Известия НАН Армении. Математика, том 44, н. 5, 2009, стр. 19-26.

ТЕОРЕМЫ ИСПРАВЛЕНИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА ПЕРЕМЕННЫХ

Н. Н. ХОЛЩЕВНИКОВА

Московский государственный технологический университет "Станкин", Россия[1]
E-mail: *kholshchevnikova@gmail.com*

Аннотация. В работе для функций счетного множества переменных получены аналоги известных теорем об исправлении и представлении функций одного и нескольких переменных.

Рассмотрим функции счетного множества переменных, определенные на бесконечномерном торе $\mathbb{T}^\infty$, являющемся декартовым произведением счетного множества одномерных торов $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{T}^\infty = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : 0 \le x_n < 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

Бесконечномерный тор $\mathbb{T}^\infty$, снабженный тихоновской топологией, является метризуемым компактным пространством. На торе $\mathbb{T}^\infty$ определяется мера Лебега, как на пространстве-произведении пространств $\mathbb{T}$ с одномерной мерой Лебега. Таким образом, на торе $\mathbb{T}^\infty$ можно рассматривать пространства непрерывных функций, измеримых функций, функций из $L^p(\mathbb{T})$, $p \ge 1$, и другие.

Следующая система функций, определенных на $\mathbb{T}^\infty$, называется системой Йессена или счтно-кратной тригонометрической системой

$$\theta_{n_1,\ldots,n_p}(x) = \prod_{r=1}^{p} e^{2\pi i n_r x_r}, \ \ p \in \mathbb{N}, \ \ n_r \in \mathbb{Z}, \ \ x = (x_1, \ldots, x_p, \ldots) \in \mathbb{T}^\infty.$$

Систематическое исследование этой системы проведено Б. Йессеном [1] в 1934. Система Йессена является полной ортонормированной системой на $\mathbb{T}^\infty$. Мы будем рассматривать ряды по системе Йессена. Напомним результаты для функций одного и нескольких переменных, аналоги которых мы хотим получить в счетно-кратном случае. В 1942 Д. Е. Меньшов ([2], см.[3], п.12) доказал следующую знаменитую теорему об исправлении.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00669)

Теорема A (Д. Е. Меньшов [2]) *Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$, и для любого положительного σ можно определить периодическую с периодом 2π функцию $G(x)$ и измеримое множество Ω, обладающие свойствами:*

1. $\operatorname{mes}\Omega > 2\pi - \sigma$, $\Omega \subset [-\pi, \pi]$.
2. $G(x) = f(x)$, $x \in \Omega$.
3. *Ряд Фурье функции $G(x)$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$.*

В дальнейшем, тематика, связанная с этой теоремой, развивалась, изучались новые системы функций, рассматривались функции нескольких переменных, значительно упростилось доказательство самой теоремы (Р. И. Овсепян, Ф. Г. Арутюнян, С. В. Хрущев, А. М. Олевский, С. В. Кисляков, Б. С. Кашин. Подробно см. [4] или обзор А. А. Талаляна и Р. И. Овсепяна в [3]. Отметим также недавние результаты М. Г. Григоряна и А. А. Саргсяна).

В 1941 Д. Е. Меньшов [5] (см. также [3], п. 11) решил проблему, поставленную Н. Н. Лузиным, о представлении измеримой конечной почти всюду функции f тригонометрическим рядом, сходящимся к f почти всюду.

В 1988 С. В. Конягин [6] доказал, что тригонометрический ряд не может сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры. Таким образом, условие конечности почти всюду функции f в теореме Меньшова необходимо.

А. А. Талалян получил много важных результатов в теории представления функций. Приведем один из них.

Теорема B (А. А. Талалян [7]) *Существует тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(c_n z^n), \quad c_n, z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1, \quad \text{где} \quad c_n \to 0,$$

который обладает следующим свойством: для любой действительной измеримой функции f существуют числа $\lambda_n \in \{0, 1\}$ такие, что ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \operatorname{Re}(c_n z^n)$ сходится к f почти всюду на том множестве, где f конечна, и сходится к f по мере на том множестве, где f равна $+\infty$ или $-\infty$.

Усиление одномерных результатов и перенесение их на кратный случай было сделано Ф. Г. Арутюняном [8], [9]. На эти результаты мы будем существенно опираться. Обозначим через $\mathbb{Z}^{<\infty}$ множество бесконечномерных векторов $n = (n_1, ..., n_p, ...)$ с целочисленными координатами $n_p \in \mathbb{Z}$ $(p \in \mathbb{N})$, лишь конечное число которых отлично от нуля. Операции сложения векторов и умножения вектора на число выполняются в $\mathbb{Z}^{<\infty}$ покоординатно. Рассмотрим действительные ряды по системе Йессена:

$$(1) \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}^{<\infty}} a_n e^{2\pi i n x}, \text{ где } \quad a_{-n} = \overline{a_n}, \ \ x \in \mathbb{T}^\infty, \ \ nx = \sum_{k=1}^{\infty} n_k x_k, \ \ a_n \in \mathbb{C}.$$

Если для $n \in \mathbb{Z}^{<\infty}$ координаты n_k равны нулю для $k > p$, то для коэффициентов a_n будем пользоваться также обозначением $a_n = a_{n_1,\ldots,n_p}$. Хотя при этом каждый из коэффициентов a_n получает бесконечное число обозначений, по каждому из них n и a_n однозначно определяются.

Прямоугольные частичные суммы ряда (1) имеют вид

$$S_{p,N_1,\ldots,N_p}(x) = \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \ldots \sum_{n_p=-N_p}^{N_p} a_{n_1,\ldots,n_p} e^{2\pi i(n_1x_1+\ldots+n_px_p)},$$

где $p, N_1, \ldots, N_p \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{T}^\infty$.

Ряд (1) называется сходящимся по прямоугольникам в точке $x \in \mathbb{T}^\infty$ к числу s, если для любого $\epsilon > 0$ существует номер P такой, что для всякого $p \geq P$ найдется такое натуральное число N, что выполняется неравенство

$$|S_{p,N_1,\ldots,N_p}(x) - s| < \epsilon \quad \text{для} \quad N_1, \ldots, N_p \geq N.$$

Если для ряда (1) сходятся по прямоугольникам для каждого натурального p ряды $\sum_{n_1,\ldots n_p} a_{n_1,\ldots,n_p} e^{2\pi i(n_1x_1+\ldots+n_px_p)}$ в точке $x = (x_1, \ldots, x_p, \ldots)$ и существует предел

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n_1,\ldots,n_p} a_{n_1,\ldots,n_p} e^{2\pi i(n_1x_1+\ldots+n_px_p)} = s$$

(или, что тоже самое, если ряды

$$\sum_{n_1,\ldots n_p, n_p\neq 0} a_{n_1,\ldots,n_p} e^{2\pi i(n_1x_1+\ldots+n_px_p)}$$

сходятся по прмоугольникам в точке $x = (x_1, \ldots, x_p, \ldots)$ к числам σ_p и сходится ряд $a_0 + \sum_{p=1}^\infty \sigma_p = s$), то назовем *ряд* (1) *сходящимся по прямоугольникам в усиленном смысле в точке x к числу s*. Из определений нетрудно видеть, что если ряд сходится в усиленном смысле, то он сходится.

В [10] доказано, что из сходимости ряда (1) по прямоугольникам всюду на $\mathbb{T}^\infty$ к конечной функции $f(x)$ следует, что ряд (1) сходится по прямоугольникам в усиленном смысле всюду на $\mathbb{T}^\infty$. Заменить в этом утверждении сходимость всюду сходимостью почти всюду нельзя.

Заметим, что Т. И. Ахобадзе [11] рассматривал свойства счетно-кратных рядов Фурье по различным системам функций на $\mathbb{T}^\infty$ для более сильного вида сходимости.

Если имеются ряды

$$S(0) = a_0, \quad S(m) = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_m,\, n_m \neq 0} a_{n_1, n_2, \ldots, n_m} e^{2\pi i (n_1 x_1 + \ldots + n_m x_m)}, \quad m \in \mathbb{N}$$

то формальной суммой этих рядов $S(0) + S(1) + S(2) + \ldots + S(m) + \ldots$ назовем ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^{<\infty}} a_n e^{2\pi i n x},$$

коэффициенты $a_n = a_{n_1, \ldots, n_m}$, $n_m \neq 0$ которого совпадают с коэффициентами $a_{n_1, \ldots, n_m}$ ряда $S(m)$, а $a_0 = S(0)$. При этом, для частичных сумм рядов выполняется равенство:

$$S_{p, N_1, \ldots, N_p}(x) = a_0 + S(1)_{N_1}(x) + S(2)_{N_1, N_2}(x) + \ldots + S(p)_{N_1, \ldots, N_p}(x).$$

Назовем ряд (1) равномерно сходящимся по прямоугольникам в усиленном смысле на $E \subset \mathbb{T}^\infty$, если равномерно сходятся ряды

$$\sum_{n_1, \ldots, n_p} a_{n_1, \ldots, n_p} e^{2\pi i (n_1 x_1 + \ldots + n_p x_p)} = f_p(x), \quad p \in \mathbb{N}, \quad x \in E,$$

и равномерно сходится ряд $\sum_{p=1}^\infty f_p(x) = f(x)$ на E.

Если ряд (1) равномерно сходится по прямоугольникам в усиленном смысле к функции f на $\mathbb{T}^\infty$, то это ее ряд Фурье:

$$a_n = \int_{\mathbb{T}^\infty} f(x) e^{-2\pi i (n_1 x_1 + \ldots + n_p x_p)} d\mu,$$

где $n = (n_1, \ldots, n_p, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \mathbb{Z}^{<\infty}$ μ – мера Лебега на $\mathbb{T}^\infty$. Через μ_m обозначим меру Лебега на $\mathbb{T}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Под $\|f\|$ имеется в виду норма в пространствах $C(\mathbb{T}^m)$ или $C(\mathbb{T}^\infty)$.

Сформулируем результаты Ф. Г. Арутюняна [8] в частном случае и в использованных выше обозначениях.

Теорема С (Ф. Г. Арутюнян [8]**)** *Для любой $f \in C(\mathbb{T}^m)$ и любого $\varepsilon > 0$, существует функция $g \in C(\mathbb{T}^m)$ такая, что $\mu\{f \neq g\} < \varepsilon$ и ряд Фурье $S(g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} a_n e^{2\pi i n x}$ функции g равномерно сходится по прямоугольникам на $\mathbb{T}^m$. При этом коэффициенты $a_n = 0$, если в номере $n = (n_1, \ldots, n_m)$ индекс $n_m = 0$. Справедливо неравенство $\|g\| \leq C\|f\|/\varepsilon$.*

Замечание 1. *C не зависит от размерности m, и, как видно из доказательства теорем в* [8], *можно взять $C = 2^9$.*

Теорема 1. *Пусть $f \in C(\mathbb{T}^\infty)$ и $\varepsilon > 0$. Найдется функция $g \in C(\mathbb{T}^\infty)$ с равномерно сходящимся по прямоугольникам (в усиленном смысле) на $\mathbb{T}^\infty$ рядом Фурье такая, что $\mu\{f \neq g\} < \varepsilon$.*

Доказательство: Положим $f_n(x) = f(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0, \dots)$, $x \in \mathbb{T}^\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Нетрудно видеть, что последовательность непрерывных функций равномерно сходится к f на $\mathbb{T}^\infty$. Выберем из нее такую подпоследовательность f_{n_k}, что

$$\|f - f_{n_k}\| < \frac{\varepsilon}{2^{2(k+1)}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\|f_{n_k} - f_{n_m}\| < \varepsilon/2^{2k+1}$ при $m > k$. Заметим, что

$$f_{n_1}(x) + (f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)) + \ldots + (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)) + \ldots = f(x),$$

причем сходимость ряда равномерна на $\mathbb{T}^\infty$.

Функции $f_n \in C(\mathbb{T}^\infty)$ можно считать также функциями из $C(\mathbb{T}^n)$, не меняя для удобства обозначения для них. При этом

$$\|f_n\|_{C(\mathbb{T}^\infty)} = \|f_n\|_{C(\mathbb{T}^n)}, \quad \mu_n\{x \in \mathbb{T}^n \colon f_n(x) < a\} = \mu\{x \in \mathbb{T}^\infty \colon f_n(x) < a\}$$

для любого действительного a.

В силу теоремы C для всякой функции $f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \in C(\mathbb{T}^{n_k})$ найдется непрерывная функция $g_k \in C(\mathbb{T}^{n_k})$ с равномерно сходящимся по прямоугольникам рядом Фурье $S(g_k)$, такая, что

$$\mu\left\{x \in \mathbb{T}^{n_k} \colon f_{n_k} - f_{n_{k-1}}(x) \neq g_k(x)\right\} < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \tag{2}$$

$$S(g_k) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^{n_k}} a_\nu e^{2\pi i \nu x},$$

где $a_\nu = 0$, если индекс $\nu_{n_k} = 0$ в номере $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n_k})$, и

$$\|g_k\| \le \frac{C}{\varepsilon}\big\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\big\| < \frac{C}{\varepsilon 2^{2(k-1)+1}}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{\varepsilon \cdot 2^{2k-1}} < \frac{C}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Положим $g_k(x) = g_k(x_1, \dots, x_{n_k})$ для $x \in \mathbb{T}^\infty$. Так как $\|g_k\|_{C(\mathbb{T}^{n_k})} = \|g_k\|_{C(\mathbb{T}^\infty)}$, из (3) следует, что ряд $g_1 + \ldots + g_k + \ldots$ равномерно сходится к функции $g \in C(\mathbb{T}^\infty)$.

Из (2) следует, что функции f и g совпадают вне множества множества

$$A = \{x \in \mathbb{T}^\infty : f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \neq g_k \text{ для некоторого } k \geq 2\}, \quad \mu(A) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Заметим, что формальная сумма рядов $S(g_1) + S(g_2) + \ldots + S(g_k) + \ldots$ представляет собой ряд вида (1), который равномерно сходится по прямоугольникам в усиленном смысле к функции g и является рядом Фурье функции g. Теорема доказана.

Для измеримых на $\mathbb{T}^\infty$ функций справедлива классическая теорема Лузина о C-свойстве (см. [12], глава 7). Поэтому в формулировке теоремы 1 в качестве f может быть взята произвольная измеримая почти всюду конечная на $\mathbb{T}^\infty$ функция.

Сформулируем теперь теорему Ф. Г. Арутюняна о представлении, тоже в упрощенной форме.

Теорема D (Ф. Г. Арутюнян [9]**)** *Существует m-кратный тригонометрический ряд*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} a_n e^{2\pi i n x}, \quad a_{-n} = \overline{a_n},$$

$a_n = 0$, если $n_m = 0$ в $n = (n_1, \ldots, n_m)$, который обладает свойством: для любой измеримой действительной функции f на $\mathbb{T}^m$, конечной почти всюду или со значениями $+\infty$ и $-\infty$ на множестве положительной меры, существуют числа λ_n, $\lambda_n = \lambda_{-n} \in \{0, 1\}$ такие, что ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \lambda_n a_n e^{2\pi i n x}$ сходится почти всюду по прямоугольникам к f там, где f конечна, и суммируется к f по мере на всем $\mathbb{T}^m$.

С помощью теоремы D может быть доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Существует счетно-кратный тригонометрический ряд*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^{<\infty}} c_n e^{2\pi i n x}, \quad c_{-n} = \overline{c_n},$$

обладающий свойством: для любой измеримой действительной функции f на $\mathbb{T}^\infty$ существуют числа λ_n, $\lambda_n = \lambda_{-n} \in \{0, 1\}$ такие, что ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^{<\infty}} \lambda_n a_n e^{2\pi i n x}$$

сходится почти всюду по прямоугольникам к функции f в усиленном смысле.

Доказательство: Для каждого $m \in \mathbb{N}$ в силу теоремы D найдется ряд

$$\sigma_m = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^m} c_\nu^{(m)} e^{2\pi i \nu x}$$

с указанными в теореме D свойствами. Формальную сумму рядов $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + \ldots$ рассмотрим как счетно-кратный ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}^{<\infty}} c_n e^{2\pi i n x}$ и покажем, что этот ряд искомый.

Пусть f – измеримая действительная функция на $\mathbb{T}^\infty$. Заметим, что тогда существуют непрерывные функции f_n на $\mathbb{T}^\infty$ такие, что $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ почти всюду на $\mathbb{T}^\infty$. Например, для измеримой почти всюду конечной функции f это следует из теоремы Лузина. В общем случае, положим

$$E = \{x \colon |f(x)| < \infty\}, \quad E^+ = \{x \colon f(x) = +\infty\}, \quad E^- = \{x \colon f(x) = -\infty\}$$

и

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & x \in \mathbb{T}^\infty \setminus E \end{cases}, \quad g^+(x) = \begin{cases} +\infty, & x \in E^+ \\ 0, & x \in \mathbb{T}^\infty \setminus E^+ \end{cases},$$

$$g^-(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in E^- \\ 0, & x \in \mathbb{T}^\infty \setminus E^- \end{cases}.$$

Пусть

$$g_0^+(x) = \begin{cases} 2, & x \in E^+ \\ 0, & x \in \mathbb{T}^\infty \setminus E^+ \end{cases}, \quad g_0^-(x) = \begin{cases} 2, & x \in E^- \\ 0, & x \in \mathbb{T}^\infty \setminus E^- \end{cases}.$$

К почти всюду конечным измеримым функциям $g(x)$, $g_0^+(x)$, $g_0^-(x)$ сходятся последовательности непрерывных функций $g_n(x)$, $g_n^+(x)$, $g_n^-(x)$ соответственно. Тогда последовательность непрерывных функций

$$f_n(x) = g_n(x) + \left(g_n^+(x)\right)^n - \left(g_n^-(x)\right)^n$$

почти всюду сходится к $g(x) + g^+(x) + g^-(x) = f(x)$. Для каждого n последовательность непрерывных функций $f_{n,m} = f_n(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $m \in \mathbb{N}$, равномерно сходится к f_n на $\mathbb{T}^\infty$. Найдется подпоследовательность f_{n,k_n}, почти всюду сходящаяся к f на $\mathbb{T}^\infty$. При этом функции f_{n,k_n} можно рассматривать как функции из $C(\mathbb{T}^{k_n})$. В силу теоремы D, можно выбрать такой подряд S_n ряда $\sigma_{k_n} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^{k_n}} c_\nu^{(k_n)} e^{2\pi i \nu x}$, что

$$S_n = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^{k_n}} \lambda_\nu^{(k_n)} c_\nu^{(k_n)} e^{2\pi i \nu x}, \quad \text{где} \quad \lambda_\nu^{(k_n)} = \lambda_{-\nu}^{(k_n)} \in \{0, 1\},$$

сходится почти всюду на $\mathbb{T}^{k_n}$ по прямоугольникам к функции $f_{n,k_n} - f_{n-1,k_{n-1}}$ при $n > 1$ и к f_{1,k_1} при $n = 1$. Тогда счетно-кратный ряд, являющийся формальной суммой рядов $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$, почти всюду сходится по прямоугольникам в усиленном смысле к функции f. Теорема доказана.

В теореме 2, в отличии от кратного случая, устанавливается сходимость почти всюду тригонометрического ряда к произвольной измеримой функции. Как и теоремы B и D, эта теорема устанавливает существование универсального относительно подрядов тригонометрического счетно-кратного ряда.

Abstract. Some similarities of the well-known theorems on correction and representation of functions of one and several variables are proved for functions of countably many variables.

Список литературы

[1] B. Jessen, "The Theory of Integration in a Space of an Infinite Number of Dimensions", Acta Math. **63**, 249-323 (1934).
[2] D. Menschoff. "Sur la Convergence Uniforme des Séries de Fourier", Мат. сборник **11** (53), 67-96 (1942).
[3] Д. Е. Меньшов, *Избранные труды* (Факториал, Москва, 1997).
[4] А. А. Талалян, Р. Е. Овсепян, "Теоремы Д. Е. Меньшова о представлении и их влияние на развитие метрической теории функции", УМН, 47:5 (287), 15-44 (1992).
[5] D. Menschoff, "Sur la Représentation des Fonctions Mesurables par des Séries Trigonométriques", Mat. Sbornik, **9 (51)** (3), 667-692 (1941).
[6] С. В. Конягин, "О пределах неопределенности тригонометрических рядов", Мат. заметки **44** (6), 770-784 (1988).
[7] А. А. Талалян, "Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов", Изв. АН СССР, сер. матем. **27**, 621-660 (1963).
[8] Ф. Г. Арутюнян, "Некоторое усиление теоремы Меньшова об исправлении", Мат. заметки **35** (1), 31-41 (1984).
[9] Ф. Г. Арутюнян, "Представление измеримых функций многих переменных кратными тригонометрическими рядами", Мат. сборник **126 (168)** (3), 267-285 (1985).
[10] Н. Н. Холщевникова, "Сходимость тригонометрических рядов счетного числа переменных", Фундамент. физико-матем. проблемы и модел. технико-технолог. систем **10**, 24-27 (2007).
[11] Т. И. Ахобадзе, "О счетно-кратных рядах фурье", Сообщ. АН Груз. ССР **122** (3), 489-492 (1986).
[12] В. И. Богачев, *Основы теории меры* **2** (НИЦ, "Регулярная и хаотическая динамика", Москва, 2003).

Поступила 20 января 2009