(z) \equiv \int_0^{+\infty} \frac{e^{izt} dt}{t \int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} \omega(\sigma) d\sigma}, \quad z \in G^+,^7$$

где функция $\omega(t)$, задана уже при $0 < t < +\infty$ и такова, что $C_\omega(z)$ голоморфна в G^+ . Ранее предполагалось, что некоторые дополнительные ограничения на поведение функций $\omega(x)$, заданных в $(0, 1)$ и $(0, +\infty)$, должны обеспечивать справедливость оценок

$$(4.2) \quad |C_\omega(z)| \leq \frac{M}{|z^2 \omega'(y)|}, \quad z = x + iy \in G^+,$$

$$(4.3) \quad |C_\omega(z)| \leq \frac{M}{|(1-z)^2 \omega'(|z|)|}, \quad |z| < 1,$$

с некоторыми постоянными M , которые “почти” обобщают представления

$$C_\omega(z) \Big|_{\omega(x)=x^\alpha} = \frac{1}{(-iz)^{1+\alpha}}, \quad z \in G^+,$$

$$C_\omega(z) \Big|_{\omega(x)=(1-x)^\alpha} = \frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}}, \quad |z| < 1,$$

имеющие место при любых $\alpha \in (-1, +\infty)$.

В [89] оценки (4.2) и (4.3) установлены единым методом, при ограничениях, предполагающих, что производная от $\omega(x)$ в $(0, 1)$ (или $(0, +\infty)$) убывает при $x \rightarrow 1 - 0$ (или $x \rightarrow +0$) не быстрее, чем $(1-x)^\alpha$ (или x^α). Полученные оценки точны на положительном радиусе $z = r \in (0, 1)$ и на мнимой полуоси $z = iy$ ($0 < y < +\infty$). “Модельным” случаем для этих оценок является оценка ядра

⁷В целях удобства изложения, для этого ядра будем использовать то же обозначение, что для ядра в круге.

(4.1) в полуплоскости, и оценки (4.2), (4.3) получены с помощью следующего аналога теоремы Абеля.

Лемма 1. Пусть функция $\varphi(t) > 0$ задана на $(0, +\infty)$. Тогда:

1°. Если $\varphi(t) \nearrow$, но $t^{-\alpha}\varphi(t) \searrow$ в $(0, +\infty)$ при каком-либо $\alpha > 0$, то

$$(4.4) \quad \int_0^{+\infty} e^{-tx} \varphi(t) dt \asymp \frac{\varphi(1/x)}{x}, \quad 0 < x < +\infty.^8$$

2°. Если $\varphi(t) \nearrow$, но $(1 - e^{-t})^{-\alpha}\varphi(t) \searrow$ при каком-либо $\alpha > 0$, то при достаточно малом $v > 0$

$$(4.5) \quad \int_{+0}^{+\infty} e^{-tv} \varphi(t) d[t] \asymp \frac{\varphi(1/v)}{v},$$

где $[t]$ - целая часть числа t .

3°. Если $\varphi(t) \searrow$ в $(0, +\infty)$, но $t^\delta \varphi(t) \nearrow$ или $(1 - e^{-t})^\delta \varphi(t) \nearrow$ при каком-либо $\delta \in (0, 1)$, то соответственно верны (4.4) или (4.5).

В итоге, в [89] справедливость и точность оценок (4.2) и (4.3) подтверждена для функций $\omega(x)$ из некоторых подклассов функций регулярного поведения [158], которые в частности содержат те $\omega(x)$, для которых при любых наперед заданных $\alpha \in (-1, +\infty)$ и $\beta > 0$

$$(4.6) \quad |\omega'(x)| \asymp (1-x)^\alpha \log^\beta \frac{1}{1-x} \quad \text{при } x \rightarrow 1-0, \quad \text{или}$$

$$(4.7) \quad |\omega'(x)| \asymp x^\alpha \log^\beta \frac{1}{x} \quad \text{при } x \rightarrow +0.$$

Однако, справедливость оценок (4.2) и (4.3) *опровергнута* в случае экспоненциально убывающих параметр-функций. В частности, в случае, когда

$$\omega(t) \equiv \omega_{\rho, \alpha}(t) = \int_0^t e^{-\rho/\sigma} \sigma^\alpha d\sigma, \quad 0 < t < +\infty,$$

где $\rho > 0$ и α - любые фиксированные действительные числа, для ядра (4.1) в полуплоскости доказано, что

$$C_\omega(iy) \asymp \frac{1}{y^3 \omega'(y)} \times \begin{cases} 1+y & \text{при } \alpha > -1, \\ (1+y)^{2+\alpha} & \text{при } \alpha < -1, \\ (1+y) \log^{-1}(e+y) & \text{при } \alpha = -1, \end{cases} \quad 0 < y < +\infty.$$

И если $\alpha > 0$, то доказано, что при некоторой положительной постоянной $M \equiv M_{\rho, \alpha} > 0$

$$|C_\omega(z)| \leq M \frac{1+y}{|z|^2 y \omega'(y)}, \quad z = x + iy \in G^+.$$

⁸ $f(x) \asymp g(x)$ означает, что частное $f(x)/g(x)$ лежит между двумя положительными постоянными.

Для ядер же $C_\omega(z)$ в круге и параметр-функций вида

$$\omega(x) \equiv \omega_{\rho,\alpha}(x) = -K \int_x^1 \exp \left\{ -\frac{\rho}{1-t} \right\} (1-t)^\alpha dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где

$$K = \left(\int_0^1 \exp \left\{ -\frac{\rho}{1-t} \right\} (1-t)^\alpha dt \right)^{-1},$$

установлено, что при любом вещественном α и любом $\rho > 0$

$$C_\omega(r) \asymp \frac{1}{(1-r)^3 |\omega'(r)|}, \quad 0 < r < 1.$$

А если и $\alpha > 0$, то при некоторой постоянной $M \equiv M_{\rho,\alpha} > 0$

$$|C_\omega(z)| \leq \frac{M}{|1-z|^2(1-|z|)|\omega'(|z|)|}, \quad |z| < 1.$$

5. РАСШИРЕНИЕ РАННИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

М. М. ДЖРБАШЯНА

Результаты работ М. М. Джрбашяна [15, 16] 1945 и 1948гг. относятся к классам и пространствам более простой структуры, чем описанные выше классы $N\{\omega\}$. Поэтому, несмотря на общность теории классов $N\{\omega\}$, именно результаты работ [15, 16] находят развитие и применения в многочисленных современных исследованиях (см., например, книги А. Е. Джрбашяна - Ф. А. Шамояна [61] и Хеденмальма-Коренблюма-Зу [127], содержащие многочисленные ссылки, см. также [82, 70, 71, 72, 62]). Известно также множество работ по исследованию операторов Теплица, Хенкеля и др. в пространствах A_α^p , которые имеют приложения в математической физике. Однако, современное развитие тематики привело к исследованию более тонких и сложных классов и пространств, зависящих не от $\alpha \in (0, +\infty)$ а от функции-параметра ω . Поэтому, *мы опустим работы, относящиеся к пространствам A_α^p и нацелимся, в основном, на описание тонких результатов с весом ω .*

В работах Ф. А. Шамояна [59, 57, 70] были введены классы N_ω^p ($0 < p < +\infty$) голоморфных и мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, для которых характеристика Неванлинны $T(r, f)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \omega(1-r) T^p(r, f) dr < +\infty,$$

где $\omega(t)$ предполагается неотрицательной функцией класса S на отрезке $(1, 0]$, т.е. измеримой и такой, что при некоторых положительных постоянных m_ω, M_ω

и $q_\omega \in (0, 1]$

$$(5.1) \quad m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda x)}{\omega(x)} \leq M_\omega, \quad 0 < x \leq 1, \quad \lambda \in [q_\omega, 1).$$

Очевидно, что при $\omega(t) = t^\alpha$ ($\alpha > -1$) и $p = 1$ класс N_ω^p совпадает с классом Неванлинны-Джрбашяна (1.1).

Отметим, что в случае полуоси R_+ классы типа (5.1) впервые появились в теории вероятностей, а на отрезке подобные классы были введены Ф. А. Шамояном в работах [60, 70]. Нетрудно заметить, что классы весов вида $\varphi(t) = \omega(1-t)$ ($0 < t \leq 1$), $\varphi(t) \approx \varphi(2t)$ ($t > 0$), или весов, для которых существуют числа $\varepsilon, k > 0$ такие, что $\varphi(t)/(1-t)^\varepsilon \uparrow$ и $\varphi(t)/(1-t)^k \downarrow$ при $t \rightarrow 1-0$, содержатся в S , который, таким образом, шире чем классы, рассмотренные в работе [154] А. Л. Шилдса и Д. Л. Вильямса.

Используя произведение (1.4) М. М. Джрбашяна, в работе [70] установлены следующие результаты:

Теорема 6. *Класс N_ω^p ($0 < p < +\infty$) совпадает со множеством голоморфных в $|z| < 1$ функций, допускающих представление*

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda \pi_\beta(z, \{z_k\}) \exp\{h(z)\}, \quad |z| < 1,$$

где $c \in \mathbb{C}$, $\lambda \geq 0$ - целое число, $\{z_k\}$ - последовательность чисел из $|z| < 1$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 n^p(r)(1-r)^p \omega(1-r) dr < +\infty,$$

$h(z)$ - гармоническая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 u(1-r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\vartheta})| d\vartheta \right) dr < +\infty$$

и $\beta > (\alpha_\omega + 2)/p$, где α_ω - константа, зависящая только от ω .

В случае $\omega(t) = t^\alpha$ обозначим $N_\alpha^p \equiv N_\omega^p|_{\omega=t^\alpha}$. Тогда справедлива

Теорема 7. *Класс N_α^p ($\alpha > -1$, $1 < p < +\infty$) совпадает со множеством голоморфных в $|z| < 1$ функций, допускающих в $|z| < 1$ представление*

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda \pi_\beta(z, \{z_k\}) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2}{(1 - e^{-i\vartheta} z)^{\beta+1}} \right) \Psi(e^{-i\vartheta}) d\vartheta \right\},$$

где $\Psi(e^{-i\vartheta})$ - функция класса О. В. Бесова $\Lambda_{\beta-\alpha}^{p,+\infty}$ на $|z| = 1$ и $\{z_k\}$ - последовательность чисел из $|z| < 1$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha+p} n^p(r) dr < +\infty.$$

Ф. А. Шамояном и его аспиранткой Е. Н. Шубабко установлено [73], что для любых последовательностей $\{z_k\}$ из единичного круга, удовлетворяющих условию (7), другое произведение $B_\beta(z, \{z_k\})$ М. М. Джрбашяна (см. (2.5), (2.6)) принадлежит классу N_α^p тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+1}{p} < \beta < \frac{\alpha+1}{p} + 2, \quad \text{если } 0 < p \leq 1 \quad \text{и} \\ \frac{\alpha}{p} + 1 < \beta < \frac{\alpha+1}{p} + 2, \quad \text{если } 1 < p < +\infty. \end{aligned}$$

Результаты, относящиеся к классам мероморфных функций из N_ω^p , непосредственно следуют из теорем 6 и 7.

Отметим, что аналоги теорем 6 и 7 и соответствующих результатов [90] для полуплоскости установлены в работах аспирантки Ф. А. Шамояна И. С. Курсиной в [69].

Произведения $\pi_\alpha(z, \{z_k\})$ сыграли существенную роль при исследовании вопросов факторизации и корневых множеств классов мероморфных в круге $|z| < 1$ функций конечного порядка и нормального типа, то есть функций $f(z)$, для которых

$$(5.2) \quad T(r, f) \leq \frac{c}{(1-r)^\rho}, \quad \rho \geq 0.$$

Очевидно, что при $\rho = 0$ этот класс совпадает с неванлинновским классом N . Отметим, что первые исследования таких классов функций конечного порядка содержатся в работах М. Цудзи, однако примененные им методы (см. [157]) не позволили получить характеристику корневых множеств функций класса (5.2). В работах [71, 72] установлена

Теорема 8. Пусть $0 < \alpha < \beta < \alpha + 2$. Тогда класс (5.2) совпадает со множеством мероморфных в круге функций, допускающих представление

$$\begin{aligned} f(z) = e^{i\gamma + mk} z^m \frac{B_\beta(z, \{a_k\})}{B_\beta(z, \{b_k\})} \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2}{(1 - e^{-i\vartheta} z)^{\beta+1}} - 1 \right) \Psi(e^{-i\vartheta}) d\vartheta \right\}, \quad |z| < 1, \end{aligned}$$

где $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ - последовательности из $|z| < 1$, для которых

$$n(r) \leq \frac{c}{(1-r)^{\alpha+1}}, \quad 0 < r < 1,$$

B_β - произведение (2.5)-(2.6), m - целое число, γ - вещественная постоянная, $k_\beta = \beta \sum_{n=1}^{\infty} [n(n+\beta)]^{-1}$, а функция $\Psi(e^{i\vartheta})$ принадлежит классу $\Lambda_{\beta-\alpha}^{1,+\infty}$ и

$$\Psi(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (r-t)^{\beta-1} \ln |f(e^{i\vartheta})| dt, \quad -\pi < \vartheta \leq \pi.$$

Отметим, что при $\beta > \alpha + 2$ утверждение этой теоремы не верно.

Хорошо известно, что класс Неванлинны N не инвариантен относительно операторов интегрирования и дифференцирования. В работе же [67] выяснен вопрос об инвариантности класса N_ω^p относительно операторов. А именно, доказана

Теорема 9. *Для инвариантности классов N_ω^p ($0 < p < +\infty$) относительно оператора дифференцирования необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^1 \omega(t) \left(\ln \frac{1}{t} \right)^p dt < +\infty.$$

В [67] аналогичный результат получен также относительно оператора интегрирования.

В работе [76] описываются главные части в разложении Лорана функций из классов Неванлинны-Джрбашяна. Получен следующий результат.

Теорема 10. *Пусть $\{z_k\}$ - равномерно отделенная последовательность из $|z| < 1$, т.е.*

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{j=1, j \neq k} \left| \frac{z_j - z_k}{1 - \overline{z_j} z_k} \right| = \delta > 0.$$

Тогда для того, чтобы рациональная функция вида

$$\frac{a_{k,n}}{(z - z_k)^n} + \frac{a_{k,n-1}}{(z - z_k)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{k,1}}{(z - z_k)}$$

была главной частью разложения Лорана мероморфной функции из класса Неванлинны-Джрбашяна, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_k (1 - |z_k|)^{\alpha+2} \ln^+ \frac{|a_{n,i}|}{(1 - |z_k|)^n} < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Нетрудно видеть, что с введением метрики

$$\rho(f, g) = \iint_{|z| < 1} (1 - |\zeta|)^\alpha \ln(1 + |f(z) - g(z)|) dm_2(z)$$

класс Неванлинны-Джрбашяна превращается в F -алгебру, т.е. в векторное пространство с полной, инвариантной метрикой, в котором оператор умножения непрерывен. Как установили Дж. Г. Шапиро и А. Шилдс (см. [156]), в классе N Неванлинны невозможно ввести метрику, относительно которой этот класс был

бы топологическим векторным пространством. В работе [111] установлено, что, в отличие от алгебры Неванлинны-Смирнова N^+ , в алгебре N_ω все замкнутые идеалы определяются своими нулями.

5.1. Пространства A_ω^p в $|z| < 1$. Общие пространства A_ω^p введены в [91] как множества тех голоморфных в $|z| < 1$ функций $f(z)$, для которых

$$(5.3) \quad \|f\|_{p,\omega} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta|<1} |f(\zeta)|^p d\mu_\omega(\zeta) \right\}^{1/p} < +\infty, \quad 0 < p < \infty,$$

где $d\mu_\omega(\rho e^{i\vartheta}) = -d\omega(\rho^2)d\vartheta$ и $\omega(t) \in \Omega_A$, т.е. функция $\omega(t)$ задана в $[0, 1]$ и такова, что:

- (i) $\bigvee_0^1 \omega < \infty$, $\omega(1-0) = \omega(1)$, и в $(0, 1)$ существует последовательность непересекающихся интервалов, сгущающаяся к 1, такая, что вариация функции ω положительна на каждом интервале,
- (ii) $\Delta_n \equiv \Delta_n(\omega) = -\int_0^1 t^n d\omega(t) \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$,
- (iii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\Delta_n|} \geq 1$.

Через L_ω^p обозначено лебегово пространство, определенное (5.3), без условия о голоморфности. В следующих теоремах даны результаты [91].

Теорема 11. 1° . При любом $p \in (0, \infty)$ объединение $\bigcup_{\omega \in \Omega_A} A_\omega^p$ совпадает со множеством всех функций, голоморфных в $|z| < 1$.

2° . При любых $p \in [1, \infty)$ и $\omega \in \Omega_A$ класс A_ω^p является банаховым пространством с нормой (5.3), причем A_ω^p совпадает с A_α^p когда $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ ($0 < \alpha < \infty$).

Теорема 12. Если $f(z) \in A_\omega^p$ с какими-либо $\omega \in \Omega_A$ и $p \in [1, \infty)$, то в $|z| < 1$ верны представления

$$(5.4) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta|<1} f(\zeta) C_\omega(z\bar{\zeta}) d\mu_\omega(\zeta)$$

$$(5.5) \quad = -\overline{f(0)} + \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \{\operatorname{Re} f(\zeta)\} C_\omega(z\bar{\zeta}) d\mu_\omega(\zeta),$$

где

$$C_\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Delta_k \quad (\Delta_0 = 1).$$

Замечание 1. При $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ ($0 < \alpha < \infty$) формулы (5.4) и (5.5) совпадают с представлениями (1.6) и (1.7).

В следующей теореме установлено параметрическое представление некоторых пространств A_ω^2 , объединение которых опять же совпадает со множеством всех функций, голоморфных в $|z| < 1$. Одновременно, в явном виде интегральных операторов заданы некоторая изометрия между такими A_ω^2 и пространством Харди H^2 , а также обратная изометрия.

Теорема 13. Пусть функция $\omega \in \Omega_A$ непрерывно дифференцируема в $[0,1]$ и такова, что $\omega \searrow$, $\omega(1) \equiv \omega(1-0) = 0$ и $\omega(0) = 1$. Далее, пусть функция $\tilde{\omega}(x)$ - квадрат Вольтерра от $\omega(x)$, т.е.

$$\tilde{\omega}(x) = - \int_x^1 \omega\left(\frac{x}{\sigma}\right) d\omega(\sigma), \quad 0 < x < 1.$$

Тогда $\tilde{\omega} \in \Omega_A$ и пространство $A_{\tilde{\omega}}^2$ совпадает со множеством всех функций, представимых в $|z| < 1$ в виде

$$(5.6) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\vartheta}) C_\omega(ze^{-i\vartheta}) d\vartheta, \quad \text{где } \varphi(e^{i\vartheta}) \in L^2[0, 2\pi].$$

При этом, для любой функции $f(z) \in A_{\tilde{\omega}}^2$ существует единственная функция $\varphi_0(z)$ of H^2 , такая, что (5.6) справедливо с $\varphi_0(e^{i\vartheta})$, и эта функция задается формулой

$$(5.7) \quad \varphi_0(z) = L_\omega f(z) = - \int_0^1 f(tz) d\omega(t), \quad |z| < 1.$$

Кроме того, $\|\varphi_0\|_{H^2} = \|f\|_{2, \tilde{\omega}}$, и $\varphi - \varphi_0 \perp H^2$ для любых $\varphi(e^{i\vartheta}) \in L^2[0, 2\pi]$, при которых верно (5.6). Далее, оператор $L_\omega : A_\omega^2 \rightarrow H^2$ изометричен, а формулой (5.6) задается обратная изометрия, т.е. $(L_\omega)^{-1} : H^2 \rightarrow A_\omega^2$.

Замечание 2. При $\omega(x) = (1-x)^{\alpha/2}$ ($\alpha > 0$) теорема 13, переходит, по существу, в объединение теорем IV и V [16]. Как отмечено в [16], в A_0^2 представление (5.6) с φ_0 вида (5.7) было получено М. В. Келдышем.

Несколько иное представление по границе круга верно при $1 \leq p < +\infty$.

Теорема 14. Пусть $1 \leq p < +\infty$, $\omega(x) \in \Omega_A$ и $\bigvee_0^1 \omega = 1$. Тогда:

1°. Любая функция $f(z) \in A_\omega^p$ представима в виде

$$(5.8) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_{\omega_1}(ze^{-i\vartheta}) \varphi(e^{i\vartheta}) d\vartheta, \quad |z| < 1,$$

где $\omega_1(x) = \omega(x^2)$ и $\varphi(z) = L_{\omega_1} f(z) \in H^p$.

2°. $\|L_{\omega_1}\| \leq 1$ в A_ω^p , и (5.8) представляет $L_{\omega_1}^{-1}$ на множестве $L_{\omega_1} A_\omega^p$.

Замечание 3. Утверждение теоремы 14 остается верным при замене $\omega_1(x)$ самой $\omega(x)$. При $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ параметрические представления A_ω^p интегралами по единичной окружности были установлены Ф. А. Шамояном [65] при $p = 1$. Развитие методов [65] привело в [133] к аналогичным представлениям A_α^p с $p \geq 1$, которые устанавливают взаимнооднозначное соответствие между A_α^p и определенными классами Бесова.

5.2. Пространства $A_\omega^p \subset H^p$. В [91] введены в рассмотрение новые пространства типа Дирихле, которые естественно снова обозначать через A_ω^p . Эти пространства содержатся в пространстве Харди H^p , и их граничные свойства аналогичны $N\{\omega\} \subset N$ из [34].

Через $\tilde{\Omega}_A$ обозначим множество тех $\omega(x)$ которые непрерывны, не убывают в $[0, 1)$ и таковы, что $\int_0^1 \omega(x) dx = 1$ и $|\omega(x) - 1| \leq Kx$ ($0 \leq x < \delta$) при некоторых $K > 0$ и $\delta \in (0, 1)$. Заметим, что в отличие от определения множества Ω_A , это определение позволяет функции $\omega(x) \in \tilde{\Omega}_A$ стремиться к $+\infty$ при $x \rightarrow +0$. Введем новое пространство A_ω^p ($0 < p < +\infty$) как множество тех голоморфных в $|z| < 1$ функций $f(z)$, для которых

$$f'(z) \in A_{\tilde{\omega}}^p, \quad \text{где} \quad \tilde{\omega}(x) = \int_x^1 \omega(t) dt \quad \text{и} \quad \omega(x) \in \tilde{\Omega}_A.$$

Отметим, что это определение корректно, поскольку оно обеспечивает вложение $\tilde{\omega}(x) \in \Omega_A$. Кроме того, очевидно, что новые A_ω^p ($1 \leq p < +\infty$, $\omega(x) \in \tilde{\Omega}_A$) - банаховы пространства с нормой $\|f\|_{p,\omega} = \|f'\|_{p,\tilde{\omega}}$.

Теорема 15. Если $1 \leq p < +\infty$ и $\omega(x) \in \tilde{\Omega}_A$, то $A_\omega^p \subset H^p$, и любая функция $f(z) \in A_\omega^p$ обладает конечными угловыми граничными значениями $f(e^{i\vartheta})$ во всех точках $\vartheta \in [0, 2\pi]$ кроме, быть может, множества, $E \subset [0, 2\pi]$ нулевой ω -емкости (см. (2.9)).

5.3. Проекторы и пространство, сопряженное A_ω^p . Как оказывается, формула представления (5.4) задает вид ортогональной проекции $P_\omega : L_\omega^2 \rightarrow A_\omega^2$. При $\omega(x) = 1 - x$ (т.е. для $L_0^2 \rightarrow A_0^2$) это утверждение доказано У. Виртингером [7] (см. также [14], стр. 105), а при $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ (т.е. для $L_\alpha^2 \rightarrow A_\alpha^2$) - М. М. Джрбашяном [16]. Отметим, что если $\omega \in \Omega_A$ является невозрастающей функцией, то

$$(5.9) \quad e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{\Delta_n(\omega)}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

- ортонормальная система в A_ω^2 . Причем, это базис в A_ω^2 , поскольку полиномы плотны в A_ω^2 . Кроме того, для любых функций $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ из A_ω^2

$$\|f\|_{2,\omega}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \Delta_n(\omega) \quad \text{и} \quad (f, g)_\omega = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n \Delta_n(\omega),$$

где $(f, g)_\omega$ - скалярное произведение, индуцированное из L_ω^2 .

Теорема 16. [91] *Если $\omega \in \Omega_A$ - невозрастающая функция и $\bigvee_0^1 \omega = 1$, то оператор*

$$(5.10) \quad P_\omega f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta| < 1} f(\zeta) C_\omega(z \bar{\zeta}) d_\omega(\zeta), \quad |z| < 1, \quad f \in L_\omega^2,$$

является ортогональным проектором из L_ω^2 на A_ω^2 .

С использованием оценки (4.3) ядра $C_\omega(z)$ в [91] (теорема 3.2) доказано также утверждение об ограниченном проектировании L_ω^1 на A_ω^1 , при условиях в некотором смысле аналогичных условиям подобной теоремы А. Л. Шилдса и Д. Л. Вильямса [154]. Далее, опять же с использованием оценки (4.3) ядра $C_\omega(z)$ установлено, что также сам оператор (5.10) осуществляет проекцию $L_\omega^p \rightarrow A_\omega^p$ ($1 < p < +\infty$) для некоторых классов непрерывно дифференцируемых $\omega(x)$, которые, в частности, содержат такие $\omega(x)$, что

$$(5.11) \quad |\omega'(x)| = M(1-x)^\alpha \log^\gamma \frac{a}{1-x}, \quad 0 \leq x < 1,$$

где

$$M = \left(\int_0^1 (1-t)^\alpha \log^\gamma \frac{a}{1-t} dt \right)^{-1},$$

$\alpha, \gamma > 0$ - любые вещественные числа и $a \geq e^{\gamma/(\alpha-\beta)}$ при некотором выборе β . Далее, установлено, что при некоторых дополнительных ограничениях все непрерывные линейные функционалы на A_ω^p задаются формулой

$$(5.12) \quad \Phi(f) = (f, g)_\omega = \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta| < 1} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} d\mu_\omega(\zeta), \quad f \in A_\omega^p, \quad g \in A_\omega^q,$$

и $(A_\omega^p)^* = A_\omega^q$, ($1/p + 1/q = 1$) в смысле изоморфизма пространств. Доказанные в [91] утверждения в частном случае содержат в себе результаты [61], а также теорему 1.10 из [127].

Отметим, что все отмеченные теоремы о проекции и сопряженном пространстве доказаны с применением теста Шура. Этот метод впервые был применен У.

Рудином и Ф. Форелли в [130] в не весовом пространстве голоморфных функций A_0^p в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.

Замечание 4. Хорошо известно, что при $1 < p < +\infty$ оператор гармонического сопряжения действует ограниченно из гармонических пространств h^p в голоморфные пространства Харди H^p . Как установил Ньюман, при $p = 1$ и $p = +\infty$ не существует даже линейный, ограниченный оператор, отображающий h^1 на H^1 . В работе же [58] посредством ядер М. М. Джрбашяна

$$D_\alpha(\zeta, z) = \frac{\alpha (1 - |\zeta|^2)^{\alpha-1}}{\pi (1 - |\zeta|^2)^{\alpha+1}}, \quad |\zeta|, |z| < 1,$$

впервые был построен линейный, ограниченный оператор, отображающий пространство гармонических функций из L_α^p ($0 < p \leq 1$) на пространство голоморфных функций A_α^p . В дальнейшем, этот метод был развит А. Э. Джрбашяном и А. О. Карпетяном (см. [61]), а затем Ф. А. Шамомяном и его учениками для доказательства подобных теорем в других классах гармонических и n -гармонических функций (см. [68, 74, 77]). В работе [62] получено другое представление линейных, непрерывных функционалов на пространствах A_ω^p , пригодное для всех $0 < p < +\infty$ (см. также [68, 74, 77]). В работе же [134] переоткрыты частные случаи результатов из [62].

5.4. Весовые классы функций δ -субгармонических в $|z| < 1$. Как и в параграфе 3, в [91] предполагается, что мера Рисса ν δ -субгармонической в $|z| < 1$ функции $u(z)$ минимально разложена в жордановом смысле, т.е. $\nu = \nu_+ - \nu_-$, $(\text{supp } \nu_+) \cap (\text{supp } \nu_-) = \emptyset$, где $\nu_\pm$ - положительная и отрицательная вариации меры ν . Предполагается также, что $0 \notin \overline{\text{supp } \nu}$, т.е. $d_0 = \inf\{|\lambda| : \lambda \in \text{supp } \nu\} > 0$, и используется обобщение неванлинновской характеристики

$$T(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^+(re^{i\vartheta}) d\vartheta + \int_0^r \frac{n_-(t)}{t} dt, \quad n_-(t) = \iint_{|\zeta| < t} d\nu_-(\zeta),$$

которое, вместе с соотношением равновесия $u(0) + T(r, -u) = T(r, u)$ ($0 < r < R$) порождается аналогом формулы Иенсена-Неванлинны для δ -субгармонических в $|z| < R \leq +\infty$ функций. Это обобщение получается подстановкой $z = 0$ в представлении Рисса функции $u(z)$ в $|z| < r < R$ (т.е. в разности риссовских представлений функций u_1 и u_2 в $|z| < r$). Далее, предполагается, что $\omega(x) \in \Omega_N$, т.е. в дополнение к условию $\omega(x) \in \Omega_A$ предполагается, что $\omega(1) = \omega(1 - 0) = 0$. Это дает возможность записать функцию $\omega(x)$ в виде разности ее положительной

и отрицательной вариаций, т.е. $\omega(x) = \omega_+(x) - \omega_-(x)$ ($0 \leq x \leq 1$), причем

$$\omega_{\pm}(x) = \int_x^1 (d\omega(t))^{\pm}, \quad \bigvee_x \omega = \bigvee_x \omega_+ + \bigvee_x \omega_- = \omega_+(x) + \omega_-(x).$$

Определив N_{ω}° как класс тех δ -субгармонических в $|z| < 1$ функций $u(z)$, для которых

$$\int_0^1 T(r, u) |d\omega(r^2)| < +\infty,$$

в [91] доказывается, что объединение $\bigcup_{\omega \in \Omega_N} N_{\omega}^{\circ}$ этих классов совпадает со множеством *всех* функций δ -субгармонических в $|z| < 1$, а подкласс N_{ω}° , состоящий из функций вида $u(z) = \log |f(z)|$, где $f(z)$ мероморфна в $|z| < 1$, при $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}$ ($0 < \alpha < +\infty$) совпадает с неванлинновским весовым классом (1.1). Кроме того, доказана

Теорема 17. Пусть $\omega(x) \in \Omega_N$. Тогда:

1°. При любом фиксированном ζ ($|\zeta| < 1$) функция

$$b_{\omega}(z, \zeta) = \exp \left\{ - \int_{|\zeta|^2}^1 C_{\omega} \left(\frac{zt}{\zeta} \right) \frac{\omega(t)}{t} dt \right\}, \quad |z| < |\zeta|,$$

голоморфна во всем круге $|z| < 1$, где имеет единственный, простой нуль в точке $z = \zeta$.

2°. При любой борелевой мере $\nu \geq 0$ ограниченной внутри⁹ $|z| < 1$ и такой, что $0 \notin \overline{\text{supp } \nu}$ и

$$\iint_{|\zeta| < 1} \left(\int_{|\zeta|^2}^1 |\omega(t)| dt \right) d\nu(\zeta) < +\infty,$$

потенциал типа Грина

$$J_{\omega}(z) = \iint_{|\zeta| < 1} \log |b_{\omega}(z, \zeta)| d\nu(\zeta)$$

сходится и представляет субгармоническую в $|z| < 1$ функцию.

Отметим, что в частном случае, когда $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}$ ($0 < \alpha < +\infty$) функция $b_{\omega}(z, \zeta)$ совпадает с фактором Бляшке-Джрбашяна (1.4).

Теорема 18. Если $u(z) \in N_{\omega}^{\circ}$ с $\omega(x) \in \Omega_N$, то мера Рисса ν функции $u(z)$ удовлетворяет условию

$$(5.13) \quad \iint_{|\zeta| < 1} \left(\int_{|\zeta|^2}^1 |\omega(t)| dt \right) d\nu_{\pm}(\zeta) < +\infty,$$

⁹Справедливость условия “внутри” области означает, что оно справедливо в любом компакте внутри этой области.

и в $|z| < 1$ имеет место представление типа Рисса:

$$(5.14) \quad u(z) = -u(0) + \iint_{|\zeta| < 1} \log |b_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta) + \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \operatorname{Re} \{C_\omega(z\bar{\zeta})\} u(\zeta) d\mu_\omega(\zeta).$$

Отметим, что при $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ ($\alpha > 0$) и $u(z) = \log |f(z)|$, где $f(z)$ мероморфна в $|z| < 1$, представление (5.14) переходит в каноническую факторизацию (1.5) М. М. Джрбашяна, а условие (5.14) - в неванлинновское условие (1.3).

5.5. Ортогональное разложение функций, субгармонических в $|z| < 1$.

В этом пункте приведены результаты недавней работы [95], где установлено ортогональное разложение для субгармонических в $|z| < 1$ функций, принадлежащих произвольно широкому, весовым лебеговым пространствам L_ω^2 в $|z| < 1$.

Будем полагать, что $\omega(x) \in \Omega_{N^2}$, т.е. функция $\omega(x)$ непрерывно дифференцируема в $[0, 1]$, строго убывает и такова, что $\omega(0) = 1$, $\omega(1) = \omega(1-0) = 0$ и $|\omega'(x)|$ не возрастает в $[0, 1]$. Далее, определим класс N_ω^2 как множество тех функций $u(z)$ субгармонических в $|z| < 1$, которые принадлежат лебеговому пространству L_ω^2 , т.е.

$$(5.15) \quad \|u\|_{L_\omega^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \iint_{|z| < 1} [u(z)]^2 d\mu_\omega(z) < +\infty,$$

где $d\mu_\omega(re^{i\theta}) = -d\vartheta d\omega(r^2)$. Тогда объединение классов N_ω^2 по всем $\omega(x) \in \Omega_{N^2}$ совпадает со множеством всех субгармонических в $|z| < 1$ функций.

Не нарушая общности дальнейших рассуждений, можно полагать, что носитель риссовской меры функции $u(z)$ отделен от нуля, т.е. $\inf \{|\zeta| : \zeta \in \operatorname{supp} \nu\} \geq d_0 > 0$. Далее, $u(z) \in L_\omega^2 \subset L_\omega^1$, и поэтому, в силу теоремы 18 мера $\nu \equiv \nu_-$ удовлетворяет условию (5.13) и имеет место представление

$$(5.16) \quad u(z) = J_\omega(z) + U(z), \quad |z| < 1,$$

где $J_\omega(z)$ - сходящийся потенциал типа Грина из теоремы 17, а функция

$$U(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \left[u(\zeta) - \frac{u(0)}{2} \right] \operatorname{Re} \{C_\omega(z\bar{\zeta})\} d\mu_\omega(\zeta)$$

гармонична в $|z| < 1$.

Теорема 19. 1°. Оба слагаемых $J_\omega(z)$ и $U(z)$ в представлении (5.16) функции $u(z) \in N_\omega^2$ ($\omega \in \Omega_{N^2}$) принадлежат N_ω^2 .

2°. Оператор

$$Q_\omega u(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \left[u(\zeta) - \frac{u(0)}{2} \right] \operatorname{Re} \{C_\omega(z\bar{\zeta})\} d\mu_\omega(\zeta), \quad |z| < 1$$

- единичный на множестве гармонических функций из N_ω^2 и переводит потенциалы типа Грина $J_\omega(z) \in N_\omega^2$ в тождественный нуль.

3°. Если $U(z)$ - гармоническая функция класса N_ω^2 , то в пространстве L_ω^2 функция $U(z) - U(0)$ ортогональна любому потенциалу типа Грина $G(z) \in N_\omega^2$.

Теорема 20. Если $\nu(\zeta)$ - неотрицательная борелева мера в $|\zeta| < 1$, удовлетворяющая условию (5.16) с $\omega(x) \in \Omega_{N^2}$, то потенциал типа Грина $J_\omega(z)$ с мерой $\nu(\zeta)$ принадлежит N_ω^2 тогда и только тогда, когда существует предел

$$(5.17) \quad \|G\|_{L_\omega^2}^2 = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \iint_{|\zeta|, |\zeta'| < 1} (\log |b_\omega(z, \zeta)|, \log |b_\omega(z, \zeta')|)_{\omega_\rho} d\nu(\zeta) d\nu(\zeta') < \infty,$$

где $\omega_\rho(x) = \omega(x)\chi_{[0, \rho]}(x)$, а $\chi_{[0, \rho]}(x)$ - характеристическая функция отрезка $[0, \rho]$.

Ввиду теорем 19 и 20 класс N_ω^2 совпадает со множеством всех тех субгармонических в $|z| < 1$ функций $u(z)$, которые представимы в виде (5.16), где $U(z)$ - гармоническая функция класса N_ω^2 , а $J_\omega(z)$ - сходящийся потенциал типа Грина с конечной L_ω^2 -нормой. При этом, вычисление подынтегрального скалярного произведения в (5.17) приводит к условию плотности меры $d\nu(\zeta)d\nu(\zeta')$, где учитываются также аргументы ζ и ζ' .

5.6. Пространства $A_\omega^p(\mathbb{C})$ целых функций. Произвольно широкие пространства $A_\omega^p(\mathbb{C})$ ($1 \leq p < +\infty$) целых функций $F(z)$ вводятся в [91] условием

$$(5.18) \quad \|F\|_{p, \omega} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{C}} |F(\zeta)|^p |d\mu_\omega(\zeta)| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

где предполагается, что $d\mu_\omega(\rho e^{i\vartheta}) = -d\omega(\rho^2)d\vartheta$ и $\omega \in \Omega_A^\infty$, т.е. $\omega(x)$ - строго убывающая функция на всей положительной полуоси $[0, +\infty)$ такая, что $\omega(0) = 1$ и

$$\Delta_n^\infty(\omega) = - \int_0^{+\infty} t^n d\omega(t) < +\infty$$

при любом $n = 0, 1, 2, \dots$. Через $L_\omega^p(\mathbb{C})$ обозначаются соответствующие лебеговы пространства.

В [91] доказывается, что пространство A_ω^p ($1 \leq p < +\infty$) с нормой (5.18) - банахово, а при $p = 2$ - гильбертово, при любом $p \in [1, +\infty)$ объединение $\bigcup_{\omega \in \Omega_A^\infty} A_\omega^p(\mathbb{C})$ совпадает со множеством всех целых функций. Также, верна

Теорема 21. [91] Если $F(z) \in A_\omega^2(\mathbb{C})$ с $\omega \in \Omega_A^\infty$, то имеют место представления

$$(5.19) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{C}} F(\zeta) C_\omega^\infty(z\bar{\zeta}) d\mu_\omega(\zeta)$$

$$(5.20) \quad = -\overline{F(0)} + \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \{\operatorname{Re} F(\zeta)\} C_\omega^\infty(z\bar{\zeta}) d\mu_\omega(\zeta), \quad z \in \mathbb{C},$$

где $C_\omega^\infty(z) = \sum_{n=0}^\infty z^n / \Delta_n^\infty(\omega)$ - ядро из [20].

Отметим, что, как и в случае круга, система (5.9), с заменой $\Delta_n(\omega)$ на $\Delta_n^\infty(\omega)$ ($\omega \in \Omega_A^\infty$), является ортонормальным базисом в $A_\omega^2(\mathbb{C})$. Кроме того, справедлива следующая проекционная теорема.

Теорема 22. При $\omega \in \Omega_A^\infty$ формулой

$$(5.21) \quad P_\omega f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} f(\zeta) C_\omega^\infty(z\bar{\zeta}) d\mu_\omega(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}, \quad f \in L_\omega^2(\mathbb{C}),$$

задается ортогональная проекция пространства $L_\omega^2(\mathbb{C})$ на $A_\omega^2(\mathbb{C})$.

Теорема 23. Пусть функция $\omega \in \Omega_A^\infty$ непрерывно дифференцируема и ограничена в $[0, +\infty)$. Далее, пусть $\omega(+\infty) = 0$, $\omega'(x) < 0$ и

$$0 > \int_0^{+\infty} t^{-1} d\omega(t) > -\infty.$$

Тогда функция

$$\tilde{\omega}(x) = - \int_0^{+\infty} \omega\left(\frac{x}{t}\right) d\omega(t), \quad 0 < x < +\infty,$$

принадлежит Ω_A^∞ , и пространство $A_{\tilde{\omega}}^2(\mathbb{C})$ совпадает со множеством функций, допускающих представление вида

$$(5.22) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\vartheta}) C_\omega^\infty(z e^{-i\vartheta}) d\vartheta, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(e^{i\vartheta}) \in L^2[0, 2\pi].$$

Для любого $F(z) \in A_\omega^2(\mathbb{C})$ в пространстве H^2 ($|z| < 1$) существует единственная функция $\varphi_0(z)$ такая, что (5.22) верно с $\varphi_0(e^{i\vartheta})$, и эта функция задается формулой

$$\varphi_0(z) = L_\omega^\infty F(z) = - \int_0^{+\infty} F(tz) d\omega(t), \quad |z| < 1.$$

Кроме того, $\|\varphi_0\|_{H^2} = \|F\|_{2, \tilde{\omega}}$ и $\varphi - \varphi_0 \perp H^2$ для любой функции $\varphi(e^{i\vartheta}) \in L^2[0, 2\pi]$, с которой верно представление (5.22). Оператор же L_ω^∞ является изометрией между $A_\omega^2(\mathbb{C})$ и H^2 ($|z| < 1$), а интегралом (5.22) задается оператор $(L_\omega^\infty)^{-1}$ на H^2 .

Доказан также аналог теоремы 14 о представлении интегралом по единичной окружности (см. [91], теорему 5.5). Отметим, что представление теоремы 23 остается в силе и в случае, когда

$$\omega'(x) = -C_0 e^{-\gamma x^\rho} x^{\mu\rho-1}, \quad 0 < x < +\infty,$$

$$C_0 = \left[\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x^\rho} x^{\mu\rho-1} dx \right]^{-1},$$

с любыми $\gamma, \rho, \mu > 0$, несмотря на то, что условия теоремы 23 на $\tilde{\omega}'(x)$, обеспечивающие включение $\omega(x) \in \Omega_A^\infty$, не удовлетворяются. Именно, имеет место следующее усиление теоремы XIV₁ из [16].

Теорема 24. *Гильбертово пространство целых функций таких, что*

$$(5.23) \quad \|F\| = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\vartheta \int_0^{2\pi} |F(re^{i\vartheta})|^2 e^{-2\gamma r^\rho} r^{2\mu\rho-\rho/2-1} dr \right\}^{1/2} < +\infty,$$

где $\gamma, \rho, \mu > 0$ - любые числа, совпадает со множеством всех функций, представимых в виде

$$(5.24) \quad F(z) = \frac{\rho\gamma^\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_\rho(\gamma^{1/\rho} z e^{-i\vartheta}, \mu) \varphi(e^{-i\vartheta}) d\vartheta, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $\varphi(e^{-i\vartheta}) \in L^2[0, 2\pi]$ и $E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k [\Gamma(\mu + k/\rho)]^{-1}$ - хорошо известная функция типа Миттаг-Леффлера.

Для любого $F(z)$ из пространства (5.23) существует единственная функция $\varphi_0(z) \in H^2(|z| < 1)$, такая, что (5.24) верно с $\varphi_0(e^{i\vartheta})$ и

$$(5.25) \quad \varphi_0(z) = \int_0^{+\infty} F(tz) e^{-\gamma t^\rho} t^{\mu\rho-1} dt, \quad |z| < 1.$$

Кроме того, $\|\varphi_0\|_{H^2} = \|F\|$ и $\varphi - \varphi_0 \perp H^2$ для любой функции $\varphi(e^{-i\vartheta}) \in L^2[0, 2\pi]$, с которой верно (5.24).

5.7. Биортогональные системы функций в A_ω^2 и $A_\omega^2(\mathbb{C})$. Изометрии между H^2 и пространствами A_ω^2 и $A_\omega^2(\mathbb{C})$, данные в теоремах 13, 23 и 24, позволяют в явной форме перевести любое утверждение аддитивного характера, известное в пространстве Харди H^2 ($|z| < 1$), в аналогичное утверждение в A_ω^2 или $A_\omega^2(\mathbb{C})$. В частности, в A_ω^2 и $A_\omega^2(\mathbb{C})$ переходят результаты работ [21, 22, 79] по биортогональным системам функций в H^2 . Мы ограничимся теми утверждениями, которые получаются в $A_\omega^2(\mathbb{C})$. При этом, будем рассматривать сравнительно простой случай последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$ попарно различных точек в $|z| < 1$,

удовлетворяющей условию Бляшке

$$(5.26) \quad \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\alpha_j|) < +\infty.$$

Полагая, что $\{\alpha_j\}_1^{\infty}$ равномерно отделена, т.е.

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{j=1, j \neq k}^{\infty} \left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_j} \alpha_k} \right| = \delta > 0$$

или, короче, $\{\alpha_j\}_1^{\infty} \in \Delta$, введем в рассмотрение произведение Бляшке с нулями

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j - z}{1 - \overline{\alpha_j} z} \frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}.$$

Далее, полагая, что функции $\tilde{\omega}(x)$ и $\omega(x)$ такие, как в теоремах 23, или 24, через

$$T_{\omega}^{\infty}(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}) C_{\omega}^{\infty}(ze^{i\vartheta}) d\vartheta, \quad |z| < 1, \quad (T_{\omega} = (L_{\omega}^{\infty})^{-1})$$

обозначим изометрию $H^2 \rightarrow A_{\omega}^2(\mathbb{C})$ этих теорем. Тогда хорошо известное неравенство Шапиро-Шилдса [150] запишется в следующем виде.

Предложение 1. *Если $\{\alpha_k\}_1^{\infty} \in \Delta$, то существует постоянная C такая, что для любой функции $F(z) \in A_{\omega}^2(\mathbb{C})$*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\alpha_j|^2) |L_{\omega}^{\infty} F(\alpha_j)|^2 \leq C \|F\|_{\tilde{\omega}, 2}^2.$$

Утверждениям, в основном следующим из [22] предварим обозначения

$$r_k(z) = \frac{1}{1 - \overline{\alpha_k} z} \quad \text{и} \quad \Omega_k(z) = \frac{B(z)}{z - \alpha_k}.$$

Тогда, целые функции $T_{\omega}^{\infty}(r_k(z)) = r_{k,\omega}^{\infty}(z)$ и $T_{\omega}^{\infty}(\Omega_k(z)) = \Omega_{k,\omega}^{\infty}(z)$ допускают представления

$$(5.27) \quad r_{k,\omega}^{\infty}(z) = C_{\omega}^{\infty}(\overline{\alpha_k} z), \quad \Omega_{k,\omega}^{\infty}(z) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \rho^n}{\Delta_n(\omega)} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_k^m \rho^{m+1} b_{n+m+1},$$

где b_n - коэффициенты разложения Тейлора $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Предложение 2. *Если последовательность $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$ не удовлетворяет условию Бляшке (5.26), то обе системы (5.27) полны в $A_{\omega}^2(\mathbb{C})$.*

Далее, через $\lambda_{2,\omega}^{\infty}\{\alpha_k\}$ обозначено множество тех функций $F(z) \in A_{\omega}^2(\mathbb{C})$, для которых существуют $\psi(z) \in H^2$, $\psi(0) = 0$ такие, что граничные значения $\psi(z)/B(1/z)$ и $L_{\omega}^{\infty} F(z)$ совпадают почти всюду на $|z| = 1$.

Предложение 3. Функции (5.27) принадлежат $\lambda_{2,\omega}^\infty\{\alpha_k\}$, и системы (5.27) биортогональны в $A_\omega^2(\mathbb{C})$, т.е.

$$(r_{k,\omega}^\infty, \Omega_{k,\omega}^\infty)_\omega \equiv \iint_{\mathbb{C}} r_{k,\omega}^\infty(\zeta) \overline{\Omega_{k,\omega}^\infty(\zeta)} d\mu_\omega(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{если } \nu = k \\ 0 & \text{если } \nu \neq k. \end{cases}$$

Предложение 4. Если $F(z) \in A_\omega^2(\mathbb{C})$, то $F(z) \in \lambda_{2,\omega}^\infty\{\alpha_k\}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{L_\omega^\infty F(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Предложение 5. Любая функция $f(z) \in A_\omega^2(\mathbb{C})$ представима в виде ортогональной суммы: $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, $\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$, где $f_1(z) \in \lambda_{2,\omega}^\infty\{\alpha_k\}$, и

$$f_2(z) = T_\omega(B(z)g(z)) \in A_\omega^2(\mathbb{C}), \quad g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{L_\omega^\infty f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H^2.$$

Предложение 6. Если $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$ и $\{w_k\}_1^\infty$ - последовательность комплексных чисел, для которой

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |\alpha_k|) |w_k|^2 < +\infty,$$

то существует единственная функция $F(z) \in \lambda_{2,\omega}^\infty\{\alpha_k\}$ такая, что

$$(5.28) \quad L_\omega^\infty F(\alpha_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функция $F(z)$ представима в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^\infty w_k \Omega_{k,\omega}^\infty(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

где ряд сходится в норме пространства $A_\omega^2(\mathbb{C})$, и $F(z)$ является решением интерполяционной задачи (5.28) с минимальной нормой.

Предложение 7. Каждая из систем

$$\{(1 - |\alpha_k|^2)^{1/2} r_{k,\omega}^\infty(z)\}_1^\infty \quad \text{и} \quad \{(1 - |\alpha_k|^2)^{-1/2} \Omega_{k,\omega}^\infty(z)\}_1^\infty$$

является безусловным базисом в $\lambda_{2,\omega}^\infty\{\alpha_k\}$ тогда и только тогда, когда $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$.

Предложение 8. Если $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$, то любая функция $F(z) \in \lambda_{2,\omega}^\infty\{\alpha_k\}$ представима в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^\infty c_k(F) r_{k,\omega}^\infty(z) = \sum_{k=1}^\infty L_\omega^\infty F(\alpha_k) \Omega_{k,\omega}^\infty(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad c_k(F) = (F, \Omega_{k,\omega}^\infty)_\omega,$$

где оба ряда сходятся в норме пространства $A_\omega^2(\mathbb{C})$.

Отметим, что отмеченные биортогональные системы отличны от биортогональных систем, исследованных А. Ф. Леонтьевым [162].

5.8. Унитарные операторы в $A_\omega^2(\mathbb{C})$. В этом пункте изложен результат работы [94] о полном описании унитарных операторов, действующих в произвольно широких гильбертовых пространствах $A_\omega^2(\mathbb{C})$ целых функций.

Теорема 25. *Для любого унитарного оператора U , действующего в пространстве $A_\omega^2(\mathbb{C})$ ($\omega \in \Omega_A^\infty$) существует функция $K(z, \zeta)$, принадлежащая $A_\omega^2(\mathbb{C})$ по переменным z и $\bar{\zeta}$ и удовлетворяющая условиям*

$$(5.29) \quad K(z, \zeta) = K(\bar{\zeta}, \bar{z}), \quad z, \zeta \in \mathbb{C},$$

$$(5.30) \quad C_\omega(\zeta_1 \bar{\zeta}_2) = \iint_{\mathbb{C}} K(z, \zeta_2) \overline{K(z, \zeta_1)} d\mu_\omega(z), \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}.$$

При помощи этого ядра равенства $g = Uf$ и $f = U^{-1}g$ ($f, g \in A_\omega^2(\mathbb{C})$) записываются в виде

$$(5.31) \quad g(z) = \iint_{\mathbb{C}} f(\zeta) \overline{K(\zeta, z)} d\mu_\omega(\zeta), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$(5.32) \quad f(z) = \iint_{\mathbb{C}} g(\zeta) K(z, \zeta) d\mu_\omega(\zeta), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Обратно, если функция $K(z, \zeta)$ принадлежит $A_\omega^2(\mathbb{C})$ по переменным z и $\bar{\zeta}$ и условия (5.29) и (5.30) соблюдены, то формулы (5.31) и (5.32) соответственно представляют унитарный оператор U и обратный оператор U^{-1} в $A_\omega^2(\mathbb{C})$.

6. ДАЛЬНЕЙШИЕ ОБОБЩЕНИЯ И АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

6.1. Представления весовых классов голоморфных и гладких функций в многомерных областях. Отметим, что каноническое представление (1.6) обладает естественными обобщениями в многомерных областях из $\mathbb{C}^n$. В единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ формула близкая к обобщению (1.6) установлена в [129] (см. также [130]) в частном случае, когда $\alpha = 1$. В общем же случае пространств A_α^p , обобщение формулы (1.6) в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ установлено в [27]. Далее, в связи с теорией пространств A_ω^p в $|z| < 1$ первым соавтором данной статьи была поставлена задача о распространении некоторых результатов работы [91] на сколь угодно широкие, весовые пространства голоморфных и гармонических функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$, которая была решена установлением в [120, 121, 122]

аналогичных формул представления в сколь угодно широких весовых пространствах голоморфных и гармонических функций в единичных шарах пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$. Особо отметим работу [122], в которой введены наиболее общие пространства A_ω^p в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ и установлены аналоги основополагающих представлений (5.4) и (5.5) в этих пространствах.

Дальнейшие обобщения этих весовых пространств и их интегральных представлений для матричного диска рассмотрены в работах [149, 159, 38, 39, 104].

Определив классы непрерывно дифференцируемых в $|z| < 1$ функций $f(z)$ условиями (1.2) и

$$\iint_{|z|<1} (1 - |\zeta|)^{\alpha-1} \left| \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right| dm_2(\zeta) < +\infty.$$

Ф. А. Шамоян [58] доказал справедливость представления

$$(6.1) \quad \begin{aligned} f(z) = & \frac{\alpha}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{(1 - |\zeta|^2)^{\alpha-1}}{(1 - \bar{\zeta}z)^{1+\alpha}} f(\zeta) d\sigma(\zeta) \\ & + \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z} \right)^\alpha \frac{\partial f(\zeta)/\partial \bar{\zeta}}{z - \zeta} d\sigma(\zeta), \quad |z| < 1, \end{aligned}$$

переходящего в (1.6) при голоморфности $f(z)$, поскольку $\partial f(\zeta)/\partial \bar{\zeta} = 0$ и последний интеграл исчезает. Отметим, что формула (6.1) была приведена без доказательства в работе Ф. Шарпантье [135] при сильном ограничении $f(z) \in C^1$ в $|z| \leq 1$. Там же установлен аналог формулы (6.1) в единичном шаре и полидиске из $\mathbb{C}^n$. При этом, результат [135] для шара следует из более ранней работы [160], где аналогичные формулы получены в строго псевдовыпуклых областях. В [116, 118, 119] в полидиске и шаре из $\mathbb{C}^n$ установлены отличные от [135] $\bar{\partial}$ -интегральные формулы. Подобные весовые $\bar{\partial}$ -интегральные представления в матричном диске установлены в [107, 109].

В работе [28] установлены весовые $\bar{\partial}$ -интегральные представления гладких в $|z| < 1$ функций с весами $|z|^\gamma (1 - |z|^\rho)^\alpha dm(z)$. Эти представления обобщены на случаи единичного шара и полидиска в [102, 117].

В области представлений весовых классов голоморфных и гладких функций в $\mathbb{C}^n$ имеются следующие результаты. В [42] были установлены интегральные представления с ядрами типа Миттаг-Леффлера для целых функций из весовых пространств, определяемых условием

$$\|f\|^p = \iint_{\mathbb{C}^n} |f(w)|^p e^{-\sigma|w|^\rho} |w|^\gamma dm(w) < +\infty$$

($1 < p < \infty$, $\gamma > -2n$, $\rho, \sigma > 0$). В этих классах рассмотрены вопросы распределения нулей, существования базиса и установлены теоремы единственности. Отметим, что при $\rho = 2$, $\gamma = 0$ аналогичные представления были получены в [164] для гладких в $\mathbb{C}^n$ функций.

В [28] при $n = 1$ установлены аналоги представлений [42] для гладких функций в конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Эти же представления обобщены на случай $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 1$) в работах [117, 103, 106].

В [110] построены воспроизводящие ядра для весовых пространств целых функций $f(z)$ со смешанной нормой

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x + iy)|^p dx \right)^s |y|^\alpha e^{-\sigma|y|^\rho} dy < +\infty,$$

где $1 \leq p \leq 2$, $\rho > 1$, $\sigma > 0$, $\alpha > -n$ и $s \geq 2/p$.

6.2. Другие, родственные результаты. Согласно классической теореме И. И. Привалова, если плотность интеграла типа Коши $K(f)$ на единичной окружности принадлежит классу $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < 1$), то сам интеграл $K(f)$ принадлежит классу $\text{Lip } \alpha$ в замкнутом круге. Аналог этой теоремы в шаре из $\mathbb{C}^n$ изложен в [130]. Однако, как было установлено в работе [163], на единичном торе можно построить функцию f из $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) такую, чтобы $K(f)$ не принадлежал тому же классу в замкнутом полидиске. Отсюда возникла задача обобщения на многомерный случай классов $\text{Lip } \alpha$ - так, чтобы обобщенные классы оставались инвариантными относительно интеграла типа Коши. Указанная задача была решена в работе Ф. А. Шамояна и А. В. Арутюнян [66].

В работе Ф. А. Шамояна [62] были введены следующие анизотропные пространства голоморфных в полидиске функций. Полагая, что $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, где все $\omega_j \in S$ и введя $A^p(\vec{\omega})$ как множество голоморфных в полидиске функций, принадлежащих классу $L^p(|\vec{\omega}| dm_2)$, где $|\vec{\omega}(z)| = \prod_{j=1}^n \omega_j(1 - |z_j|)$, а m_{2n} - $2n$ -мерная мера Лебега в полидиске, в работе [62] получено полное описание линейных непрерывных функционалов в пространствах $A^p(\vec{\omega})$ при всех $0 < p < +\infty$. При этом, многомерные пространства $A^p(\vec{\alpha})$ М. М. Джрбашяна получаются из $A^p(\vec{\omega})$, если положить $\omega_j(t) = t^{\alpha_j}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, и они введены в работе [58], где решены также другие задачи комплексного анализа. При исследовании $A^p(\vec{\omega})$ в случае $0 < p \leq 1$ естественным образом возникают обобщения $\Lambda_{\vec{\omega}}^p$ классов Блоха в полуплоскости.

Описание сопряженных пространств играет существенную роль при исследовании теплицевых и ганкелевых операторов в пространствах $A^p(\vec{\omega})$. Исследование теплицевых операторов в пространствах A_α^p проводилось в совместной работе Ф. А. Шамояна и А. В. Арутюнян [63]. Подробное доказательство этих результатов приведено в кандидатской диссертации А. В. Арутюнян [111]. В дальнейшем Ф. А. Шамоян со своими аспирантами исследовал более общие анизотропные пространства голоморфных в шаре и в полидиске функций со смешенными нормами, а также теплицевы операторы в указанных пространствах. В частности, в работе [78] были исследованы пространства типа $A^p(\vec{\alpha})$ в односвязных областях с квазиконформными границами.

Воспользовавшись аналитическим аппаратом, созданным в [111, 66], А. В. Арутюнян описала липшицевы классы с весом ω регулярного поведения, где исследовала ограниченность оператора Теплица [112]. Кроме того, она установила, что операторы Теплица ограничены во всех пространствах $A^p(\omega)$ ($0 < p < \infty$) с весом ω регулярного поведения и, при различных ограничениях на ω , получила соответствующие условия, которым должен удовлетворять символ h оператора [66, 113]. В тех же работах [66, 113] дано описание всех символов h , при которых оператор Теплица T_h ограничен в пространстве $A^p(\omega)$ ($0 < p < \infty$).

Описание пространств $(A^p(\alpha))^*$ ($0 < p \leq 1$) неразрывно связано с определенными классами Блоха голоморфных функций, и переход к общим пространствам $A^p(\omega)$ с весом ω регулярного поведения привел к введению новых, ω -весовых классов Блоха, аналогичных рассмотренным в полидиске [114]. Кроме того, в [114] вместе с описанием пространств, сопряженных $A^p(\omega)$ ($0 < p \leq 1$), исследована ограниченность и обратимость некоторых интегральных операторов. Далее, в [115] рассмотрены некоторые классы одномерных голоморфных функций с суп-нормой, где найдены необходимые и достаточные условия для ограниченности оператора дифференцирования.

7. ОБ АНАЛИЗЕ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ В КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Все вышеприведенные результаты относятся к построению универсальной теории факторизации мероморфных или представлений δ -субгармонических функций, а также анализу произвольно широких пространств регулярных функций в круге и в конечной комплексной плоскости.

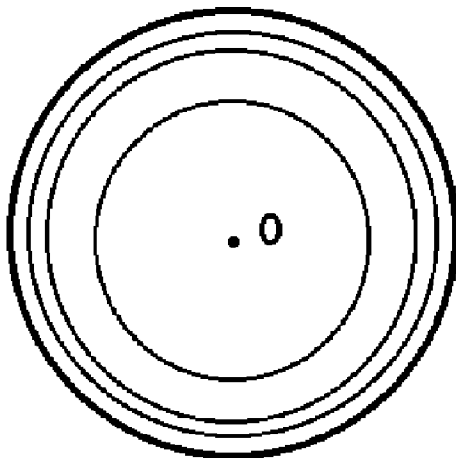


Рис. 1. Глобальная задача в круге. Единичный круг на сфере Римана.

Далее, в статье будут приведены результаты, относящиеся к теории весовых классов и пространств функций голоморфных, мероморфных и δ -субгармонических в полуплоскости. Результаты этой теории относятся уже к другим классическим задачам комплексного анализа, которые естественно рассматривать в полуплоскости. Для изъяснения сути всех таких результатов, сформулируем четыре классические задачи в круге, в комплексной плоскости и полуплоскости, а также новую, пятую задачу, исследованную в [86].

Сначала заметим, что как круг, так и полуплоскость являются полусферами на римановой сферической модели комплексной плоскости, а комплексная плоскость - всей сферой.

I-я задача. Исследовать функцию при наличии условия, ограничивающего ее рост в окрестности бесконечно удаленной точки и *независимого от направления приближения к ∞* , т.е. инвариантного относительно вращения вокруг начала координат. Это - локальная задача, поскольку анализ функции основан на локальном ее росте вблизи точки ∞ . Классическим примером является общеизвестная теорема Адамара о факторизации целых функций конечного порядка. К решению этой задачи относятся факторизации произвольно широких классов целых мероморфных функций, установленные в [20], а также приведенные выше теоремы 21, 22, 23, 24 и утверждения пункта 5.7.

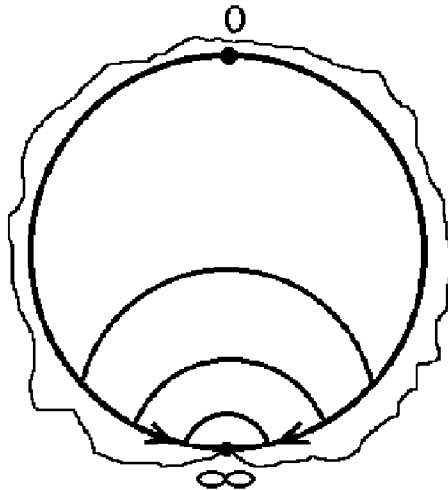


Рис. 2. Локальная задача в полуплоскости. Верхняя полуплоскость на сфере Римана.

II-я задача. Рост функции в единичном круге комплексной плоскости ограничен условием, инвариантным относительно вращения вокруг начала координат. Классическим примером являются пространства Харди H^p ($0 < p < +\infty$), определенные условием

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^p d\vartheta < +\infty$$

Другой пример - класс Неванлины N мероморфных функций ограниченного вида в круге $|z| < 1$. Решению этой задачи посвящены также все приведенные выше результаты по весовым классам в $|z| < 1$.

III-я задача. Рассматриваемые функции подразумеваются в некотором смысле регулярными вплоть до границы области, за исключением точки ∞ . Рост же функций ограничен только вблизи ∞ . Классическим примером являются условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^+(x)}{1+x^2} dx < +\infty,$$

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi u^+(Re^{i\vartheta}) \sin \vartheta d\vartheta < +\infty$$

Р. Неванлинны (см., напр., [90], гл. 7), при которых функция, субгармоническая в некоторой области, содержащей замкнутую полуплоскость $\text{Im } z \geq 0$ имеет в

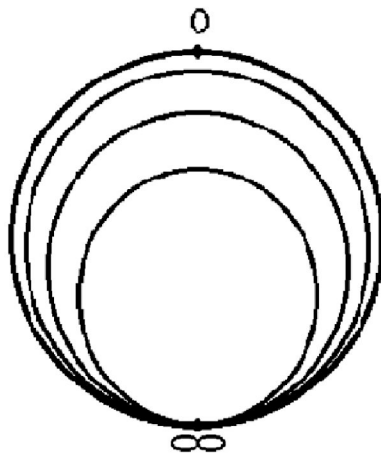


Рис. 3. Глобальная задача в полуплоскости. Верхняя полуплоскость на сфере Римана.

$\text{Im } z > 0$ неотрицательную гармоническую мажоранту. Другим примером является принцип Фрагмена-Линделефа, подразумевающий, что обе эти величины равны нулю.

IV-ая задача. Рост функций ограничен некоторым условием, инвариантным при параллельном сдвиге полуплоскости относительно ее границы. Таким условием “выделяется” только точка ∞ , остальные же, конечные граничные точки рассматриваются равнозначно, т.е. *граница области рассматривается как две точки - ∞ и совокупность остальных, конечных граничных точек*. Это - аналог глобальной задачи II в полуплоскости. Классическим примером являются пространства Харди

$$H^p : \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dx < +\infty$$

Другой пример - классы $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}^m$ В. И. Крылова [143] - Е. Д. Соломенцева [144] субгармонических в $\text{Im } z > 0$ функций $u(z)$ с ограниченной характеристикой Цудзи:

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \mathfrak{N} : \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} u^+(x+iy) dx < +\infty, \\ \mathfrak{N}^m : \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+iy)| dx < +\infty. \end{aligned}$$

Различны также технические аппараты, свойственные случаям конечной комплексной плоскости, кругу и полуплоскости. В частности, аналогом разложения

Тейлора голоморфной в круге функции в полуплоскости является преобразование Лапласа.

V-ая задача. Рост функции предполагается ограниченным двумя условиями - “глобальным” (инвариантным относительно сдвига) и локальным. Установлено [85, 86] (см. также [90], гл. 7), что *субгармоническая в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *функция* $u(z)$ *обладает там неотрицательной гармонической мажорантой тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \liminf_{y \rightarrow +0} \int_{-R}^R u^+(x + iy) \frac{dx}{1 + x^2}$$

и, одновременно,

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi u^+(Re^{i\vartheta}) \sin \vartheta d\vartheta < +\infty.$$

В результате установлены теоремы, которые в частности в себе содержат классическую факторизацию Неванлинны [5] в полуплоскости (см. также [147]), и, в добавок, усиления теоремы единственности Неванлинны и теоремы типа Фрагмена-Линделефа, принадлежащей Л. Альфорсу - М. Хейнсу [13], где общепринятое условие

$$\limsup_{z \rightarrow t, \operatorname{Im} z > 0} u(z) \leq 0, \quad -\infty < t < +\infty,$$

заменено менее ограничительным, интегральным условием

$$\liminf_{y \rightarrow +0} \int_a^b u(x + iy) dx = 0, \quad \forall [a, b] \subset (-\infty, +\infty).$$

Развитый метод приводит также к новому, эквивалентному определению классических пространств Харди в полуплоскости, а также к теореме о некоторых весовых классах H^p в полуплоскости (см. [90], гл. 7).

8. ФУНКЦИИ α -ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Основы теории мероморфных функций α -ограниченного вида в полуплоскости заложены в ряде работ одного из авторов данной статьи и подытожены в его монографии [90], часть основных результатов которой описана ниже. Эта теория, как, по существу, все известные результаты в полуплоскости, относится к решению задач III, IV и V, сформулированных в §7.

1. Рассуждением, основанным на аналогиях, введены зависящие от непрерывного параметра $\alpha \in (-1, +\infty)$ функции типа Бляшке для нижней полуплоскости

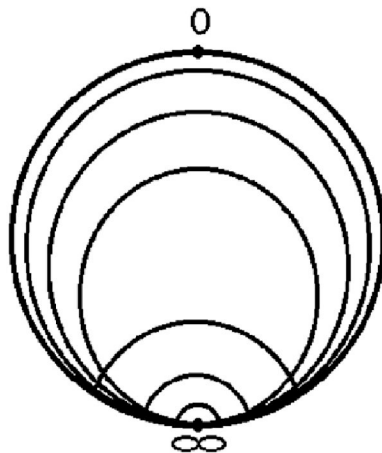


Рис. 4. Глобально-локальная задача. Верхняя полуплоскость на сфере Римана.

$G^- = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$, с факторами вида

$$(8.1) \quad b_\alpha(w, \zeta) = \exp \left\{ - \int_{-|\eta|}^{|\eta|} \frac{(|\eta| - |t|)^\alpha dt}{[i(w - \xi) - t]^{1+\alpha}} \right\} \Big|_{\alpha=0} = \frac{w - \zeta}{w - \bar{\zeta}}$$

($w, \zeta = \xi + i\eta \in G^-$). Функция $b_\alpha(w, \zeta)$ ($-1 < \alpha < +\infty$) оказалась единственной, удовлетворяющей всем надлежащим условиям. В частности, она голоморфна в G^- , где имеет единственный нуль, притом первого порядка, только в точке $\zeta \in G^-$. Далее, необходимыми свойствами обладает функция $W^{-\alpha} \log |b_\alpha(w, \zeta)|$, где $W^{-\alpha}$ - оператор дробного интегро-дифференцирования Лиувилля:

$$\begin{aligned} W^{-\alpha} u(w) &\equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} u(w - i\sigma) d\sigma, \quad 0 < \alpha < +\infty, \\ W^0 u(w) &\equiv u(w), \\ W^\alpha u(w) &\equiv W^{-(p-\alpha)} \frac{\partial^p}{\partial v^p} u(u + iv), \quad 0 < \alpha < +\infty, \quad p-1 < \alpha \leq p. \end{aligned}$$

Условие же сходимости произведения

$$(8.2) \quad B_\alpha(w, \{w_k\}) = \prod_k b_\alpha(w, w_k), \quad \{w_k\} \subset G^-, \quad -1 < \alpha < +\infty,$$

имеет вид

$$(8.3) \quad \sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty.$$

2. Решая задачи III и IV для более широких, чем классические, множеств голоморфных в полуплоскости функций, с привлечением оператора Лиувилля построена теория факторизации граничных свойств весовых классов голоморфных в полуплоскостим функций, зависящих от непрерывного параметра α ($-1 < \alpha < +\infty$). При этом, локальную задачу III оказалось целесообразно рассматривать для функций, мероморфных в нижней полуплоскости, в несколько ином виде - переместив существенно особую точку из бесконечно удаленной в начало координат. Затем инверсией, переводящей существенно особую точку в бесконечно удаленную, а оператор Лиувилля - в оператор типа Римана-Лиувилля, с криволинейным контуром интегрирования, полученные результаты переведены в верхнюю полуплоскость.

Таким образом, для решения задач III и IV введены новые характеристики типа Неванлинны для угла и типа Цудзи (см. [147, 153]). Ограниченностью новой характеристики типа Неванлинны были введены некоторые классы функций голоморфных в замкнутой полуплоскости, включающие функции любого конечного порядка в ∞ . Доказанные для этих классов факторизационные теоремы при $\alpha = 0$, по существу, переходят в факторизацию Неванлинны [5]. В свою очередь, ограниченностью новых характеристик типа Цудзи введены классы $\mathfrak{N}_\alpha$ и $\mathfrak{N}_\alpha^m$ ($-1 < \alpha < +\infty$) голоморфных в полуплоскости функций, и при $\alpha = 0$ факторизационные теоремы, установленные для этих классов, по существу, переходят в теоремы В. И. Крылова для классов $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}^m$ [143] (т.е. (7.1) с $u(z) \equiv \log |f(z)|$, где $f(z)$ голоморфна в нижней полуплоскости).

3. Для установления аналога факторизации (1.5) весовых классов функций в круге, путем отображения и последующего предельного перехода получены зависящие от $\alpha \in (-1, +\infty)$ семейства формул типа Б. Я. Левина и характеристик типа Цудзи. Затем, тем же путем получены канонические факторизации для классов типа В. И. Крылова - мероморфных в полуплоскости функций, характеристики Цудзи которых могут иметь степенной рост. В полученных канонических факторизациях участвуют произведения типа Бляшке, введенные в [81] по аналогии с (8.1). Далее, получены своеобразные аналоги результатов Ф. А. Шамояна [56] в круге. А именно, оценка типа Цудзи (см. [157], теорема V.25) для произведений типа Бляшке из [81], с применением которой установлены параметрические представления рассмотренных классов мероморфных в полуплоскости функций.

4. Обобщена общеизвестная теорема Герглотца-Рисса о параметрическом представлении класса $\mathbf{R}$ голоморфных в полуплоскости функций с неотрицательными вещественными частями. А именно, установлены параметрические представления зависящих от $\alpha \in (-1, +\infty)$ классов голоморфных в полуплоскости функций, вещественные части которых сохраняют знак после применения оператора Лиувилля. Эти представления, в случае $\alpha = 0$ переходят в результаты Р. Неванлинны [4] (см. также [145], гл. II и [142], гл. III) и И. С. Каца [148] (см. также [152], дополнение I) о подклассах функций из класса $\mathbf{R}$, представимых интегралом Коши.

5. Изучены граничные свойства мероморфных функций α -ограниченного вида из наиболее общих классов $N_\alpha\{G^-\}$ ($-1 < \alpha < +\infty$). т.е. функций, допускающих в полуплоскости G^- представление вида

$$(8.4) \quad F(w) = \frac{B_\alpha(w, \{a_m\})}{B_\alpha(w, \{b_n\})} \exp \{c_0 + c_1 w\} \times \exp \left\{ \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(w-t)^{1+\alpha}} + iC \right\},$$

где c_0 , c_1 и C - вещественные числа ($c_0 = c_1 = 0$ при $\alpha \geq 0$), а $\mu(t)$ - функция ограниченной вариации на любом конечном отрезке из $(-\infty, +\infty)$, подчиненная условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{1+|t|^{1+\alpha-p}} < +\infty \quad (p - \text{целое, } p-1 < \alpha \leq p).$$

В формуле (8.4)

$$B_\alpha(w, \{a_m\}) \equiv \prod_m b_\alpha(w, a_m) \quad \text{и} \quad B_\alpha(w, \{b_n\}) \equiv \prod_n b_\alpha(w, b_n)$$

- сходящиеся произведения типа Бляшке (8.1)-(8.2), составленные по нулям $\{a_m\} \subset G^-$ и полюсам $\{b_n\} \subset G^-$ функции $F(w)$, плотность которых подчинена условию вида (8.3). При этом, основные результаты являются своеобразными аналогами известной теоремы Фростмана о граничных свойствах произведения Бляшке с "редкими" нулями. Установлена также теорема, относящаяся к граничным свойствам произведений типа Бляшке-Джрбашяна в круге, усиливающая результаты работ [32, 33] и, в качестве частного случая содержащая результат работы [80].

6. Установлены теоремы о равномерной аппроксимации с произвольной точностью в классах мероморфных функций α -ограниченного вида в полуплоскости. Аппроксимация произведена посредством конечных произведений факторов

(8.1). Эти теоремы являются своеобразными аналогами результатов М. М. Джрбашяна и Н. У. Аракеляна (см. [19], теоремы 5.12, 5.13) о равномерной аппроксимации функций классов $N\{\omega\}$ в круге. Одна из установленных теорем является аналогом известной теоремы Шура о том, что любую голоморфную и ограниченную в единичном круге (либо в полуплоскости) функцию можно равномерно аппроксимировать последовательностью произведений Бляшке.

7. Решение задачи V привело, по существу, к полному описанию классов субгармонических в G^- функций α -ограниченного вида, т.е. разностей субгармонических функций, имеющих неотрицательные гармонические мажоранты в G^- после применения оператора Лиувилля.

8. В работе [82] выявлены новые пути применения факторизаций функций α -ограниченного вида в круге и в полуплоскости в спектральной теории линейных операторов. Следует отметить, что применение такого рода результатов представляет особый интерес для специалистов по теории операторов. В частности, М. Г. Крейном впервые была высказана необходимость нахождения применений результатов М. М. Джрбашяна еще на Московском математическом конгрессе 1966г. В дальнейшем М. С. Лифшицу [155] и его ученикам (Л. Меграбяну, До Конг Хану и другим) удалась реализация мероморфных функций классов N_α в виде передаточных функций некоторых специальных линейных систем. Однако, применения, найденные в [82] (см. также [90], гл. 9), относящиеся к $\mathfrak{S}_p$ -возмущениям самосопряженных операторов, повидимому, более естественны.

9. ПРОСТРАНСТВА $A_{\omega,\gamma}^p$ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

В свете изложенной в §2 теории факторизации в круге, возникла задача построения подобной общей теории в полуплоскости, в основе которого лежал бы аналитический аппарат преобразования Фурье-Лапласа - взамен аппарата рядов Фурье-Тейлора теории классов $N\{\omega\}$ в круге.

В этом параграфе излагаются результаты работ [92, 93], где нужный подход найден и положены основы теории наиболее общих пространств $A_{\omega,\gamma}^p$ и классов типа Крылова, совокупность которых охватывает голоморфные в верхней полуплоскости $G^+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$ функции с любым ростом в конечных точках вещественной оси. Отметим, что рассмотренные здесь пространства $A_{\omega,\gamma}^p$ совпадают с введенными и исследованными в [161, 131, 36] пространствами A_α^p в очень частном случае.

9.1. Определение пространств $A_{\omega,\gamma}^p$. Для определения пространств $A_{\omega,\gamma}^p$ ($0 < p < +\infty$, $-\infty < \gamma \leq 2$) в верхней полуплоскости в общем случае необходимо наложение неванлинновского условия роста вблизи ∞ , при котором функция оказалась бы “достаточно хорошей” в любой полуплоскости, лежащей выше вещественной оси. А именно, пространства $A_{\omega,\gamma}^p$ ($0 < p < +\infty$, $-\infty < \gamma \leq 2$) введены как множества тех голоморфных в G^+ функций $f(z)$, которые при достаточно малых $\rho > 0$ удовлетворяют неванлинновскому условию

$$(9.1) \quad \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{\beta}^{\pi-\beta} \log^+ |f(Re^{i\vartheta})| \left(\sin \frac{\pi(\vartheta - \beta)}{\pi - 2\beta} \right)^{\pi/\kappa-1} d\vartheta = 0$$

где $\beta = \arcsin \frac{\rho}{R} = \frac{\pi}{2} - \kappa$, вместе с условием

$$(9.2) \quad \|f\|_{p,\omega,\gamma}^p \equiv \iint_{G^+} |f(z)|^p \frac{d\mu_{\omega}(z)}{(1+|z|)^{\gamma}} < +\infty,$$

где $d\mu_{\omega}(x+iy) = dx d\omega(2y)$ и предполагается, что $\omega(t) \in \Omega_{\alpha}$ ($-1 \leq \alpha < +\infty$), т.е. функция $\omega(t)$ задана на полуоси $[0, +\infty)$ и такова, что

- (i) $\omega(t) \nearrow$ в $(0, +\infty)$, $\omega(0) = \omega(+0)$ и $\omega(\delta_k) \downarrow$ на какой-то последовательности $\delta_k \downarrow 0$,
- (ii) $\omega(t) \asymp t^{1+\alpha}$ при $\Delta_0 \leq t < +\infty$ и некотором числе $\Delta_0 \geq 0$.

Через $L_{\omega,\gamma}^p$ обозначается лебегово пространство, определенное только условием (9.2), без требования о голоморфности.

Установлено, что $A_{\omega,\gamma}^p = (i+z)^{\gamma/p} A_{\omega,0}^p$. Кроме того, при $p \neq 2$ пространство $A_{\omega,\gamma}^p$ - банахово, а при $p = 2$ - Гильбертово. Причем, если $\omega(t) = t^{\alpha}$ ($\alpha > 0$) и $\gamma = 0$, то $A_{\omega,\gamma}^p$ совпадает с пространством A_{α}^p , введенным и исследованным в [161, 131, 36]. В этом частном случае (9.2) обеспечивает выполнение неванлинновского условия (9.1), что в общем случае не верно.

Отметим, что в общем случае при выполнении (9.2) неванлинновское условие (9.1) равносильно выполнению при достаточно малых $\rho > 0$ любого из следующих трех условий:

$$\begin{aligned} \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{\beta}^{\pi-\beta} |f(Re^{i\vartheta})|^p \left(\sin \frac{\pi(\vartheta - \beta)}{\pi - 2\beta} \right)^{\pi/\kappa-1} d\vartheta &< +\infty, \\ \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\pi} \log^+ |f(Re^{i\vartheta} + i\rho)| \sin \vartheta d\vartheta &= 0, \\ \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^{\pi} |f(Re^{i\vartheta} + i\rho)|^p \sin \vartheta d\vartheta &< +\infty. \end{aligned}$$

9.2. Канонические представления. Следующие две теоремы дают канонические представления функций классов $A_{\omega,\gamma}^p$ с ядрами $C_\omega(z)$ вида (4.1) в существен-но различных случаях, когда носитель меры $d\omega$, ограничен (т.е. $\omega(t) = \text{const}$, $0 < \Delta < t < +\infty$, и когда интеграл (9.2) берется по всей полуплоскости.

Теорема 26. Пусть $f(z) \in A_{\omega,\gamma}^p(G^+)$ при каких-либо значениях $1 \leq p < +\infty$, $-\infty < \gamma < 1$ и функции $\omega(x)$ удовлетворяющей условию (i) и такой, что $\omega(t) = \omega(\Delta) < +\infty$ ($\Delta < t < +\infty$) при каком-либо $\Delta > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} f(w) C_\omega(z - \bar{w}) d\mu_\omega(w) \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{G^+} \{\text{Re } f(w)\} C_\omega(z - \bar{w}) d\mu_\omega(w), \quad z \in G^+, \end{aligned}$$

где оба интеграла абсолютно и равномерно сходятся внутри G^+ .

Теорема 27. Если $f(z) \in A_{\omega,\gamma}^p$ при каких-либо значениях $1 \leq p < +\infty$ и $-\infty < \gamma < 1 - (1 + \alpha)(p - 1)$, то

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} f(w) C_\omega(z - \bar{w}) d\mu_\omega(w) \\ (9.3) \quad &= \frac{1}{\pi} \iint_{G^+} \{\text{Re } f(w)\} C_\omega(z - \bar{w}) d\mu_\omega(w), \quad z \in G^+, \end{aligned}$$

где оба интеграла абсолютно и равномерно сходятся внутри G^+ .

Отметим, что в случае $\omega(t) = t^\alpha$ представления (9.3) впервые были установ-лены в работе [36] методом специального отображения круга на полуплоскость с последующим предельным переходом. Далее, первое из представлений (9.3) с $1 \leq p \leq 2$ и $\omega(t)$, подчиненной иным условиям, впервые было установлено А. О. Карапетяном [96, 97] в пространствах со смешанной нормой в трубчатых обла-стях из $\mathbb{C}^n$

9.3. Ортогональная проекция, теорема типа Пэли-Винера, сопряжен-ное пространство.

Теорема 28. Если $\omega \in \Omega_\alpha$, $-1 \leq \alpha < 0$ и $\omega(0) = 0$, то ортогональная проекция лебегова пространства $L_{\omega,0}^2$ на $A_{\omega,0}^2$ задается формулой

$$P_\omega f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G^+} f(w) C_\omega(z - \bar{w}) d\mu_\omega(w), \quad f \in L_{\omega,0}^2.$$

Следующее утверждение - аналог теоремы Пэли-Винера.

Теорема 29. Если $\omega \in \Omega_\alpha$, $-1 \leq \alpha < 0$ и $\omega(0) = 0$, то пространство $A_{\omega,0}^2$ совпадает с множеством функций, допускающих представление в виде

$$(9.4) \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{itz} \frac{\Phi(t)}{\sqrt{I_\omega(t)}} dt, \quad z \in G^+, \quad \Phi(t) \in L^2(0, +\infty).$$

При справедливости такого представления $\|f\|_{A_{\omega,0}^2} = \|\Phi\|_{L^2(0, +\infty)}$ и

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{I_\omega(t)}} \int_0^{+\infty} e^{-tv} \widehat{f}_v(t) d\omega(2v),$$

где

$$\widehat{f}_v(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R e^{-itu} f(u + iv) du.$$

Отметим, что при абсолютно непрерывной мере $d\omega$ эта теорема следует из некоторых общих результатов [96, 97], в пространствах со смешанной нормой в произвольных трубчатых областях из $\mathbb{C}^n$.¹⁰ Отметим также, что если S - множество всех функций $\omega(x)$ ($\omega(0) = 0$), принадлежащих Ω_α при каких-либо $\alpha \in [-1, 0)$, то объединение $\cup_{\omega \in S} A_{\omega,0}^2$ совпадает со множеством тех функций, которые представимы в виде

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{itz} \Psi(t) dt, \quad z \in G^+,$$

где $e^{-\varepsilon t} \Psi(t) \in L^2(0, +\infty)$ хотя бы при каком-либо $\varepsilon > 0$. Следующей же теоремой дается дополнительная информация об отмеченной выше функции $\Phi(t)$.

Теорема 30. Пусть $\omega(t) \in \Omega_\alpha$ при каком-либо $\alpha \in [-1, 0)$, пусть $\omega(0) = 0$ и пусть $\widetilde{\omega}(x)$ - квадрат Волтерра функции $\omega(t)$, т.е.

$$\widetilde{\omega}(x) = \int_0^x \omega(x-t) d\omega(t), \quad 0 < x < +\infty.$$

Тогда $\omega(x) \in \Omega_{1+2\alpha}$, $\widetilde{\omega}(0) = 0$. Кроме того, $I_\omega^2(x) = I_{\widetilde{\omega}}(x)$ ($0 < x < +\infty$), и пространство $A_{\widetilde{\omega},0}^2$ совпадает с множеством функций, представимых в G^+ в виде

$$(9.5) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) C_\omega(z-t) dt, \quad \text{где } \varphi \in L^2(-\infty, +\infty).$$

Для любого $f(z) \in A_{\widetilde{\omega},0}^2$ функция $L_\omega f = \varphi_0$ - единственная из класса Харди H^2 по G^+ , с которой верна формула (9.5). Кроме того, $\|\varphi_0\|_{H^2} = \|f\|_{A_{\widetilde{\omega},0}^2}$ и $\varphi - \varphi_0 \perp H^2$ для любого $\varphi \in L^2(-\infty, +\infty)$, с которой верна формула (9.5). Оператор

$$L_\omega f(z) \equiv \int_0^{+\infty} f(z + i\sigma) d\omega(\sigma)$$

¹⁰Более подробно о работах по этой тематике будет сказано в §11 данной статьи.

изометрично отображает $A_{\omega,0}^2 \rightarrow H^2$, а интегралом (9.5) дается обратный оператор $(L_\omega)^{-1}$ в H^2 .

Таким образом, при условиях теоремы 30 функция $2\pi I_\omega(t)\Phi(t)$ является преобразованием Фурье от $L_\omega f(t)$. Кроме того, изометрия в явном виде (9.5) с $\varphi_0(z) \in H^2$ дает возможность перевести любой результат аддитивного характера, известный в классе Харди в полуплоскости, в аналогичный результат в A_ω^2 . В частности, это верно для аппроксимаций в H^2 рациональными функциями, чьими образами в A_ω^2 являются ядра $C_\omega(z)$ для полуплоскости.

При $p \neq 2$, с применением оценки (4.2) ядра $C_\omega(z)$ для некоторого класса функций ω регулярного поведения доказаны проекционные теоремы, которые содержат результат, известный в A_α^p . На основе этих теорем доказано, что сопряженное пространство A_ω^p идентифицируется посредством изоморфизма с A_ω^q ($1/p + 1/q = 1$) в частности для функций ω , для которых

$$|\omega'(x)| = M^{-1}(1-x)^\alpha \log^\gamma \frac{a}{1-x}, \quad M = \int_0^1 (1-t)^\alpha \log^\gamma \frac{a}{1-t} dt,$$

где $\alpha, \gamma > 0$ любые числа, а $a \geq e^{\gamma/(\alpha-\beta)}$ при некотором выборе β .

10. КЛАССЫ ТИПА НЕВАНЛИННЫ-ДЖРБАШЯНА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Полагая, что функция $U(z)$ δ -субгармонична в полуплоскости G^+ и ее ассоциированная мера ν разложена в разность неотрицательных Борелевых мер $\nu = \nu_+ - \nu_-$ с непересекающимися носителями, рассмотрим характеристику Цудзи

$$\mathcal{L}(y, U) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U^+(x + iy) dx + \int_y^{+\infty} n_+(t) dt, \quad 0 < y < +\infty,$$

где

$$n_+(t) = \iint_{G_t^+} d\nu_-(\zeta), \quad G_t^+ = \{\zeta : \operatorname{Im} \zeta > t\}.$$

Определив $\mathcal{L}(y, -U)$ тем же способом, посредством U^- и ν_+ отметим, что в общем случае величины $\mathcal{L}(y, U)$ и $\mathcal{L}(y, -U)$ могут быть бесконечными. Однако, при некоторых условиях они ограничены и связаны формулой Б. Я. Левина

$$\mathcal{L}(y, U) = \mathcal{L}(y, -U), \quad 0 < y < +\infty,$$

являющейся аналогом равновесия между Неванлинновскими характеристиками, но эти условия весьма ограничительны. Тем самым, целесообразно весовые классы определять условием роста, налагаемым на обе характеристики одновременно.

Через $\tilde{\Omega}_\alpha$ ($-1 < \alpha < +\infty$) обозначим класс функций $\omega(x)$, $\omega(0) = 0$, непрерывных, строго убывающих в $[0, +\infty)$, непрерывно дифференцируемых в $(0, +\infty)$ и таковых, что $\omega'(x) \asymp x^\alpha$ ($\Delta < x < +\infty$) при любом $\Delta > 0$. Класс $\mathfrak{N}_\omega$ ($\omega(x) \in \tilde{\Omega}_\alpha$, $-1 < \alpha < +\infty$) определим как множество функций $U(z)$, которые δ -субгармоничны в G^+ и удовлетворяют условию

$$\int_0^{+\infty} [\mathcal{L}(y, U) + \mathcal{L}(y, -U)] d\omega(2y) < +\infty.$$

Следующая теорема устанавливает каноническое представление δ -субгармонического класса $\mathfrak{N}_\omega$.

Теорема 31. Если $\omega(x) \in \tilde{\Omega}_\alpha$ ($-1 < \alpha < +\infty$), то:

1°. Функция

$$b_\omega(z, \zeta) = \exp \left\{ - \int_0^{2\operatorname{Im} \zeta} C_\omega(z - \zeta + it) \omega(t) dt \right\}, \quad \operatorname{Im} z > \operatorname{Im} \zeta,$$

голоморфна во всей полуплоскости G^+ , где имеет единственный, простой нуль в точке $z = \zeta$.

2°. Для любой функции $U(z) \in \mathfrak{N}_\omega$

$$\iint_{G^+} |U(z)| d\mu_\omega(z) < \infty \quad \text{и} \quad \iint_{G^+} \left(\int_0^{2\operatorname{Im} \zeta} \omega(t) dt \right) d\nu_\pm(\zeta) < \infty,$$

кроме того, для любого $\rho > 0$

$$\iint_{G_\rho^+} \operatorname{Im} \zeta d\nu_\pm(\zeta) < +\infty.$$

3°. Потенциалы типа Грина

$$P_\omega^{(\pm)}(z) \equiv \iint_{G^+} \log |b_\omega(z, \zeta)| d\nu_\pm(\zeta),$$

составленные по положительной и отрицательной вариациям ассоциированной меры функции $U(z)$ сходятся в G^+ , где

$$U(z) = \iint_{G^+} \log |b_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta) + \frac{1}{\pi} \iint_{G^+} U(w) \operatorname{Re} \{ C_\omega(z - \bar{w}) \} d\mu_\omega(w).$$

11. ПРОСТРАНСТВА ТИПА A_ω^p В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ ТИПА ПОЛУПЛОСКОСТИ

Как известно, С. Бохнер [139] установил многомерный аналог теоремы Пэли-Винера для пространств Харди H^2 в радиальных трубчатых областях из $\mathbb{C}^n$.

Позже С. Г. Гиндикин [151] распространил результат Бохнера на случай областей Зигеля второго рода, которые гораздо более общие по сравнению с радиальными трубчатыми областями. Более того, в §5 работы [151] была поставлена и решена задача несколько иного рода: *получить интегральные представления типа Пэли-Винера для функций голоморфных в областях Зигеля второго рода и суммируемых с квадратом по этим областям*. На основе этих представлений в явной форме были получены воспроизводящие ядра для соответствующих классов A_0^2 . Позже, в работе [161] аналогичные результаты в областях Зигеля второго рода были получены для классов типа A_α^2 .

Полагая, что B - область в $\mathbb{R}^n$ и $p, s > 0$ - любые числа, через $H_{s,\gamma}^p(T_B)$ обозначим множество всех функций $f(z) \equiv f(x + iy)$ голоморфных в трубчатой области

$$T_B = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : x \in \mathbb{R}^n, y \in B\}$$

и удовлетворяющих условию

$$M_{s,\gamma}^p(f) \equiv \int_B \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x + iy)|^p dx \right)^s \gamma(y) dy < +\infty,$$

где $\gamma(y) > 0$ вообще говоря, произвольная непрерывная функция в B . Оказывается, что при $1 \leq p \leq 2$ и определенных ограничениях на s для этих пространств имеют место теоремы типа Пэли-Винера. Невесовой случай $\gamma(y) \equiv 1$ рассматривался во множестве работ, из которых отметим [132, 35, 166].

В весовом же случае $\gamma(y) \neq 1$, когда B - острый, выпуклый конус, теоремы типа Пэли-Винера были установлены в [98, 99, 100, 101]. Там же, на основе этих теорем были построены воспроизводящие ядра Φ и получено представление

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T_B} f(w) \Phi(z, w) \gamma(v) du dv, \quad z \in T_B \quad (w = u + iv)$$

для функций $f \in H_{s,\gamma}^p(T_B)$.

Все отмеченные в этом параграфе результаты основаны на аппарате преобразования Фурье, который порождает ограничение $1 \leq p \leq 2$. Однако, как уже отмечалось, в [36] канонические представления пространств A_α^p в полуплоскости были получены с любым $1 \leq p < +\infty$ путем отображения с последующим предельным переходом. Применение такого метода перехода от ограниченных областей к неограниченным оказалось эффективным и в многомерном случае. В работах [37, 43] аналоги результатов [36] были получены в области Зигеля Ω_n , являющейся неограниченной реализацией единичного шара B^n . В [108] для

функций класса $C^1(\Omega_n)$ были установлены $\bar{\partial}$ -весовые интегральные представления. Далее, в [40, 41, 105] были получены дальнейшие аналоги результатов [36] — уже в матричных областях Зигеля.

Abstract. This survey gives the concept, the historical background and the results which lay ground for the investigations in the field of M. M. Djrbashian factorization theory and related problems of analysis. It gives some applications and results which reveal the fields of further, contemporary investigations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Biberbach, “Zur Theorie und Praxis der Konformen Abbildung”, Palermo Rendiconti, **38**, 98-118 (1914).
- [2] T. Carleman, “Über die Approximation Analytischer Funktionen durch Lineare Aggregate von Vorgegebenen Potenzen”, Arkhiv för Mat., Astr. och Fys., **17** (9) (1922).
- [3] F. Nevanlinna, R. Nevanlinna, “Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie”, Acta Soc. Sci. Fennicae, **50** (5), (1922).
- [4] R. Nevanlinna, “Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjesche Momentenproblem”, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI, **8** (5), (1922).
- [5] R. Nevanlinna, “Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum”, Acta Soc. Sci. Fennicae, **50** (12), 3-45 (1925).
- [6] S. Takenaka, “On the Orthogonal Functions and a New Formula of Interpolation”, Japanese J. Math., **2**, 129-145 (1925).
- [7] W. Wirtinger, “Über eine Minimumaufgabe im Gebiet der analytischen Funktionen”, Monatshefte für Math. und Phys., **39**, 377-384 (1932).
- [8] S. Bergman, “Über unendliche Hermitesche Formen, die zu einem Bereiche gehören, Nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von Zwei Komplexen Veränderlichen”, Math. Z., **29**, 641-677 (1929).
- [9] S. Bergman, “Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande”, I, J. Reine. Agnew. Math., **169**, 1-42 (1933), II, Ibid., **172**, 89-128 (1934).
- [10] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “Some Properties of Functional Integrals II”, Mathematische Zeitschrift, **34**, 403-439 (1932).
- [11] R. Nevanlinna, *Eindeutige Analytische Funktionen* (Springer, Berlin, 1936).
- [12] M. V. Keldysh, “Sur les Conditions pour Qu'un Systeme de Polynomes Orthogonaux Avec un Poids Soit Ferme”, Coptes Rendus (Doklady) Academie des Sciences USSR (ns), **30**, 778-780 (1941).
- [13] L. V. Ahlfors, M. Heins, “Questions of Regularity Connected with the Phragmen-Lindelöf Principle”, Ann. of Math., **50** (2), 341-346 (1949).
- [14] J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XX (Edwards Brothers, Inc., Ann Arbor, Michigan, 1956).
- [15] М. М. Джрбашян, “О каноническом представлении функций, мероморфных в единичном круге”, ДАН Арм. ССР, **3** (1), 3-9 (1945).
- [16] М. М. Джрбашян, “О проблеме представимости аналитических функций”, Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм. ССР, **2** 3-40 (1948).
- [17] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области* (Наука, Москва, 1966).
- [18] М. М. Джрбашян, “Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые приложения”, Известия АН СССР, Сер. матем., **32**, 1075-1111 (1968).
- [19] М. М. Джрбашян, “Теория факторизации функций, мероморфных в круге”, Мат. сборник, **79** (121) (4(8)), 517-615 (1969).
- [20] М. М. Джрбашян, “Факторизация функций мероморфных в конечной плоскости”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **5** (6), 453-485 (1970).

- [21] М. М. Джрбашян, “Биортогональные системы рациональных функций и представления ядрами Коши”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **8** (5), 384-409 (1973).
- [22] М. М. Джрбашян, “Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в H_2 ”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **9** (5), 339-373 (1974).
- [23] М. М. Djrbashian, “Theory of Factorization and Boundary Properties of Functions Meromorphic in the Disc”, in: Proceedings of the ICM, Vancouver, B.C., 1974, **2**, 197-202 (USA, 1975).
- [24] М. М. Джрбашян, “Об одном бесконечном произведении”, ДАН СССР, **240** (3), 518-521 (1978).
- [25] М. М. Джрбашян, “Некоторые открытые вопросы теории представлений аналитических функций”, в: Заметки науч. сем. ЛОМИ, **81**, 238-241 (1978).
- [26] М. М. Djrbashian, “Some Open Problems in the Theory of Representations of Analytic Functions”, in: Lecture Notes in Mathematics, **1043**, 522-526 (Springer-Verlag, 1984).
- [27] М. М. Джрбашян, “Краткий обзор результатов исследований математиков Армении в области теории факторизации мероморфных функций и ее приложений”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **22** (6), 517-545 (1988).
- [28] М. М. Джрбашян, “Весовые интегральные представления аналитических и гладких функций в единичном круге и в $\mathbb{C}$ ”, Известия НАН Армении, Математика, **28** (4), 3-33 (1993).
- [29] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, “Граничные свойства мероморфных функций класса N_α ”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **2** (5), 275-294 (1967).
- [30] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, “О факторизации функции B_α ”, Матем. заметки, **4** (1), 3-10 (1968).
- [31] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, “О граничных свойствах мероморфных функций класса N_α ”, ДАН СССР, **173** (121), 1247-1250 (1969).
- [32] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, “Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида”, Изв. АН СССР, **34** (6), 1262-1339 (1970).
- [33] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, “Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **6** (2-3), 182-194 (1971).
- [34] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, *Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге* (Наука, Москва, 1993).
- [35] М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян, “Интегральные представления некоторых классов функций голоморфных в полосе или в полуплоскости”, ДАН СССР, **283** (5), 1054-1057 (1985).
- [36] М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян, “Интегральное представление для некоторых классов аналитических функций в полуплоскости”, ДАН СССР, **285** (3), 547-550 (1985).
- [37] М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, “Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области Зигеля”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **22** (4), 399-405 (1987).
- [38] М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, “Интегральные представления в обобщенном единичном круге”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **24** (6), 523-546 (1989).
- [39] М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, “Интегральные представления в обобщенном единичном круге”, ДАН СССР, **312** (1), 24-27 (1990).
- [40] М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, “Интегральные представления в обобщенной верхней полуплоскости”, ДАН СССР, **312** (2), 270-273 (1990).
- [41] М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, “Интегральные представления в обобщенной верхней полуплоскости”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **25** (6), 507-533 (1990).
- [42] М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, “Интегральные представления и теоремы единственности для целых функций многих переменных”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **26** (1), 3-19 (1991).
- [43] М. М. Djrbashian, A. H. Karapetyan, “Integral Representations for Some Classes of Functions Holomorphic in a Siegel domain”, J. Math. Anal. Appl., **179** (1), 91-109 (1993).
- [44] В. С. Захарян, “О радиальных предельных значениях одного класса функций, мероморфных в круге”, Изв. АН СССР, Серия матем., **27** (4), 801-818 (1963).

- [45] В. С. Захарян, “Теоремы единственности для некоторых классов функций, мероморфных в круге”, ДАН Арм. ССР, **36** (1), 3-9 (1963).
- [46] В. С. Захарян, “Теоремы единственности для некоторых классов функций, голоморфных в круге”, Мат. сборник, **10** (1), 3-22 (1963).
- [47] В. С. Захарян, “О сегментном изменении одного класса аналитических функций”, Известия АН Арм. ССР, Математика, **2** (2), 117-122 (1967).
- [48] В. С. Захарян, “Радиальные пределы и радиальные изменения произведения B_α ”, Известия АН Арм. ССР, Математика, **3** (1), 38-51 (1968).
- [49] В. С. Захарян, “О радиальных предельных значениях функции B_α ”, Известия АН Арм. ССР, Математика, **3** (4, 5), 287-300 (1968).
- [50] В. С. Захарян, “Оценка роста для мероморфных функций класса N_α ”, Известия АН Арм. ССР, Математика, **9** (2), 85-106 (1974).
- [51] В. С. Захарян, “Сегментальные вариации потенциала типа Грина”, ДАН Арм. ССР, **66** (4), 212-215 (1978).
- [52] В. С. Захарян, “Об одной оценке роста для произведения М. М. Джрбашяна”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **23** (2), 189-192 (1988).
- [53] В. С. Захарян, Л. А. Сехпосян, “Оценка роста для мероморфных функций класса $N\{\omega\}$ ”, Известия АН Арм. ССР, Математика, **15** (5), 348-368 (1979).
- [54] В. С. Захарян, А. Г. Унанян, “Вариация потенциалов типа Грина на сегменте”, ДАН Арм. ССР, **73** (1), 3-8 (1981).
- [55] В. С. Захарян, С. В. Мадоян, “О граничных значениях функций класса N_α ($-1 < \alpha < 0$)”, ДАН Арм. ССР, **39** (1), 348-368 (1984).
- [56] Ф. А. Шамоян, “Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **13** (5-6), 405-422 (1978).
- [57] Ф. А. Шамоян, “Теоремы деления и замкнутые идеалы в алгебрах аналитических функций с мажорантой конечного роста”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **15** (4), 323-332 (1980).
- [58] Ф. А. Шамоян, “Приложение интегральных представлений М. М. Джрбашяна к некоторым задачам анализа”, ДАН СССР, **261** (3), 557-561 (1981).
- [59] Ф. А. Шамоян, “О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **18** (1), 15-27 (1983).
- [60] Ф. А. Шамоян, “Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций”, ДАН Арм. ССР, **85** (1), 7-11 (1987).
- [61] А. Е. Djrbashian, F. A. Shamoian, *Topics in the Theory of A_α^p Spaces* (Teubner-Texte zur Math., 105, Leipzig, 1988).
- [62] Ф. А. Шамоян, “Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах функций голоморфных в полидиске”, Сиб. мат. журнал, **31** (3), 197-216 (1990).
- [63] Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян, “Теплицевы операторы в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций”, ДАН Арм. ССР, **91** (4), 147-151 (1990).
- [64] Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян, “Об анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций, гладких вплоть до границы”, Изв. НАН Арм. ССР, Математика, **28** (6), 50-64 (1993).
- [65] Ф. А. Шамоян, “Некоторые замечания о параметрическом представлении классов Неванлинны-Джрбашяна”, Мат. зам., **52** (1-2), 727-737 (1993).
- [66] Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян, “Теплицевы операторы в многомерных пространствах М. М. Джрбашяна”, Изв. НАН Армении, Математика, **30** (2), 70-78 (1995).
- [67] Ф. А. Шамоян, И. С. Курсина, “Об инвариантности некоторых классов голоморфных функций относительно интегро-дифференциальных операторов”, Зап. научн. семинаров ПОМИ, **255** 184-197 (1998).
- [68] Ф. А. Шамоян, О. В. Ярославцева, “Непрерывные проекторы, двойственность, диагональное отображение в весовых пространствах голоморфных функций со смешанной нормой”, Записки науч. Семина. ПОМИ, **225**, 182-199 (1998).

- [69] И. С. Курсина, “О параметрическом представлении некоторых классов голоморфных в полуплоскости функций”, Деп. В ВИНТИ 30.03.98-№919-1398.
- [70] Ф. А. Шамоян, “Параметрическое представление и описание корневых множеств классов функций голоморфных в круге”, Сиб. мат. журнал, **40** (6), 1420-1440 (1999).
- [71] F. A. Shamoyan, E. N. Shubabko, *Parametrical Representation of Some Classes of Holomorphic Functions in the Disc*, in: Operator Theory, Advances and Applications, **113**, 332-339 (Birkhäuser Verlag, Basel, 2000).
- [72] Ф. А. Шамоян, Е. Н. Шубабко, “Об одном классе функций голоморфных в круге”, в: Исследования по линейным операторам и теории функций, **29**, 242-256, ПОМИ (Санкт Петербург, 2001).
- [73] Ф. А. Шамоян, Е. Н. Шубабко, “Параметрическое представление одного класса голоморфных в круге функций”, Интегральные представления и специальные функции, **3** (1), 132-142 (2002).
- [74] Ф. А. Шамоян, Н. А. Часова, *Ограниченные проекторы и линейные непрерывные функционалы в весовых пространствах аналитических в полукруге функций со смешанной нормой*, (Препринт БГУ, Брянск 2002).
- [75] Н. А. Часова, “О теплицевых операторах в пространствах аналитических в полукруге функций со смешанной нормой”, в: Труды мат. Центра им. Н. И. Лобачевского, **14**, 301-319 (Казань, 2002).
- [76] Ф. А. Шамоян, В. А. Беднаж, “Описание главных частей в разложении Лорана некоторых классов мероморфных в круге функций”, Вестник Брянского университета, **4**, 84-96 (2004).
- [77] О. Е. Антоненкова, Ф. А. Шамоян, “Описание линейных непрерывных функционалов в весовых пространствах аналитических в полукруге функций со смешанной нормой”, Успехи мат. наук, **60** (4), 217-219 (2005).
- [78] N. M. Tkachenko, F. A. Shamoyan. “The Hardy-Littlewood Theorem and the Harmonic Conjugation Operator in Some classes of Simply Connected Domains with Rectifiable Boundary”, J. of Math. Phys., Analysis, Geometry, **5** (2), pp. 1-19 (2009).
- [79] Г. М. Айрапетян, “О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной плоскости”, Изв. АН Арм ССР, Математика, **10** (2), 133-52 (1975).
- [80] Д. Т. Багдасарян, И. В. Оганян, “Граничные свойства функций $B_\alpha(z, z_k)$ М. М. Джрбашяна”, ДАН Армении, **90** (5), 199-205 (1990).
- [81] А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян, “Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **15** (6), 461-474 (1980).
- [82] G. M. Gubreev, A. M. Jerbashian, “Functions of Generalized Bounded Type in Spectral Theory of Non-weak Contractions”, J. of Operator Theory, **26**, 155-190 (1991).
- [83] А. М. Джрбашян, “О граничных свойствах функций обобщенно-ограниченного вида”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **26** (3), 187-209 (1991).
- [84] А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян, “О граничных свойствах произведений типа Бляшке”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **26** (5), 435-442 (1991).
- [85] A. M. Jerbashian, “On Functions of Bounded and Generalized Bounded Type in the Half-Plane”, Rev. Roum. Math. Pur. et Appl., **36** (7-8), 425-432 (1991).
- [86] А. М. Джрбашян, “О субгармонических функциях, имеющих неотрицательные гармонические мажоранты в полуплоскости”, Изв. НАН Армении, Математика, **28** (4), 42-61 (1993).
- [87] А. М. Джрбашян, “Расширение теории факторизации М. М. Джрбашяна”, Изв. НАН Армении, Математика, **30** (2), 39-61 (1995).
- [88] А. М. Джрбашян, “О вложении классов N_ω типа Неванлинны”, Изв. РАН, **63** (4), 59-78 (1999).
- [89] A. M. Jerbashian, “Evaluation of M. M. Djrbashian ω -kernels”, Archives of Inequalities and Applications, **1**, 399-422 (2003).
- [90] A. M. Jerbashian, *Functions of α -Bounded Type in the Half-Plane*, Advances in Complex Analysis and Applications (Springer, 2005).

- [91] A. M. Jerbashian, "On the Theory of Weighted Classes of Area Integrable Regular Functions", *Complex Variables*, **50**, 155-183 (2005).
- [92] A. M. Jerbashian, "On $A_{\omega, \gamma}^p$ Spaces in the Half-Plane", in: *Operator Theory: Advances and Applications*, **158**, 141-158 (Birkhäuser Verlag, Basel/Switzerland, 2005).
- [93] A. M. Jerbashian, V. A. Jerbashian, "Functions of ω -Bounded Type in the Half-Plane" *CMFT: Calculation Methods and Function Theory*, **7** (2), 205 - 238 (2007).
- [94] S. G. Rafayelyan, A. M. Jerbashian, "On Unitary Operators in Weighted Spaces $A_{\omega}^2(\mathbb{C})$ of Entire Functions", *Methods of Funct. Anal. and Topology*, **14** (4), 380-385 (2008).
- [95] A. M. Jerbashian, "Orthogonal Decomposition of Functions Subharmonic in the Unit Disc", in: *Operator Theory: Advances and Applications*, **190**, The Mark Krein Centenary Conference, **1**: Operator Theory and Related Topics, 335-340 (Birkhäuser, 2009).
- [96] А. О. Карапетян, *Некоторые вопросы интегральных представлений в многомерном комплексном анализе* (кандидатская диссертация, Ереван, 1987).
- [97] А. О. Карапетян, "Интегральные представления в трубчатых областях", *Изв. АН. Арм. ССР, Математика* **23** (1), 91-96 (1988).
- [98] А. О. Карапетян, "Интегральные представления для весовых пространств функций голоморфных в трубчатых областях", *Изв. АН Арм. ССР, Математика*, **25** (4), 1-19 (1990).
- [99] А. О. Карапетян, "Интегральные представления голоморфных функций в радиальных трубчатых областях", *Изв. АН Арм. ССР, Математика*, **26** (1), 1-25 (1991).
- [100] А. О. Карапетян, "Интегральные представления в трубчатых областях над аффинно-однородными конусами", *Изв. НАН Армении, Математика*, **27** (1), 1-21 (1992).
- [101] А. О. Карапетян, "Интегральные представления в трубчатых областях над полиэдрами и вопросы приближения функций", *Analysis Math.*, **20**, 185-203 (1994).
- [102] А. Н. Карапетян, "Integral representations of smooth functions in unit ball $\mathbb{B}^n$ and in $\mathbb{C}^n$ ", in: *ICM, Abstracts of Short Communications*, p. 96. (Zürich, 1994).
- [103] А. Н. Карапетян, "Integral representations of smooth functions in $\mathbb{C}^n$ ", in: *TFA, Collection of Works Dedicated to the Memory of M. M. Djrbashian*, 75-78 (Louys, Yerevan, 1995).
- [104] А. Н. Карапетян, "Bounded projections in weighted function spaces in a generalized unit disc", *Ann. Polon. Math.*, **62** (3), 193-218 (1995).
- [105] А. О. Карапетян, "Весовые интегральные представления голоморфных Функций в матричных областях Зигеля", *Изв. НАН Армении, Математика*, **32** (2), 39-56 (1997).
- [106] А. О. Карапетян, "Весовые $\bar{\partial}$ -интегральные представления C^1 -функций в $\mathbb{C}^n$ ", *Докл. НАН Армении*, **103** (2), 101-104 (2003).
- [107] А. О. Карапетян, "Весовые $\bar{\partial}$ -интегральные представления в матричном диске", *Докл. НАН Армении*, **103** (3), 199-202 (2003).
- [108] А. О. Карапетян, "Весовые $\bar{\partial}$ -интегральные представления гладких функций в области Зигеля", *Изв. НАН Армении, Математика*, **41** (3), 56-70 (2006).
- [109] А. Н. Карапетян, "Weighted $\bar{\partial}$ -integral representations in matrix domains", *Complex Variables and Elliptic Equations*, **53** (12), 1131-1168 (2008).
- [110] А. Н. Карапетян, "Weighted Integral Representations of Entire Functions of Several Complex Variables", *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **15**, 289-302 (2008).
- [111] А. В. Арутюнян, *Об ограниченности одного класса интегральных операторов в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций* (автореф. дис. уч. ст. к. ф.-м. н., Ереван 1992).
- [112] А. В. Harutyunyan, "Toeplitz Operators and Division Theorems in Anisotropic Spaces of Holomorphic Functions in the Polydisc", *Complex Variables*, **48** (4), 347-363 (2003).
- [113] А. В. Harutyunyan, "Toeplitz Operators and Division Theorems in Spaces $H^p(\omega)$ ", *Complex Variables*, **48** (10), 803-813 (2003).
- [114] А. В. Harutyunyan, "Bloch Spaces of Holomorphic Functions in the Polydisc", *J. Funct. Spaces Appl.*, **5** (3), 213-230 (2007).
- [115] А. В. Harutyunyan, W. Lusky, "On the Boundedness of the Differentiation Operator Between Weighted Spaces of Holomorphic Functions", *Studia Math.*, **184** (3), 233-247 (2008).
- [116] А. И. Петросян, "Оценка в $\mathbb{C}^m$ -норме минимальных решений $\bar{\partial}$ -уравнения в полидиске", *Изв. АН Арм. ССР, Математика*, **26** (2), 99-107 (1991).

- [117] А. И. Петросян, “Весовые интегральные представления функций в полидиске и в пространстве $\mathbb{C}^n$ ”, Изв. НАН Армении, Математика, **31** (1), 46-60 (1996).
- [118] А. И. Петросян, “Производные решения $\bar{\partial}$ -уравнения в бидиске”, Изв. НАН Армении, Математика, **38** (1), 83-88 (2003).
- [119] A. I. Petrosyan, “Formulas for Derivatives of a Solution of $\bar{\partial}$ -Equation in the Ball of $\mathbb{C}^n$ ”, in: Topics in Analysis and its Applications, NATO Science Series, II. Mathematics, Physics and Chemistry, Kluwer Academic Publishers, **147**, 229-233 (2004).
- [120] A. I. Petrosyan, “On A_{ω}^p Spaces in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$ ”, J. Anal. Appl., **3** (1), 47-53 (2005).
- [121] A. I. Petrosyan, “On Weighted Spaces of Functions Harmonic in $\mathbb{R}^n$ ”, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, **47** (2), 233-240 (2006).
- [122] A. I. Petrosyan, “On Weighted Classes of Harmonic Functions in the Unit Ball of $\mathbb{R}^n$ ”, Complex Var. Theory Appl., **50** (12), 953-966 (2005).
- [123] N. Aronszajn, “La Théorie des Noyaux Reproductifs et ses Applications”, I, Proc. Cambridge Phil. Soc., **39**, 133-153 (1943).
- [124] S. Bergman, *The Kernel Function and the Conformal Mapping*, Math. Surveys, **5** (1950).
- [125] N. Aronszajn, “Theory of Reproducing Kernels”, Trans. AMS, **68** 337-404 (1950).
- [126] S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Second Edition (AMS, Providence, R.I., 1970).
- [127] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces* (Springer-Verlag, Berlin, 2000).
- [128] P. Duren, A. Shuster, *Bergman Spaces*, Math. Surveys and Monographs, **100** (AMS, Providence, RI., 2004).
- [129] F. Forelly, W. Rudin, “Projections on Spaces of Holomorphic Functions in the Ball”, Indiana Univ. Math. J., **24**, 593-602 (1974).
- [130] У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$* (Мир, Москва, 1984).
- [131] F. Ricci, M. Taibleson, “Boundary Values of Harmonic Functions in Mixed Norm Spaces and Their Atomic Structure”, Annali Scuola Normale Superiore - Pisa, Classe di Scienze, Ser. IV, **X** (1), 1-54 (1983).
- [132] T. G. Genchev, “Paley-Wiener Type Theorems for Functions in Bergman Spaces Over Tube Domains”, J. Math. Anal. Appl., **118**, 496-501 (1986).
- [133] K. L. Avetisyan, “Fractional Integration and Integral Representations in Weighted Classes of Harmonic Functions”, Analysis Math., **26** (3), 161-174 (2000).
- [134] O. Blasco, S. Perez-Esteva, “ L^p Continuity of Projectors of Weighted Harmonic Bergman Spaces”, Collect. Math., **51** (1), 49-58 (2000).
- [135] P. Charpentier, “Formules Explicites pour les Solutions Minimales de L’équation $\bar{\partial}u = f$ dans la Boule et dans le Polydisque de $\mathbb{C}^n$ ”, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **30** (41), 1921-1954 (1980).
- [136] M. Nowak, “Bloch and Möbius Invariant Besov Spaces on the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$ ”, Complex Variables, **44**, 1-12 (2001).
- [137] S. Li, S. Stevic, “Some Characterizations of the Besov Space and the α -Bloch Space”, J. Math. Anal. Appl., **346**, 262-273 (2008).
- [138] S. Li, H. Wulan, “Besov Space in the Unit Ball”, Indian J. Math., **48** (2), 177-186 (2006).
- [139] S. Bochner, “Group Invariance of Cauchy Formula in Several Variables”, Ann. Math., **45**, 686-707 (1944).
- [140] И. И. Привалов, *Граничные свойства однозначных аналитических функций* (Изд. МГУ, Москва, 1941).
- [141] И. И. Привалов, *Введение в теорию функций комплексного переменного* (Москва, 1960).
- [142] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов* (ФМ, Москва, 1961).
- [143] В. И. Крылов, “О функциях, регулярных в полуплоскости”, Мат. сборник, **6(48)** (1), 95-138 (1939).
- [144] Е. Д. Соломенцев, “О классах функций, субгармонических в полупространстве”, Вестник МГУ, серия матем., **5**, 73-91 (1959).
- [145] J. A. Shohat, J. D. Tamarkin, *The Problem of Moments* (AMS, New York, 1943).
- [146] А. Л. Шагинян, “Об одном основном неравенстве в теории функций и его приложениях”, Изв. АН Арм. ССР, Сер. физ. мат. наук, **12** (1), 2-25 (1959).

- [147] R. P. Boas, *Entire Functions* (Ac. Press, New York, 1954).
- [148] И. С. Кац, “Об интегральных представлениях аналитических функций, отображающих верхнюю полуплоскость в ее часть”, УМН, **11** (3(69)), 139-144 (1956).
- [149] Хуа Ло-Кен, *Гармонический анализ функций нескольких комплексных переменных в классических областях*, (ИЛ, Москва, 1959).
- [150] H. Shapiro and A. Shields, “On Some Interpolation Problems for Analytic Functions”, Amer. J. Math., **83**, 513-532 (1961).
- [151] С. М. Гиндикин, “Анализ в однородных областях”, Успехи мат. наук, **19** (4) 3-92 (1964).
- [152] Ф. Аткинсон, *Дискретные и непрерывные граничные задачи* (Мир, Москва, 1968).
- [153] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций* (Наука, Москва, 1970).
- [154] A. L. Shields, D. L. Williams, “Bounded Projections, Duality, and Multipliers in Spaces of Analytic Functions”, Trans. Amer. Math. Soc., **162**, 287-302 (1971).
- [155] М. С. Лифшиц, “Дискретные линейные системы и их связи с теорией факторизации мероморфных функций М. М. Джрбашяна”, ДАН СССР, **219**, 793-796 (1974).
- [156] J. H. Shapiro, A. Shields, “Unusual Topological Properties of the Nevanlinna Class”, Amer. J. Math., **97** (4), 915-936 (1975).
- [157] M. Tsuji, *Potential Theory in Modern Function Theory* (Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1975).
- [158] E. Seneta, *Regular Varying Functions*, Springer Lecture Notes in Mathematics, **508** (Springer, 1976).
- [159] M. Stoll, “Mean Value Theorems for Harmonic and Holomorphic Functions on Bounded Symmetric Domains”, J. Reine und Angew. Math., **290**, 191-198 (1977).
- [160] Ш. Даутов, Г. М. Хенкин, “Нули голоморфных функций конечного порядка и весовые оценки для решений $\bar{\partial}$ -уравнения”, Мат. сборник, **107**, 371-384 (1978).
- [161] R. R. Coifman, R. Rochberg, “Representation Theorems for Holomorphic and Harmonic Functions in L^p ”, Asterisque, **77**, 11-66 (1980).
- [162] А. Ф. Леонтьев, *Обобщения рядов экспонент* (Наука, Москва, 1981).
- [163] B. Yorikke, “A Multidimensional Analogy of Privalov’s Theorem”, Math. Nachrichten, **107**, 221-233 (1982).
- [164] B. Berndtsson, M. Andersson, “Henkin-Ramirez Formulas with Weight Factors”, Ann. Inst. Fourier, **32** (3), 91-110 (1982).
- [165] И. В. Островский, “Об одной проблеме моментов Хаусдорфа”, Известия АН Арм. ССР, Математика, **25** (1), 91-96 (1990).
- [166] S. Saitoh, *Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications*, Pitman Research Notes in Math., **369** (Longman, UK, 1997).

Поступила 21 сентября 2009