Известия НАН Армении. Математика, том 44, н. 5, 2009, стр. 71-86.

АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ ОДНОШАГОВОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА В ПРОСТРАНСТВЕ КРЫЛОВА

ЛЕВОН ГЕВОРГЯН

Государственный Инженерный Университет Армении
E-mail: *levgev@hotmail.com*

Аннотация. В настоящей статье предлагается новый метод определения итерационного параметра в одношаговой итерационной процедуре решения линейного операторного уравнения в банаховом пространстве с использованием подпространств Крылова, основанный на некоторой экстремальной геометрической задаче. Для улучшения скорости сходимости итераций вводится эквивалентная перенормировка основного пространства, ведущая к сходимости с контролируемой скоростью.

1. Пусть X – банахово пространство и A – ограниченный оператор, действующий в X и SpA – его спектр. Одним из наиболее эффективных способов решения уравнения

$$Ax = b \tag{1}$$

является итеративный метод Ричардсона

$$x_{n+1} = x_n - \alpha\left(Ax_n - b\right), \quad n \in \mathbb{Z}^+, \tag{2}$$

где x_0 – некоторое начальное приближение (догадка) и α – числовой параметр. Обозначим через $\gamma(x)$ разность $Ax - b$, называемую невязкой. Тогда

$$\gamma\left(x_{n+1}\right) = \left(I - \alpha A\right)\gamma\left(x_n\right) = \left(I - \alpha A\right)^{n+1}\gamma\left(x_0\right).$$

Обычно итеративный метод Ричардсона (2) совершенствуется путем введения динамически меняющегося параметра α_n

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n\left(Ax_n - b\right), \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{3}$$

Очевидно

$$x_n = x_0 - \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\gamma_k, \gamma_{k+1} = \left(I - \alpha_{k+1}A\right)\gamma_k, \quad \gamma_k = \gamma\left(x_k\right),$$

поэтому

$$x_n \in x_0 + span\left\{\gamma_0, A\gamma_0, \cdots, A^{n-1}\gamma_0\right\}.$$

Обозначим через

$$K_n = span\left\{\gamma_0, A\gamma_0, \cdots, A^{n-1}\gamma_0\right\}$$

так называемое подпространство Крылова, порожденное оператором A из первоначальной невязки γ_0.

Использование подпространств Крылова в итерационных методах решения линейных уравнений считается одной из "Top 10" алгоритмических идей 20-го столетия (см. [2]). Два главных проекционных метода – минимальных невязок и ортогональных невязок, составляют базис почти всех известных алгоритмов. Согласно методу минимальных невязок последовательность $\{\alpha_k\}$ выбирается таким образом, чтобы n-ая невязка γ_n достигла бы своего наименьшего значения на соответствующем подпространстве Крылова. Наиболее широко используемым методом решения общих (несимметрических) операторных уравнений является, пожалуй, метод GMRES. Ключевым моментом в GMRES служит использование в решении задачи о наименьших квадратах ортогонального базиса подпространства Крылова, получаемого процедурой Арнольди [13].

Как указано в [3], *"То, что делает GMRES расточительным – это необходимость для вычисления новой итерации x_n на n-ом шаге манипулировать рекуррентной формулой, содержащей n векторов, что потенциально требует большой объем вычислений и памяти... Будет разумным сказать, что стоимость GMRES, как правило, начинает становиться обременительной от $n = 20$ и непомерно высокой при $n = 100$."* Эти оценки, благодаря постоянному росту быстродействия и объема доступной памяти современных компьютеров должны существенно быть пересмотрены, но в принципе ситуация остается такой же.

Думается, что потенциал простейшего одношагового итерационного метода не в полной мере выявлен и использован. К тому же он допускает детальное и исчерпывающее исследование и может служить основой для более изощренных построений. Для одношагового метода минимальных невязок

$$\alpha_n = \frac{\langle \gamma_n, A\gamma_n \rangle}{\|A\gamma_n\|^2}. \tag{4}$$

Известны различные оценки для скорости сходимости итераций. Первая из них (оценка Элмана, см. [6]), утверждает, что для строго коэрцитивного оператора A ($\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \geq \delta \|x\|^2$, $\delta > 0$) имеет место неравенство:

$$\gamma_n \leq \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\|A\|^2}}\ \gamma_{n-1}.$$

Отметим, что данный результат легко следует из более раннего равенства Густафсона [9].

Немного более общая оценка может быть найдена в [8], теорема 2.2.1:

$$\gamma_n \leq \sqrt{1 - \frac{d^2}{\|A\|^2}}\, \gamma_{n-1},$$

где

$$d(A) = \inf_{x \neq \theta} \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|x\|^2}$$

есть расстояние от начала системы координат O до числового образа $W(A)$ оператора A. Другая оценка такого рода есть в [5]:

$$\gamma_n \leq \sqrt{1 - d(A)\, d(A^{-1})}\, \gamma_{n-1}.$$

Более точным является неравенство [7]:

$$\gamma_n \leq \sqrt{1 - p^2(A)}\, \gamma_{n-1},$$

где

$$p(A) = \inf_{Ax \neq \theta} \frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|Ax\| \cdot \|x\|}.$$

Оно основано на величине

$$m(A) = \inf_{\alpha \in \mathbb{C}} \|I - \alpha A\|.$$

В [7] показано, что для произвольного A, действующего в гильбертовом пространстве имеет место $m^2(A) + p^2(A) = 1$.

Во всех этих оценках предполагается, что $O \notin \overline{W}(A)$, где черта означает замыкание соответствующего множества. Важность этого условия может быть продемонстрирована оператором, определенным матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для которого $W(A) = \{z : |z - 1| \leq 1\}$.

Численный эксперимент показываеты, что итерации (3), (4) имеют совершенно хаотичный характер. С другой стороны, если организовать итерации с постоянным параметром $\alpha = 1$, тогда нетрудно заметить, что

$$x_2 = x_0 - 2Ax_0 + A^2x_0 + 2b - Ab.$$

Очевидно, что многочлен $p(A) = (A - I)^2 = A^2 - 2A + I$ являтся аннулирующим оператор A, так что $A^{-1} = 2I - A$, означающее, что для любого начального приближения и при любой правой части точное решение получается через два итерационных шага.

Ниже предлагается новый подход, основанный на спектральных характеристиках оператора A. Для простоты мы сначала рассмотрим случай, когда параметр α есть константа, т.е. так называемый стационарный итерационный процесс Ричардсона. Если спектральный радиус $r(I-\alpha A)$ оператора $I-\alpha A$ строго меньше 1, то последовательность несвязок $\{\gamma_n\}$ стремится к нейтральному элементу и $x_n = A^{-1}(\gamma_n + b)$ сходится к решению $a = A^{-1}b$. Чем меньше $r(I-\alpha A)$, тем быстрее сходимость. Таким образом, возникает следующая задача. *Необходимо найти комплексное число α такое, что $r(I-\alpha A)$ принимает наименьшее возможное значение.*

Согласно теореме об отображении спектра, спектр оператора $I-\alpha A$ равен множеству $\{1-\alpha z : z \in SpA\}$, так что $r(I-\alpha A) = \sup_{z\in SpA}|1-\alpha z|$. Так как верхняя грань ищется только для многочлена первого порядка, она будет равна

$$m(A) = \sup_{z\in chSpA} |1-\alpha z|,$$

где $chSpA$ есть выпуклая оболочка SpA. Очевидно, что условие $r(I-\alpha A) < 1$ влечет $0 \notin chSpA$. Если же это условие выполнено, то, согласно теореме Мазура [11], утверждающей, что любое компактное подмножество F плоскости $\mathbb{C}$ есть пересечение всех замкнутых кругов, содержащих F, существует замкнутый круг $D(C,R)$, содержащий F и не содержащий начало системы координат O, т.е. $|OC| > R$. Нетрудно заметить, что последнее условие влечет $\sup_{z\in SpA}|1-\alpha z| < 1$, где $\alpha = 1/C$. Действительно, если $z \in F \subset D(C,R)$, то $\sup_{z\in F}|1-z/C| \le R/|C|$. Хорошо известно, что $chSpA \subset \overline{W}(A)$. Таким образом, условие $O \notin chSpA$, в общем, является менее ограничительным, чем $O \notin \overline{W}(A)$.

В первой части настоящей работы рассматриваем следующую задачу. *Пусть F есть компактное подмножество в $\mathbb{C}$ такое, что $O \notin F$. Найти круг $D(C,R)$, содержащий F и не содержащий O и имеющий наименьшее отношение $|OC|/R$ среди всех кругов, удовлетворяющих указанным условиям.*

Мы докажем существование, единственность этого круга, исследуем некоторые его свойства, найдем его для различных канонических компактов, для круговых секторов (любой выпуклый компакт, не содержащий фиксированную точку, лежит в некотором секторе или, в предельном случае, в некоторм сегменте) и для прямоугольников (согласно теореме Бендиксона-Хирша спектр любого оператора может быть эффективно локализован внутри прямоугольника).

Во второй части покажем, как эта информация может быть использована для ускорения сходимости, когда обычный итерационный процесс сходится недопустимо медленно и вообще расходится. В заключение будет рассмотрен числовой пример.

Предложение 1. *Пусть F – компактное подмножество в $\mathbb{C}$ и $O \notin F$. Тогда существует единственный круг $D = D(C, R)$ такой, что*

$$F \subset D \quad \text{и} \quad O \notin D, \tag{5}$$

имеющий наименьшее отношение $R/|OC|$ среди всех кругов, удовлетворяющих условиям (5).

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ множество замкнутых кругов $D(c, r)$, удовлетворяющих условиям (5) и пусть

$$m = \inf_{D \in \mathcal{D}} \frac{r}{|Oc|}.$$

Сначала покажем, что $m > 0$. Пусть $M \in F$ – ближайшая к O точка и $|OM| = \delta$. Очевидно, $|OM| + |MC| \geq |OC|$, откуда $r \geq |OC| - \delta$. Если $|OC| \geq n\delta$, где $n \geq 2$ – натуральное число, то

$$\frac{r}{|OC|} \geq 1 - \frac{\delta}{|OC|} \geq \frac{n-1}{n}.$$

Если $|OC| < n\delta$, то $r/|OC| \geq diam\,(F)/2n\delta$. Окончательно будем иметь

$$\frac{r}{|OC|} \geq \min\left\{\frac{diam\,(F)}{2n\delta}, \frac{n-1}{n}\right\}.$$

Пусть $\{D(c_k, r_k)\} \subset \mathcal{D}$ – последовательность кругов такая, что $r_k/|Oc_k| \to m$. Так как множество $\{c_k\}$ ограничено, то можно выбрать подпоследовательность кругов таких, что $\left\{c_{k(n)}\right\}$ стремится к некоторому C. В этом случае подпоследовательность радиусов $\left\{r_{k(n)}\right\}$ сходится к некоторому числу R. Покажем, что $D(C, R)$ удовлетворяет условиям предложения.

Действительно, дле любой точки $M \in F$, воспользовавшись неравенством $|Mc_k| \leq r_k$ можно заключить, что $|MC| \leq R$, означающее, что $F \subset D(C, R)$.

Докажем теперь единственность этого круга. Пусть $D(a, R)$ и $D(b, r)$ – два различных круга. Очевидно,

$$R/|a| = r/|b| = m < 1.$$

Из неравенства Аполлония следует, что

$$\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(|z-a|^2 + |z-b|^2\right) - \frac{1}{4}|a-b|^2.$$

Так что для любого $z \in F$

$$\frac{\left|z-\frac{a+b}{2}\right|^2}{\left|\frac{a+b}{2}\right|^2} \le \frac{2\left(r^2+R^2\right)-|a-b|^2}{2\left(|a|^2+|b|^2\right)-|a-b|^2} = \frac{2m^2\left(|a|^2+|b|^2\right)-|a-b|^2}{2\left(|a|^2+|b|^2\right)-|a-b|^2} < m^2.$$

Это завершает доказательство.

Круг, упомянутый в предложении 1 будет называться оптимальным. Нетрудно заметить, что оптимальная окружность проходит, по крайней мере, через одну граничную точку множества F.

Предложение 2. *Оптимальная окружность проходит, по крайней мере, через две граничные точки множества F.*

Доказательство. Пусть R – радиус оптимального для множества F круга (см. Рис. 1). Заключим предполагаемую единственную общую точку множества F и оптимальной окружности в симметричный круговой сектор раствора 2α и обозначим через γ_0 минимум расстояния между оптимальной окружностью и частью множества F, лежащей вне указанного сектора, и пусть γ – некоторое положительное число, не превосходящее γ_0.

Проведем меньшую окружность с центром, лежащим на расстоянии δ от старого центра и радиуса r, удовлетворяющего равенству $r-\delta = R-\gamma$. Тогда

$$r = \sqrt{R^2+\delta^2-2R\delta\cos\alpha} = R+\delta-\gamma$$

и

$$\delta = \left(2R\gamma-\gamma^2\right) \Big/ \left(4R\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\gamma\right),$$

влекущее $\gamma \to 0$, когда $\delta \to 0$. Имеем также

$$\frac{R-r}{\delta} = \frac{2R\cos\alpha-\delta}{R+r} > \cos\alpha - \frac{\delta}{R}.$$

Выбирая сначала α, а затем δ подходящим образом, получим неравенство $(R-r)/\delta > m$, где m есть отношение радиуса оптимального круга к расстоянию d от его центра до начала координат. Обозначим через l расстояние между центром нового круга и началом системы координат. Тогда

$$r/l \le [R-(R-r)]/(d-\delta) < (R-m\delta)/(d-\delta) = m.$$

Заметим, что аналогичный результат известен для наименьшего круга, содержащего данный компакт [12].

Следствие 1. *Если F – круг, не содержащий начала координат, то оптимальный для него круг совпадает с ним.*

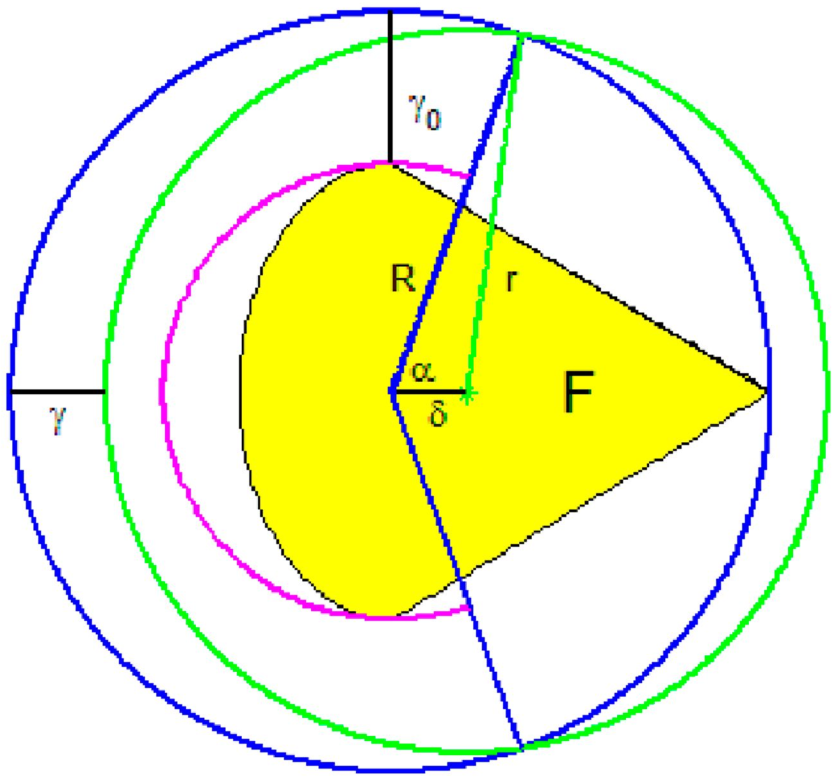

Рис. 1

Решим теперь эту задачу в случае, когда множество $F = [\lambda_1; \lambda_2]$ есть отрезок, соединяющий две различные точки $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, такой, что $O \notin F$. Согласно предложению 2 центр оптимального круга лежит на серединном перпендикуляре отрезка $[\lambda_1; \lambda_2]$, так что для центра крайним (недостижимым) положением является точка, совпадающая с центром окружности, проходящей через все три точки O, λ_1, λ_2. Обозначив $\lambda_1 = a+ib, \lambda_2 = c+id$, мы ищем экстремумы функции

$$\frac{(x-a)^2 + \left(\frac{d-b}{2} + \frac{c-a}{b-d}\left(x - \frac{a+c}{2}\right)\right)^2}{x^2 + \left(\frac{d+b}{2} + \frac{c-a}{b-d}\left(x - \frac{a+c}{2}\right)\right)^2} = 1 - \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + \left(\frac{d+b}{2} + \frac{c-a}{b-d}\left(x - \frac{a+c}{2}\right)\right)^2}$$

для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ее производная является рациональной функцией, в числителе которой полином второго порядка, а в знаменателе – положительный полином четвертого порядка. Интересующее нас отношение ограничено сверху единицей и по мере удаления центра круга от начала координат, начиная с определенной

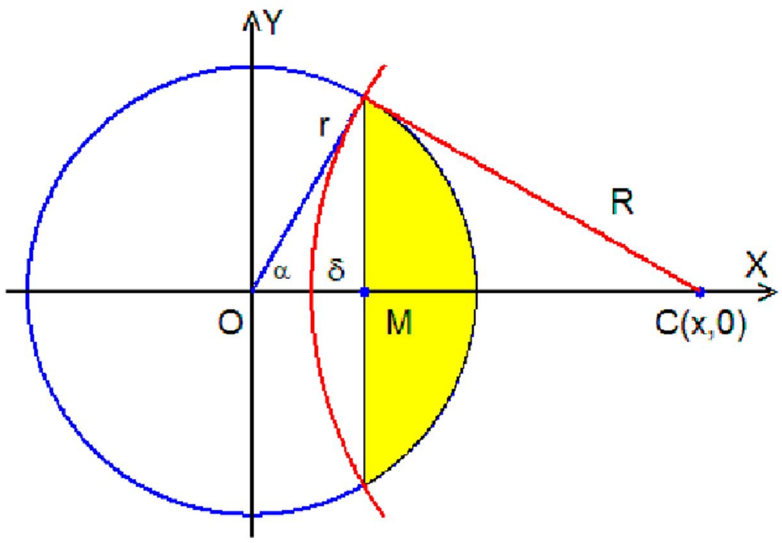

Рис. 2

точки, монотонно возрастая, стремится к единице. Таким образом, коэффициент при старшем члене числителя положителен, если область определения этой функции есть интервал $(x_0, +\infty)$ и отрицателен в противном случае. Следовательно, отношение $R/|OC|$ имеет только один (глобальный) минимум. Наименьшее значение $R/|OC|$ равно

$$\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{|\lambda_1| + |\lambda_2|}. \tag{6}$$

Центр оптимального круга лежит на биссектрисе угла, образованного радиус-векторами точек λ_1 и λ_2, в точке

$$z_0 = \frac{|\lambda_1| + |\lambda_2|}{\operatorname{sgn} \overline{\lambda}_1 + \operatorname{sgn} \overline{\lambda}_2}$$

и его радиус равен

$$R = \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\operatorname{sgn} \lambda_1 + \operatorname{sgn} \lambda_2} \right|.$$

Расстояние между центром оптимального круга и началом системы координат определено формулой

$$|z_0| = \frac{|\lambda_1| + |\lambda_2|}{2\cos(\phi - \psi)/2},$$

где ϕ и ψ есть аргументы комплексных чисел λ_1 λ_2 соответственно, выбранные непрерывным образом, так что $|\phi-\psi|\le\pi$. Имеем также

$$\frac{|\lambda_2-\lambda_1|}{|\lambda_2|+|\lambda_1|}=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{|\lambda_1\lambda_2|}}{|\lambda_2|+|\lambda_1|}\cos\frac{\phi-\psi}{2}\right)^2}.$$

Вернемся к общему случаю. Так как множество F компактно, то оно содержится внутри некоторого круга $D=\{z:|z|\le r\}$. Вращая, если в этом будет необходимость, можно предположить, что F является подмножеством сегмента круга, ограниченного слева (опорной) прямой $\operatorname{Re} z=\delta$ $(0<\delta<r)$, (см. Рис. 2). Из симметрии можно заключить, что оптимальная окружность проходит через вершины сегмента. Обозначив центр оптимального круга через $C\,(x,0)$, будем иметь $R^2=r^2-\delta^2+(x-\delta)^2$ и наименьшее отношение R^2/x^2 достигается при $x=r^2/\delta$ и

$$\frac{R}{x}=\sqrt{1-\frac{\delta^2}{r^2}}. \tag{7}$$

Как показывает нижеследующий пример, эта оценка иногда оказывается чересчур пессимистической.

Пример 1. *Пусть F – прямоугольник с вершинами* $(1;0)$, $(1.5;1)$, $(1.5;-1)$, $(2;0)$. *Тогда*

$$\sqrt{1-\frac{\delta^2}{r^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.86025\cdots.$$

Центр оптимального круга находится в точке $C(13/6;\,0)$, *а его радиус равен* $R=\sqrt{13}/3$, *так что* $R/OC=2/\sqrt{13}=0.5547\cdots$.

Если ближайшая к началу системы координат точка M является угловой (как в рассмотренном выше примере), т.е. F есть подмножество сектора MKL (см. Рис. 3), то в случае, когда точка M не принадлежит оптимальному кругу отрезка MK, оптимальный круг проходит через все три точки M,K,L. Имеем

$$MK=\sqrt{r^2-\delta^2\sin^2\alpha}-\delta\cos\alpha,\quad MC=\frac{\sqrt{r^2-\delta^2\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}-\frac{\delta}{2},$$
$$\frac{OC}{OM}=\frac{\sqrt{r^2-\delta^2\sin^2\alpha}-\delta}{\sqrt{r^2-\delta^2\sin^2\alpha}+\delta},\quad OM+2MC=\frac{\sqrt{r^2-\delta^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}>r$$

и

$$\frac{MC}{OC}=\frac{\sqrt{r^2-\delta^2\sin^2\alpha}-\delta\cos\alpha}{\sqrt{r^2-\delta^2\sin^2\alpha}+\delta\cos\alpha}.$$

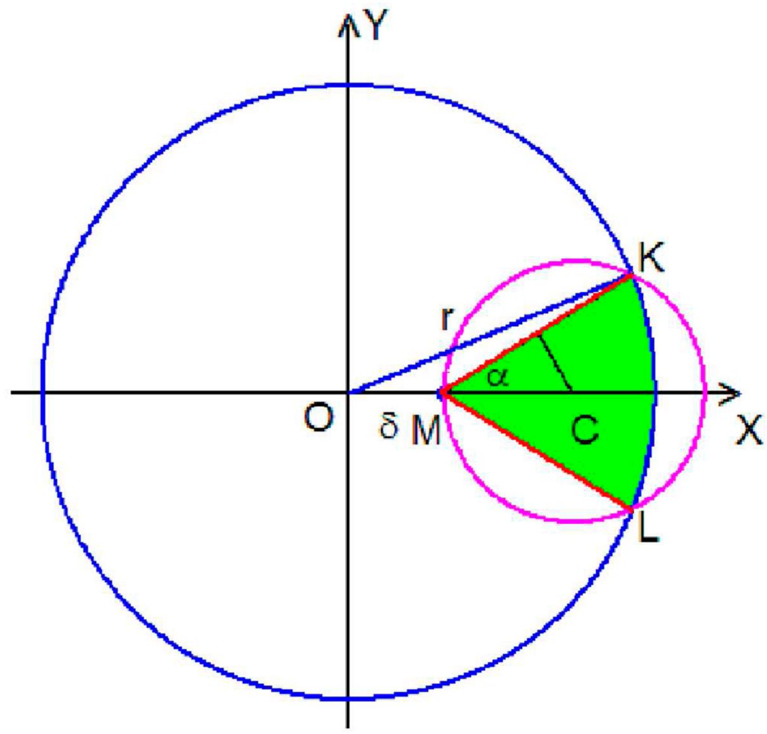

Рис. 3

В случае, когда сектор вырождается в отрезок прямой, т.е. $\alpha = 0$, мы приходим к хорошо известной в теории операторов формуле Канторовича:

$$\frac{MC}{OC} = \frac{r-\delta}{r+\delta} = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}},$$

где $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ определяют границы спектра положительного оператора.

Рассмотрим теперь случай, когда спектр оператора локализован внутри некоторого прямоугольника. Обозначим вершины прямоугольника в порядке возрастания их расстояния от начала системы координат через A, B, D и C. Согласно предложению 2 оптимальный круг проходит, по крайней мере, через две вершины. Нетрудно заметить, что круг, проходящий через несмежные вершины и содержащий данный прямоугольник, проходит также через две оставшиеся вершины. Таким образом, имеются три возможности, не являющиеся взаимно исключающими:

(a) оптимальный круг совпадает с оптимальным кругом отрезка AB,

(b) оптимальный круг совпадает с оптимальным кругом отрезка AD,

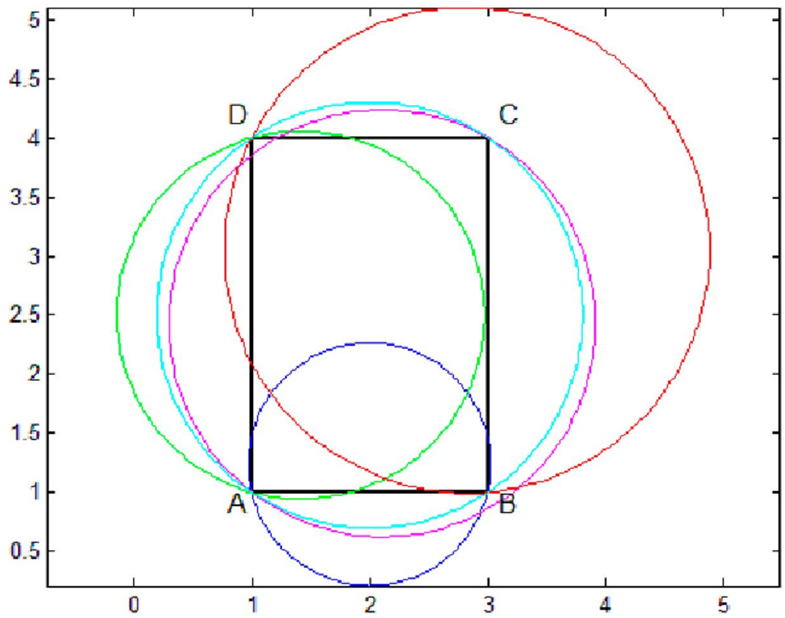

Рис. 4

(c) оптимальный круг проходит через все четыре вершины.

Пример 2. *Пусть* $A(1;1)$, $B\,(3;1)$, $C\,(1;4)$, $D\,(3;4)$. *Тогда ни один из оптимальных кругов отрезков* AB, AD, AC, BD *не содержит прямоугольник* $ABCD$. *Таким образом, оптимальный круг проходит через все четыре вершины прямоугольника (см. Рис. 4).*

Для произвольного оператора, действующего в конечномерном пространстве, $chSpA$ является многоугольником. Обозначим через V множество вершин $chSpA$. Возможны два случая. Оптимальный для SpA круг D может быть оптимальным для некоторого сегмента, соединяющего два собственных значения из V. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что оптимальный для данных собственных значений круг содержит SpA. Если это не так, то граница D содержит, по меньшей мере, некоторую другую точку из V. Таким образом, чтобы найти оптимальный для SpA круг, предлагается следующий алгоритм. Необходимо, воспользовавшись формулой (6), найти частные для всех пар собственных значений из V

и их максимум. Если соответствующий круг не содержит SpA, то все окружности, проходящие через три вершины V должны быть рассмотрены. Одна из них будет оптимальной для SpA.

Пример 3. *Пусть теперь F – множество, ограниченное эллипсом,*

$$\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a,b,c\in\mathbb{R}^+.$$

Так как начало системы координат не принадлежит F, то $a<c$. Если $b\le a$, то диаметром оптимального круга служит отрезок $[c-a\,;\,c+a]$, и минимальное отношение равно a/c. В случае $b>a$, обозначив абсциссу общей точки эллипса и оптимальной окружности через x_0, получим для отношения R/OC формулу:

$$b\frac{\sqrt{a^4+(b^2-a^2)\,(x_0-c)^2}}{(a^2-b^2)\,x_0-b^2c}.$$

Отметим следующие интересные факты:

(1) минимум этого выражения достижим для $x_0=(c^2-a^2)/c$, что не зависит от b, и равен
$$\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}},$$
(2) оптимальный для эллипса круг совпадает с оптимальным кругом для его хорды, имеющей уравнение $x=x_0$. Действительно, воспользовавшись формулой (2), получим

$$\frac{R}{x}=\frac{\sqrt{r^2-\delta^2}}{r}=\frac{\sqrt{r^2-x_0^2}}{r}=\frac{\frac{b}{c}\sqrt{c^2-a^2}}{\frac{1}{c}\sqrt{c^2-a^2}\sqrt{b^2+c^2-a^2}}=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}.$$

2. Как было установлено выше, если $O\notin chSpA$, то для $\alpha=1/z_0$, где z_0 – центр оптимального круга, спектр оператора $B=I-\alpha A$ лежит внутри круга с центром в начале системы координат и радиуса $R/|z_0|<1$. В этом случае итеративный метод (2) сходится для любого начального приближения.

Покажем, как путем перехода к эквивалентной перенормировке основного пространства можно достичь сходимости с контролируемой скоростью.

Предложение 3. *(ср. §1, 1.4 в* [10]*.) Пусть B – оператор, действующий в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и ε – некоторое положительное число. Тогда существует новое скалярное произведение $[\cdot,\cdot]$, порождающее норму $|\cdot|$, эквивалентную первоначальной, и $|B|\le r(B)+\varepsilon$.*

Доказательство. Зафиксируем натуральное число n такое, что $\|B^n\|^{1/n} < r+\varepsilon$ и пусть

$$[x,y] \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n-1}(r+\varepsilon)^{-2k}\left\langle B^k x, B^k y\right\rangle,$$

$$|x|^2 \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n-1}(r+\varepsilon)^{-2k}\left\|B^k x\right\|^2.$$

Очевидно

$$\|x\|^2 \le |x|^2 \le \|x\|^2 \sum_{k=0}^{n-1}(r+\varepsilon)^{-2k}\left\|B^k\right\|^2,$$

означающее, что эти две нормы эквивалентны. С другой стороны,

$$|B|^2 = \sup_{x\neq\theta}\frac{|Bx|^2}{|x|^2} = \sup_{x\neq\theta}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(r+\varepsilon)^{-2k}\left\|B^{k+1}x\right\|^2}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(r+\varepsilon)^{-2k}\left\|B^k x\right\|^2} \le (r+\varepsilon)^2.$$

Следует отметить, что скалярное произведение $x, y \in H$ может быть посчитано по формуле

$$[x,y] = \langle Gx, y\rangle, \tag{8}$$

где

$$G = \sum_{k=0}^{n-1}(r+\varepsilon)^{-2k}B^{*k}B^k,$$

которая более привлекательна с вычислительной точки зрения.

Суммируя, мы предалагаем следующую процедуру решения уравнения (1), когда итеративный процесс (2), (4) медленно сходится или расходится:

1. Локализовать спектр оператора A.
2. Найти оптимальный круг $C(z_0, R)$.
3. Выбрать некоторое положительное число ε и переопределеить норму таким образом, чтобы $\left\|I - \frac{1}{z_0}A\right\|_{new} \le \frac{R}{|z_0|} + \varepsilon < 1$.
4. Повторить итерации (2), (4) используя скалярное произведение (8), до достижения желаемой точности.

Заметим, что в случае гильбертова пространства, сходимость может быть ускорена введением динамически меняющегося параметра.

Пример 4. Пусть A – оператор, определенный тридиагональной $n \times n$ теплицевой матрицей

$$A = \begin{pmatrix} c & m & 0 & \cdots & 0 \\ p & c & m & \cdots & 0 \\ 0 & p & c & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & p & c \end{pmatrix}, \quad c, m, p \in \mathbb{R}.$$

Определитель D_n оператора A удовлетворяет рекуррентной формуле

$$D_{n+1} = cD_n - mpD_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad D_{-1} = 0, \quad D_0 = 1.$$

Решение имеет вид $(mp)^{n/2} U_n \left(c(2\sqrt{mp})^{-1}\right)$, где U_n есть многочлены Чебышева второго рода, а спектр оператора A определяется формулой

$$c + 2\sqrt{mp}\ \cos\frac{\pi k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Как известно [4], числовой образ оператора A есть область, ограниченная эллипсом

$$z = c + \left(pe^{-it} + me^{it}\right)\cos\frac{\pi}{n+1}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Обозначив $a = |m+p|\cos\frac{\pi}{n+1}$ и $b = |m-p|\cos\frac{\pi}{n+1}$, будем иметь

$$W(A) = \left\{(x, y) : \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

В [1], следствие 3, доказан следующий результат:

Пусть $0 \notin \overline{W}(A)$, тогда k-ая невязка по итеративному методу GMRES удовлетворяет неравенству

$$\gamma_k \leq (2+s)s^k\gamma_0,$$

где

$$s = 2\sin\frac{\beta}{4 - 2\beta/\pi}, \quad \beta = \arccos\frac{dist(0, W(A))}{w(A)}, \quad w(A) = \sup_{z \in W(A)} |z|.$$

Если $mp < 0$, то оптимальный круг, содержащий SpA имеет центр в точке C с координатами

$$C = \left(\frac{1}{c}\left|c + i2\sqrt{|mp|}\cos\frac{\pi}{n+1}\right|^2;\ 0\right),$$

следовательно, отношение R/OC равно

$$r = \frac{2\sqrt{|mp|}\cos\frac{\pi}{n+1}}{\left|c + i2\sqrt{|mp|}\cos\frac{\pi}{n+1}\right|}.$$

Обозначим

$$\alpha = c\left|c + i2\sqrt{|mp|}\cos\frac{\pi}{n+1}\right|^{-2}.$$

Спектральный радиус оператора $\alpha A - I$ равен r.

Для "в высшей степени ненормальной 30x30 матрицы" (см. [8], Гл. 2, 2.1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1.16 & 0 & \cdots & 0 \\ .16 & 1 & -1.16 & \cdots & 0 \\ 0 & .16 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & .16 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем $SpA = \{1 + i2\sqrt{0.1856}\cos(\pi k/31), \quad k = 1, 2, \ldots, 30\}$. Отношение r для оптимального круга равно

$$\frac{2\sqrt{0.1856}\cos\frac{\pi}{31}}{\left|1 + i2\sqrt{0.1856}\cos\frac{\pi}{31}\right|} \approx 0.6508.$$

Заметим, что для данного отношения имеется независимая от размерности n верхняя граница

$$\frac{2\sqrt{0.1856}}{\left|1 + i2\sqrt{0.1856}\right|} \approx 0.6527.$$

В рассмотренном выше примере $s \approx 0.998$, так что для уменьшения в два раза первоначальной несвязки необходимо сделать 905 итераций, что делает метод практически неустойчивым.

Числовой эксперимент, основанный на описанной выше идее, показывает, что для скромного числа итераций его ответ, как правило, имеет меньшую невязку, чем встроенный в MatLab решатель.

Abstract. The paper suggests a new way of definition of the iteration parameter for the one-step Krylov subspace method, which is based on some geometrical extremal problem. An equivalent renorming of the underlying space speeds up the convergence rate.

Список литературы

[1] B. Beckermann, "Image Numérique, GMRES et Polynômes de Faber", C. R. Acad. Sci. Paris, Sér I **340**, 855-860 (2005).
[2] B. A. Cipra, "The Best of 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms", SIAM News **33**, (2000).
[3] T. A. Driscoll, K. T. Toh, L. N. Trefethen, "From Potential Theory to Matrix Iterations in Six Steps", SIAM Review **40**, 547-578 (1998).
[4] M. Eiermann, "Fields of Values and Iterative Methods", Linear Algebra and Its Applications **180**, 167-197 (1993).
[5] M. Eiermann, O. G. Ernst, "Geometric Aspects of the Theory of Krylov Subspace Methods", Acta Numer. **10**, 251-312 (2001).
[6] H. C. Elman, *Iterative Methods for Large Sparse Nonsymmetric Systems of Linear Equations* (PhD Thesis, Yale University, New Haven, 1982).
[7] L. Gevorgyan, "On the Convergence Rate of Iterations and the Normalized Numerical Range", Math. Sci. Res. J. **8** (1), 16-26 (2004).

[8] A. Greenbaum, *Iterative Methods for Solving Linear Systems* (SIAM, Philadelphia, 1997).
[9] K. Gustafson, "A Min-Max Theorem", Notices Amer. Math. Soc. **15**, p. 799.
[10] M. A. Krasnoselsky et al, *Approximate Solutions of Operator Equations* (Wolters-Nordhoff, Gröningen, 1972).
[11] S. Mazur, "Über schwache Konvergenz in den Räumen (Lp)", Studia Math. **4**, 128-133 (1933).
[12] R. Osserman, "The Four-or-More Vertex Theorem", Amer. Math. Monthly **92** (5), 332-337.
[13] V. Simoncini, D. B. Szyld, "Recent Computational Developments in Krylov Subspace Methods for Linear Systems", Numerical Linear Algebra with Applications, **14**, 1-59 (2007).

Поступила 25 марта 2008