РАВНОМЕРНАЯ И КАСАТЕЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НА ПОЛОСЕ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ИМЕЮЩИМИ ОПТИМАЛЬНЫЙ РОСТ

С. АЛЕКСАНИЯН

Институт математики, НАН Армении
E-mail: asargis@instmath.sci.am

Аннотация. Пусть функция f непрерывна на закрытой полосе $S_h = \{z : |\operatorname{Im}z| \leq h\}$ и голоморфна в ее внутренности. В работе исследуется задача равномерного и касательного приближения функции f мероморфными функциями g с наилучшей оценкой роста g в терминах неванлинновской характеристики $T(r, g)$. Этот рост зависит от роста f на S_h и дифференциальных свойств f на ∂S_h . Предполагается, что возможные полюсы g лежат только на мнимой оси.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Задача равномерного и касательного приближения функций, голоморфных в угле мероморфными функциями с оценкой их роста исследовалась в работах [1] и [2]. Аналогичные приближения на вещественной оси $\mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемых функций рассматривались в [3]. В настоящей работе мы рассматриваем задачу равномерного и касательного приближения на закрытой полосе. Целью этой работы является конструировать мероморфные функции, аппроксимирующие заданную функцию f на полосе и имеющие возможный медленный рост на комплексной плоскости в терминах их неванлинновской характеристики. Аналогичная задача равномерного и касательного приближения *целыми* функциями исследовалась в [4].

Работа состоит из двух параграфов. Первый из них содержит введение и предварительные сведения, а второй представляет основные результаты со своими доказательствами.

1.1. Некоторые обозначения и определения. 1. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ – соответственно множества натуральных, вещественных и комплексных чисел. Расширенную комплексную плоскость обозначим через $\bar{\mathbb{C}}$. Для множества $E \subset \mathbb{C}$

обозначим через $\overline{E}$, E° и ∂E соответственно *замыкание*, *внутренность* и *границу* E в $\mathbb{C}$.

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}$ и E – относительно закрытое множество в Ω . Для класса $C(E)$ непрерывных функций $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ введем равномерную норму

$$\|f\|_E = \sup_{z \in E} |f(z)|,$$

и пусть

$$C_b(E) := \{f \in C(E) : \|f\|_E < +\infty\}.$$

Пусть $C^p(\Omega)$ – класс p раз непрерывно дифференцируемых в смысле $\mathbb{R}^2$ комплексных функций в Ω . Для жордановой области D с положительно ориентированной кусочно гладкой границей и для функции u из класса C^1 в окрестности $\overline{D}$ следующая формула является комплексной версией теоремы дивергенции:

$$(1) \quad \int_{\partial D} u(z) dz = i \int_D 2\bar{\partial}u d\sigma,$$

где σ – плоская мера Лебега на D и

$$(2) \quad 2\bar{\partial}u = \partial_1 u + \partial_2 u.$$

Обычно, класс функций, голоморфных в Ω обозначается через $H(\Omega)$. Таким образом, условие $f \in H(\Omega)$ означает, что $f \in C^1(\Omega)$ и $\bar{\partial}f \equiv 0$ в Ω . Для $\Omega = \mathbb{C}$ функция f обычно называется целой. Для относительно закрытого множества $E \subset \Omega$ возьмем $A(E) = C(E) \cap H(E^\circ)$ и $A_b(E) = C_b(E) \cap H(E^\circ)$. Обозначим через $A'(E)$, $A''(E), \dots, A^p(E)$ классы функций $E \rightarrow \mathbb{C}$ соответственно один, два, ..., p раз непрерывно дифференцируемые на E в смысле $\mathbb{C}$.

Положим также

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},$$

$$D_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad a > 0 \quad (- \text{открытый круг}),$$

$$D_r = D_r(0),$$

$$S_h := \mathbb{R} \times [-h, h], \quad h > 0 \quad (- \text{полоса}),$$

$$\Delta_\alpha := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta| \leq \alpha/2\}, \quad \alpha \in (0, 2\pi) \quad (- \text{угол}),$$

$$\Delta_\alpha(\beta) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta - \beta| \leq \alpha/2\}, \quad \alpha, \beta \in (0, 2\pi),$$

$$\Delta_\alpha(\beta, a) := \{\zeta \in \mathbb{C} : (\zeta - a) \in \Delta_\alpha(\beta)\}, \quad a \in \mathbb{C} \quad - \text{угол с центром в } a,$$

$$\Omega_h^\alpha := \mathbb{C} \setminus (\Delta_{\pi-\alpha}(-\pi/2, -2ih)^\circ \cup \Delta_{\pi-\alpha}(\pi/2, 2ih)^\circ) \cup S_{2h}, \quad h > 0,$$

$$\Omega_{h,r}^\alpha := \Omega_h^\alpha \cap \bar{D}_r, \quad h, r > 0.$$

Мы используем функцию Неванлинны $\log^+ : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, определенную следующим образом

$$\log^+ x = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ \log x & \text{при } x \geq 1, \end{cases}$$

которая является неотрицательной и неубывающей функцией на $\mathbb{R}^+$. $T(r, g)$ обозначает неванлинновскую характеристику мероморфной функции g , $g(0) \neq \infty$:

$$T(r, g) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln^+ |g(re^{i\theta})| d\theta + \int_0^r n(t, g) t^{-1} dt,$$

где $n(t, g)$ – число *полюсов* g в D_t с учетом их кратностей.

Пусть теперь $f \in C(E)$, где $E \subset \mathbb{C}$ – закрытое неограниченное множество такое, что $E \cap \partial D_r \neq \emptyset$ для $r \geq r_0 \geq 0$. Обозначим для $r \geq r_0$

$$M_f(r) = M(f, E) := \|f\|_{E \cap D_r}.$$

2. Обозначим через B класс неубывающих C^1 -функций $q \geq 0$ на $\mathbb{R}^+$, для которых существует конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{rq'(r)}{q(r)} = \rho.$$

3. Для неубывающих функций $\mu \geq 0$ на $[r_0, +\infty)$, величина

$$\rho_\mu := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \mu(r)}{\log r}$$

называется порядком μ . Если $\nu \geq 0$ – другая неубывающая функция на $[t_0, +\infty)$ конечного порядка, то величина

$$\sigma_\mu^\nu := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \mu(r)}{\nu(r)}$$

называется ν -типом функции μ .

Пусть теперь $E \subset \mathbb{C}$ – закрытое ограниченное множество такое, что $E \cap \partial D_r \neq \emptyset$ для $r \geq r_0$. Так же как и в [4] здесь тоже используем следующую терминологию для функций $f \in C(E)$.

1. Величина $d_f = d_f(E) := \rho_\mu$ для $\mu = M_f$ является *степенью* f на E .
2. $\sigma_f^\nu = \sigma_f^\nu(E) := \sigma_\mu^\nu$ для $\mu = M_f$ является ν -*типом* f на E .

3. Для $\mu = \log^+ M_f$ порядком и типом f на E соответственно будут величины $\rho_f = \rho_f(E) := \rho_\mu$, $\sigma_f = \sigma_f(E) := \sigma_\mu$.

1.2. Аппроксимация на S_h функциями из класса $A(\Omega_h^\alpha)$. Следующая лемма аналогична лемме 1 из работы [3] для полосы.

Лемма 1. Пусть $f \in A''(S_h)$ и $\varphi \in A(\Omega_h^\alpha)$ для $\alpha \in (0, \pi/2)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ такая, что

$$(3) \quad \|f\varphi - F\|_{S_h} < \varepsilon,$$

$$(4) \quad M_f(r) < 3M_f(lr + h)M_\varphi(r) + c\varepsilon \exp\{ca_{2r}\},$$

где

$$(5) \quad a_r(f, \varphi) = 1 + \frac{c}{\varepsilon} \max_{|z| \leq lr+h} \left[|z|^2 |f''_\partial(z)| \right] M_\varphi(lr + h)$$

для $l = 1 + \tan(\alpha/2) > 1$, f_∂ – сужение f на ∂S_h и $c = c(h, \alpha) > 0$ – константа, зависящая только от α и h .

Доказательство. При доказательстве мы воспользуемся тем же методом, что использовался при доказательстве леммы 5 из работы [4].

Заменяя f на $\varepsilon^{-1}f$ и F на $\varepsilon^{-1}F$, можно свести доказательство леммы к случаю, когда $\varepsilon = 1$. Продолжим f как в лемме 5 работы [4], взяв $f_*(\zeta) = f(\zeta)$ для $\zeta \in S_h$, и

$$(6) \quad f_*(\zeta) := if(\xi + \eta - h\sigma_\eta + ih\sigma_\eta) + (1 - i)f(\xi + ih\sigma_\eta)$$

для $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \setminus S_h$, где σ_η знаковая функция, т.е. $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_\eta = \eta/|\eta|$ для $\eta \neq 0$. Тогда из (6) следует, что $f_* \in C^1(\mathbb{C})$ и оценка

$$(7) \quad M_{f_*}(r, \Omega_h^\alpha) \leq 3M_f(lr + h, S_h), \quad r \geq 0,$$

для роста f_* на Ω_h^α . Очевидно, что из (6) следует $\bar{\partial}f_*(\zeta) = 0$ для $\zeta \in S_h$. При этом из (2) и (6) следует

$$(8) \quad 2\bar{\partial}f_*(\zeta) = (1 - i)[f'(\xi + \eta - h\sigma_\eta + ih\sigma_\eta) - f'(\xi + ih\sigma_\eta)]$$

для $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \setminus S_h$. Очевидно, что $f_* \in A''(\Omega_h^\alpha)$ и, следовательно, из (8) приходим к оценке

$$(9) \quad |\bar{\partial}f_*(\zeta)| \leq (|\eta| - h)M_{f'}(l|\xi| + h, \partial S_h), \quad \zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h.$$

Из (5) и (9) следует

$$(10) \quad |(\varphi\bar{\partial}f_*)(\zeta)| \leq 2(|\eta| - h)a_{l|\xi|+h}/|\zeta|^2, \quad \zeta = \xi + i\eta \in \Omega_h^\alpha.$$

Чтобы конструировать аппроксимирующую функцию F мы должны реализовать для любого фиксированного полюса $\zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h^o$ конструктивную аппроксимацию ядра Коши $C_\zeta(z) = (\zeta - z)^{-1}$, $z \in S_h$ функциями по z , голоморфными и ограниченными в Ω_h^α , при этом аппроксимацию необходимо реализовать не только для $z \in S_h$, но и для любого компактного подмножества Ω_h^α при достаточно больших $|\zeta|$. Очевидно, что аппроксимация данного вида эквивалентна аппроксимации нуль-функции функциями, голоморфными в Ω_h^α , которые равны 1 при $\zeta \in \Omega_h^\alpha$.

Пусть $\zeta \rightarrow n(|\zeta|) \in \mathbb{N}$, $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$ – кусочно постоянная функция, зафиксируем (однозначно) $n(|\zeta|)$, удовлетворяющую следующему условию

$$(11) \quad 0 \leq a_{|\zeta|} - n(|\zeta|) < 1, \quad \zeta \in \partial\Omega_h^\alpha.$$

Для $(\zeta, z) \in (\Omega_h^\alpha)^2$ определим функцию $Q_\zeta(z) = Q(\zeta, z) \in H(\Omega_h^\alpha)$ так, что $Q_\zeta(\zeta) = 1$ для $\zeta \in \Omega_h^\alpha$,

$$(12) \quad Q(\zeta, z) := \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{z - \zeta_0} \right)^{n(|\zeta|)},$$

где $\operatorname{Re}\zeta_0 = \operatorname{Re}\zeta$ для любого $\zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h$ и $2d(\zeta, \partial S_h) = d(\zeta_0, \partial S_h)$ для $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$. Отсюда по теореме Коши

$$(13) \quad \int_{\partial D} Q_\zeta(z) C_\zeta(z) dz = \begin{cases} -2\pi i & \text{при } \zeta \in D, \\ 0 & \text{при } \zeta \in \Omega_h^\alpha - \bar{D} \end{cases}$$

для любой жордановой области $D \subset \Omega_h^\alpha$ с кусочно гладкой, положительно ориентированной границей. Теперь для $r > 0$ рассмотрим следующие интегралы

$$(14) \quad I_r(z) = \pi^{-1} \int_{\Omega_{h,r}^\alpha \setminus S_h} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta, \quad z \in \Omega_{h,r}^\alpha,$$

с поынтегральной функцией

$$G_\zeta(z) = (\varphi \bar{\partial} f_*)(\zeta) Q_\zeta(z) C_\zeta(z).$$

Введем новые функции $F_r \in C(\Omega_{h,r}^\alpha)$ следующим образом

$$(15) \quad F_r(z) = (\varphi f_*)(z) + I_r(z), \quad z \in \Omega_{h,r}^\alpha.$$

Из (1), условия $\bar{\partial}\varphi = 0$ и теоремы Морера можем сказать, что

$$F_r(z) \in H((\Omega_{h,r}^\alpha)^o).$$

Таким образом, очевидно, что $F_r \in A(\Omega_{h,r}^\alpha)$ для всех $r > 0$.

Докажем, что I_r локально-равномерно сходится на Ω_h^α при $r \rightarrow \infty$ к следующему интегралу

$$(16) \quad I_\infty(z) = \pi^{-1} \int_{\Omega_h^\alpha \setminus S_h} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta, \quad z \in \Omega_h^\alpha.$$

Ввиду (15) искомая функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ может быть определена формулой

$$(17) \quad F(z) := (\varphi f_*)(z) + I_\infty(z), \quad z \in \Omega_h^\alpha,$$

откуда следует, что

$$(18) \quad \|\varphi f - F\|_{S_h} = \|I_\infty\|_{S_h},$$

$$(19) \quad |F(z)| \leq |(\varphi f_*)(z)| + |I_\infty(z)| \text{ for } z \in \Omega_h^\alpha.$$

Итак, при помощи этой схемы аппроксимация φf на S_h функциями $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ и оценка роста F на Ω_h^α сведены к оценке I_∞ .

Из (12) для $z \in \Omega_h^\alpha$ и $\zeta \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h$ имеем

$$(20) \quad |G_\zeta(z)| \leq \frac{|\varphi \bar{\partial} f_*(\zeta)|}{|\zeta - z|} \left[\frac{2h + 2|\xi| \tan(\alpha/2) - |\eta| + h}{2h + 2|\xi| \tan(\alpha/2)} \right]^{n(l|\xi|+h)}.$$

Для компактного множества $K \subset \Omega_h^\alpha$ существует $r_0 > 2h$ так, что $K \subset D_{r_0}$ и пусть $r'' > r' > 3r_0$. Получая, что

$$(21) \quad \int_h^{2h+|\xi| \tan(\alpha/2)} \left[\frac{3h + 2|\xi| \tan(\alpha/2) - |\eta|}{2h + 2|\xi| \tan(\alpha/2)} \right]^{n(l|\xi|+h)} d\eta < \frac{1}{n(l|\xi|+h)+1},$$

и учитывая, что $|\eta| - h < |\zeta - z|$ для $z = x + iy \in K$ and $\zeta \in \Omega_{h,r''}^\alpha \setminus \Omega_{h,r'}^\alpha$, получим

$$(22) \quad |I_{r''}(z) - I_{r'}(z)| \leq 4 \int_{r'}^{r''} \xi^{-2} d\xi < 4 \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) \rightarrow 0 \text{ при } r', r'' \rightarrow +\infty$$

равномерно для $z \in K$. Это доказывает абсолютную и локально-равномерную сходимость $I_\infty(z)$ для $z \in \Omega_h^\alpha$, а также то, что $I_\infty \in C(\Omega_h^\alpha)$.

Для доказательства (3) мы должны оценить $I_\infty(z)$, $z \in S_h$, которое следует из (18):

$$(23) \quad |I_\infty(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_h^\alpha \setminus S_h} \frac{|\varphi \bar{\partial} f_*(\zeta)|}{|\zeta - z|} \left[\frac{3h + 2|\xi| \tan(\alpha/2) - |\eta|}{2h + 2|\xi| \tan(\alpha/2)} \right]^{n(l|\xi|+h)} d\sigma_\zeta.$$

Учитывая, что $|\eta| - h \leq |\zeta - z|$ и

$$|\varphi \bar{\partial} f_*(\zeta)| \leq (|\eta| - h) n(|\zeta|) / |\zeta|^2, \quad z \in S_h,$$

из (20), (21) и (23) получим

$$(24) \quad |I_\infty(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|\xi| \geq h} |\xi|^{-2} 1 d\xi = \frac{2}{\pi h}.$$

Таким образом, из (16), (17) и (24) мы приходим к (3).

Пусть теперь $z \in \Omega_h^\alpha \setminus S_h = E$. Представим $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$(25) \quad I_\infty(z) = \int_B G_\zeta(z) d\sigma_\zeta + \int_{E \setminus B} G_\zeta(z) d\sigma_\zeta = I_1(z) + I_2(z),$$

где

$$B = \Omega_h^\alpha \cap D_\rho(z), \quad \rho = 2|z| \sin(\alpha/2) + 4h.$$

Оценивая $I_1(z)$, получим

$$(26) \quad \begin{aligned} |I_1(z)| &\leq c_1 \exp\{2n(2l|z| + 2h)\} \int_B (|\zeta| |\zeta - z|)^{-1} d\sigma_\zeta < \\ &< c_2 \exp\{2n(2l|z| + 2h)\}, \end{aligned}$$

где константы $c_1, c_2 > 0$ зависят от α и h . Вторым интеграл можно оценить как в (24), т.е. $I_2(z) \leq 2/(\pi h)$. Таким образом, из (17), (19) и (25), (26) мы перейдем к (4), что завершает доказательство леммы.

2. МЕРОМОРФНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НА ПОЛОСЕ

Процесс оптимально равномерного приближения на полосе мероморфными функциями реализуется в два шага, первый из которых – это лемма 1. Вторым шагом – это аппроксимация функции $f \in A(\Omega_h^\alpha)$ на S_h мероморфными функциями.

2.1. Мероморфная аппроксимация S_h . В этом параграфе мы аппроксимируем функцию $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ на S_h мероморфными функциями. Потом, используя лемму 1, получим мероморфную аппроксимацию $f \in A''(S_h)$ на S_h . Мы воспользуемся следующей леммой (см. [2], стр. 548-549).

Лемма 2. *Для голоморфной функции $z \rightarrow \sqrt{z}$, $\sqrt{1} = 1$, однозначной в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, и для числа $\delta \in [0, 1]$ существует мероморфная функция $\omega = \omega_\delta$ с полюсами на $(-\infty, -1)$ такая, что*

$$(27) \quad |\omega(z) - \sqrt{z}| \leq (1/2)\sqrt{|z|}, \quad |\arg z| \leq \pi - \delta, \quad |z| \geq \delta,$$

и

$$(28) \quad T(r, \omega) = O(\log^2 r) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Для функции $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, $\alpha \in (0, \pi/2)$ и чисел $p > 1$ и $\varepsilon > 0$ существует мероморфная функция G с полюсами на мнимой оси такая, что

$$(29) \quad |F(z) - G(z)| < \varepsilon, \quad z \in S_h,$$

и

$$(30) \quad T(r, \varepsilon^{-1}G) < c \int_h^{pr} \int_h^t \log^+ \frac{M_F(\tau)}{\varepsilon} \frac{d\tau dt}{\tau t} + c \log^+(r+h), \quad r \geq h,$$

где $c = c(h, p, \alpha) > 0$ – константа, зависящая только от h , α и p .

Доказательство. Заменяя F на $\varepsilon^{-1}F$ и G на $\varepsilon^{-1}G$, можно свести доказательство к случаю $\varepsilon = 1$. Возьмем $\omega(z) = \omega_\delta(2hiz)$ из леммы 2 с $\delta = \min\{2h, 1\}$ так, что

$$(31) \quad \begin{aligned} |\omega(\zeta)| &\geq (2h|\zeta|)^{1/2}, \quad \zeta \in \partial S_{2h}(\alpha), \\ |\omega(z)| &< c_1 + c_2|z|^{1/2}, \quad z \in S_h, \end{aligned}$$

где через $c_j > 0$, $j = 1, 2, \dots$ обозначаем константы, зависящие только от α , p и h . Из включения $S_h \subset \Omega_h^\alpha$ следует, что существует константа $c_3 \in (0, 1)$ такая, что

$$(32) \quad |\zeta - z| > c_3(|\zeta| + |z|), \quad \zeta \in \partial\Omega_h^\alpha, \quad z \in S_h.$$

Теперь рассмотрим рациональную по z и кусочно гладкую по $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$ функцию Q такую, что $Q(\zeta, \zeta) = 1$ для $\zeta \in \partial\Omega_h^\alpha$:

$$Q(\zeta, z) = \left(\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right)^{n'},$$

где n' и ζ' выберем позднее. Зафиксируем

$$q = \min\{\sqrt{p}, (p+h)/p\} > 1$$

и рассмотрим последовательность $(n_k)_{k=1}^\infty$, $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть

$$\Gamma = \partial\Omega_h^\alpha, \quad \Gamma_0 = \Gamma \setminus \partial S_{2h},$$

$$\Gamma^+ = \{\zeta \in \Gamma : \operatorname{Im}\zeta > 0\}, \quad \Gamma^- = \{\zeta \in \Gamma : \operatorname{Im}\zeta < 0\}, \quad \Gamma_r^\pm = \Gamma^\pm \cap \overline{D}_r(\pm i2h).$$

Обозначим $\zeta' = (q^k + 2h)i$ и для $\zeta \in \gamma_k^+ = \Gamma_{q^k}^+ \setminus \Gamma_{\rho_{q^{k-1}}}^+$ рассмотрим соответствующий полюс $(q^k + 2h)i$, где $q_k = q^k \sin(\alpha/2)$ и $\zeta' = -(q^k + 2h)i$ для $\zeta \in \gamma_k^- = \Gamma_{\rho_k}^- \setminus \Gamma_{\rho_{k-1}}^-$. Каждому $\zeta \in \Gamma$ соответствует полюс на мнимой оси, так как $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ для $i \neq j$ и $\Gamma = \bigcup_{k=1}^\infty \gamma_k$ и $\gamma_i = \gamma_i^+ \cup \gamma_i^-$. Для $\zeta \in \gamma_k$, $\zeta \in \Gamma/\gamma_1$ возьмем $n' = n_k$, $k = 1, 2, \dots$. Теперь, если $z \in S_h$, то при выборе полюсов ζ' получаем

$$|\zeta - \zeta'| / |z - \zeta'| \leq q/(q+h) \quad \text{для} \quad \zeta \in \gamma_1,$$

и

$$\left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right| \leq \left[\cos^2(\alpha/2) + (1 - q^{-1})^2 \sin^2(\alpha/2) \right]^{1/2} = d_1 < 1.$$

Существует $\mu = \mu(q, h, \alpha) \in (0, 1)$ такое, что

$$\left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right| \leq d_2 < 1, \quad z \in \overline{D}_{\mu|\zeta|},$$

где $d_2 = (1 + d_1)/2$. Таким образом, для $d = \max\{d_2, q/(q+h)\}$ получим

$$(33) \quad |Q(\zeta, z)| \leq d^{n_k}, \quad \zeta \in \gamma_k, \quad z \in S_h \cup \overline{D}_{\mu|\zeta|}.$$

Эта оценка выполняется также для $\zeta \in \Gamma \setminus \gamma_k$ и $|z| = \mu\rho_k$, $k = 1, 2, \dots$, где ρ_k – расстояние от γ_{k+1} до 0. В самом деле, если $|\zeta| > q_k$, то мы приходим к предыдущему случаю, когда $|z| \leq \mu|\zeta|$. Если же $|\zeta| \leq q_{k-1}$, то тогда $q^{m-1} \sin(\alpha/2) < |\zeta| < q^m \sin(\alpha/2)$ для некоторого $m \leq k-1$. Так что $|z - \zeta'| \geq q_m (\mu q^{k-m} - 1)$, и мы получим

$$\left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right| \leq d.$$

Теперь определим последовательность $(n_k)_{k=1}^\infty$, удовлетворяющую условию

$$(34) \quad 0 \leq n_k - c_4 [A + \log^+ M(q_k, F)] < 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $c_4 = (\log(1/d))^{-1}$. Константу $A > 0$ выберем ниже так, чтобы

$$(35) \quad |F(\zeta)Q(\zeta, z)| \leq e^{-A},$$

если а) $\zeta \in \Gamma$ и $z \in S_h \cup \overline{D}_{\mu|\zeta|}$ или б) $\zeta \in \Gamma \setminus \gamma_k$, $|z| = \mu\rho_k$ для $k \in \mathbb{N}$. Интеграл

$$(36) \quad I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)Q(\zeta, z)}{\omega(\zeta)\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

локально-равномерно сходится на $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, поэтому $I \in H(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$. Положим

$$F_0(z) = \begin{cases} F(z) & \text{при } z \in \Omega_h^\alpha, \\ 0 & \text{при } z \in \mathbb{C} \setminus (\Omega_h^\alpha), \end{cases}$$

Аппроксимирующую мероморфную функцию G можно определить для $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ формулой

$$(37) \quad G(z) = F_0(z) - I(z)\omega(z).$$

Полюсы G лежат на мнимой оси, так же как полюсы ω . Убедимся, что G действительно является мероморфной на $\mathbb{C}$ с теми же полюсами. Из (36), (37) и формулы Коши для F/ω для $z \in D_r \setminus \Gamma_r$, $r \geq h$ получим

$$\frac{G(z)}{\omega(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{1 - Q(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_r} \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{Q(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{F(\zeta)}{\omega(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

где $L_r = \Omega_h^\alpha \cap \partial D_r$. Можно видеть, что последние два интеграла справа допускают голоморфное продолжение на D_r , а первый интеграл – мероморфное продолжение с полюсами на $(\zeta') \subset D_r$, так как $Q(\zeta, \zeta) \equiv 1$ для $\zeta \in \Gamma$.

Для доказательства (29) оценим $I(z)\omega(z)$ на S_h . Из (36), (31), (32) и (35) следует, что

$$|I(z)|e^A \leq \frac{1}{c_3} \int_{\Gamma} (|\zeta| + |z|)^{-1} |\zeta|^{-1/2} |d\zeta|, \quad z \in S_h.$$

Последний интеграл ограничен интегралом

$$c_5 \int_{2h}^{\infty} (t + |z|)^{-1} t^{-1/2} dt \leq c_6 \left(1 + |z|^{1/2}\right)^{-1}.$$

Следовательно, из (31) получим, что

$$|I(z)\omega(z)| \leq c_7 e^{-A}, \quad z \in S_h.$$

Для (29) с $\varepsilon = 1$ возьмем $A = \log^+ c_7$.

Теперь оценим характеристику $T(r, G)$. Из (37) имеем

$$m(r, G) \leq \log^+ M(r, F) + m(r, I) + m(r, \omega) + 1.$$

Поскольку $N(r, G) \leq N(r, G/\omega) + N(r, \omega)$, то из (28) получим, что для $r \geq h$

$$(38) \quad T(r, G) < N(r, G/\omega) + m(r, I) + \log^+ M(r, F) + c_8 \log^2(r + 1).$$

Полюсы G/ω лежат на множестве (ζ') . Следовательно, учитывая (34), получим, что для $r \geq h$

$$\begin{aligned} N(r, G/\omega) &\leq \sum_{|\zeta'| \leq r} n' \log \frac{r}{|\zeta'|} \leq c_9 \sum_{q_k \leq r} n_k \log \frac{r}{q_k} \\ &\leq c_{10} \sum_{q_k \leq r} [1 + \log^+ M(q_k, F)] \log \frac{r}{q_k}. \end{aligned}$$

Отсюда получим для $r \geq h$

$$\begin{aligned} N(r, G/\omega) &\leq c_{11} \int_h^{qr} [1 + \log^+ M(t, F)] \log \frac{qr}{t} \frac{dt}{t} \\ (39) \quad &\leq c_{11} \int_h^{qr} \int_h^t \log^+ M(t, F) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{12} \log^2(r + h), \end{aligned}$$

поскольку

$$[1 + \log^+ M(q_k, F)] \log \frac{r}{q_k} \leq \frac{1}{\log q} \int_{q_k}^{qq_k} [1 + \log^+ M(t, F)] \log \frac{qr}{t} \frac{dt}{t}.$$

Оценим теперь $m(r, I)$ для $r = r_k = \mu\rho_k$, $k = 1, 2, \dots$. Разобьем интеграл $I(z)$ на сумму двух интегралов $I_k(z)$ и $J_k(z)$ соответственно по контурам $\Gamma \setminus \gamma_k$ и γ_k . Если $\zeta \in \Gamma \setminus \gamma_k$ и $|z| = r_k$, то $|\zeta - z| \geq (1 - \mu)|\zeta|$, и из (32) и (35) получим

$$(40) \quad |I_k(z)| < \frac{1}{1 - \mu} \int_{\Gamma} |\zeta|^{-3/2} |d\zeta| < e^{c_{13}}, \quad |z| = r_k.$$

Если $\zeta \in \gamma_k$ и $|z| = r_k$, то

$$|Q(\zeta, z)| = \left| \frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'} \right|^{n'} < 1,$$

и из (32) $|\omega(\zeta)| \geq 2h^2$. Поэтому, согласно (34) имеем

$$(41) \quad |J_k(r_k e^{i\varphi})| \leq \exp\{c_{14} + c_{14} \log^+ M(\rho_k, f)\} \alpha_k(\varphi),$$

где

$$\alpha_k(\varphi) = \int_{\gamma_k} |\zeta - r_k e^{i\varphi}|^{-1} |d\zeta|.$$

Полагая

$$c_{15} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \alpha_1(\varphi) d\varphi$$

и учитывая, что $\alpha_k(\varphi) \leq \alpha_1(\varphi)$, $k = 1, 2, \dots$, из (40) и (41) получим

$$m(r_k, I) \leq c_{13} + c_{14} [1 + \log^+ M(\rho_k, f)] + c_{15} + 1.$$

Отсюда и из (38), (39) и $r_1 > h$ получаем

$$T(r_k, G) < c_{13} \int_h^{qr_k} \int_h^t \log^+ M(\tau, F) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{16} \log^+ M(q_k, F) + c_{16} \log^2(r_k + h), \quad k = 1, 2, \dots$$

Имеем

$$\int_{q_k}^{qr_k} \log \frac{qr_k}{t} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \log^2(\mu q) = c_{17},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \log^+ M(q_k, F) &\leq \frac{1}{c_{17}} \int_{q_k}^{qr_k} \log^+ M(\tau, F) \log \frac{qr_k}{t} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{c_{17}} \int_{q_k}^{qr_k} \int_{q_k}^t \log^+ M(\tau, F) \frac{d\tau dt}{\tau t}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к оценке

$$(42) \quad T(r_k, G) < c_{18} \int_h^{qr_k} \int_h^t \log^+ M(\tau, F) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{16} \log^2(r_k + h), \quad k \geq 1.$$

Теперь пусть $r \geq h$. Тогда существует $k \geq 1$ такое, что $r \leq r_k < qr$, так как $r_k = q\sigma_k r_{k-1}$, где $\sigma_k \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ для $k = 2, 3, \dots$. Поскольку $T(r, G) \leq T(r_k, G)$, то из (42) получим

$$T(r, G) < c_{20} \int_h^{q^2 r} \int_h^t \log^+ M(\tau, F) \frac{d\tau dt}{\tau t} + c_{21} \log^2(r+h) \quad r \geq r_1.$$

Учитывая, что $q^2 \leq p$ и $r_1 > h$, получим (30).

Следствие 1. Из теоремы 1 и (29), (30) следует, что функцию $F \in A(\Omega_h^\alpha)$ порядка $\rho_F < +\infty$ можно равномерно приблизить на S_h мероморфными функциями G так, что $T(r, G) = O(r^{\rho_F})$ при $r \rightarrow +\infty$.

Следующая теорема является основным результатом этой работы. Для ее доказательства используем следующую лемму (см. [3], стр. 542).

Лемма 3. Для $q \in B$ и $\beta \in (0, \pi/2)$ существует мероморфная функция φ такая, что

$$(43) \quad q(|z|) < |\varphi(z)| < b_1 q(|z|), \quad z \in S_{3h} \cup \Delta_\beta \cup \Delta_\beta(\pi),$$

$$(44) \quad T(r, \varphi) < b_2 (1 + \log^+ q(r)) \log^2(r+1), \quad r \geq h,$$

где $b_1 = b_1(\beta, q, h) > 0$ и $b_2 = b_2(\beta, q, h) > 0$ – некоторые константы.

Теорема 2. Пусть $f \in A''(S_h)$, тогда для $q \in B$, $q \geq 1$, $\varepsilon > 0$ и $p > 1$ существует мероморфная функция g такая, что

$$(45) \quad |f(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{q(|z|)}, \quad z \in S_h,$$

$$(46) \quad T(r, \varepsilon^{-1}g) < k \int_h^{pr} \int_h^t \left[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} \right] \frac{d\tau dt}{\tau t} + k [1 + \log q(r)] \log^2(pr), \quad r \geq h,$$

где a_r ($r > 0$) определена из (5) с $\varphi \equiv 1$ и $k = k(p, q, h) > 0$ – константа.

Доказательство. Выберем $l = l(p) > 0$ так, чтобы $l < \min\{p, 2\}$, и положим $\alpha := 2 \arctan(l-1)$. Пусть φ – мероморфная функция, удовлетворяющая условиям леммы 3. Очевидно, можно выбрать $\beta = \beta(\alpha)$ так, чтобы $\Omega_h^\alpha \subset S_{3h} \cup \Delta_\beta \cup \Delta_\beta(\pi)$. Из леммы 1 следует, что для $f\varphi$ существует функция $F \in A(\Omega_h^\alpha)$, удовлетворяющая (3). Согласно (4) и (44) рост функции F для $\tau = lr + h$ оценивается следующим неравенством

$$(47) \quad \log^+ \frac{M_F(r)}{\varepsilon} < k_1 \left[1 + \frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M_f(\tau) q(\tau)}{\varepsilon} \right].$$

Применяя теорему 1 к F , из (3) и (29) получим

$$(48) \quad |f(z)\varphi(z) - G(z)| < \varepsilon, \quad z \in S_h,$$

и, согласно (4) и (2.21) рост функции G для $r \geq h$ будет оцениваться следующим образом

$$T(r, \varepsilon^{-1}G) < k_2 \int_h^{pr} \int_h^t \left[1 + \frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M_f(\tau) q(\tau)}{\varepsilon} \right] \frac{d\tau dt}{\tau t}.$$

Окончательно, для $r \geq h$ получим следующую оценку:

$$(49) \quad \begin{aligned} T(r, \varepsilon^{-1}G) &< k_3 \int_h^{pr} \int_h^t \left[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} q(\tau) + \log^+ \frac{M_f(\tau)}{\varepsilon} \right] \frac{d\tau dt}{\tau t} \\ &+ k_3 [1 + \log q(r)] \log^2(pr). \end{aligned}$$

Положим теперь $g = G/\varphi$. Из (29) и (43) следует, что полюсы g лежат на $\Delta_{\pi-\beta}(\pi/2) \cup \Delta_{\pi-\beta}(-\pi/2)$. Неравенство (45) следует из (48) с учетом (43). При этом, поскольку $|\varphi(0)| > q(0) \geq 1$, то получим

$$\begin{aligned} T(r, \varepsilon^{-1}g) &\leq T(r, \varepsilon^{-1}G) + T(r, 1/\varphi) = T(r, \varepsilon^{-1}G) + T(r, \varphi) - \log |\varphi(0)| \\ &< T(r, \varepsilon^{-1}G) + T(r, \varphi). \end{aligned}$$

Следовательно, ввиду (49) и (44) доказательство завершено.

Из теоремы 2 (с $q \equiv 1$) следует следующая теорема для *равномерного* приближения.

Теорема 3. Пусть $f \in A''(S_h)$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ и $p > 1$ существует мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси так, что

$$(50) \quad |f(z) - g(z)| < \varepsilon, \quad z \in S_h,$$

$$(51) \quad T(r, \varepsilon^{-1}g) < k \int_h^{pr} \int_h^t \left[\frac{a_\tau(f)}{\varepsilon} + \frac{\log^+ M(\tau, f)}{\varepsilon} \right] \frac{d\tau dt}{\tau t} + k \log^2(pr)$$

для $r \geq h$, где $k = k(p, h) > 0$ – константа.

2.2. Представление классов M^ρ . В работе [4] доказано, что если функция $f \in A''_b(S_h)$ равномерно непрерывна на ∂S_h , то ее можно приблизить

целыми функциями порядка 1, который нельзя уменьшить. Тем не менее, теорема 3 приводит к новым условиям на f , которые позволяют ее равномерную аппроксимацию на S_h мероморфными функциями порядка $\rho \in (0, 1)$.

Определение 1. Скажем, что мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси принадлежит классу M^ρ , если g ограничена на S_h и

$$T(r, g) = O(r^\rho) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Теорема 4. Пусть $\nu_0(r) = r^{\rho/2}$, ν выбрано на $\mathbb{R}$ так, чтобы $\nu(r) = -\nu(-r)$, определим

$$\mu(z) = \mu_0(x) + iy, \quad z = x + iy \in S_h,$$

где $\mu_0 = \nu^{-1}$ на $\mathbb{R}$. Если все функции $f \in A_b''(S_h)$, $(f \circ \mu)'$ и $(f \circ \mu)''$ ограничены на ∂S_h , то f допускает равномерное приближение на S_h функциями из класса M^ρ .

Доказательство. Из теоремы 3 имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует мероморфная функция g с полюсами на мнимой оси, удовлетворяющая (50) и (51). Из условия теоремы следует, что $|(f \circ \mu)'| \leq M$ и $|(f \circ \mu)''| \leq M$ на ∂S_h .

Учитывая, что $\mu'(r) = 1/\nu'(r)$, получим $|zf'_\partial(z)| \leq M|z|^\rho$. Из определения μ следует, что $|f'(z)\mu''(z)| \leq M_0$, отсюда получим $|z^2f''(z)| \leq M_1|z|^\rho$. Таким образом, из (51) для $\varphi \equiv 1$ получим $T(r, g) = O(r^\rho)$ при $r \rightarrow \infty$, что завершает доказательство.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность своему научному руководителю проф. Н. У. Аракеляну за постановку задачи и помощь при ее решении.

Abstract. The paper discusses the problem of approximation of functions continuous on a closed stripe $S_h = \{z : |\operatorname{Im}z| \leq h\}$ and holomorphic in its interior. The results relate to the uniform and tangential approximation of such functions f by meromorphic functions g with minimal growth in terms of Nevanlinna characteristic $T(r, g)$. The growth depends on the growth of f in S_h and certain differential properties of f on ∂S_h . It is assumed that the possible poles of g are restricted to the imaginary axis.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. А. Тер-Исраелян, "Равномерные и касательные приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста," Изв. НАН Армении, Математика **6** (1), 67-80 (1971).

- [2] Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, “Наилучшие приближения мероморфными функциями в угловых областях,” Изв. НАН Армении, Математика **23** (6), 546-556 (1988).
- [3] Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, “Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси,” Изв. НАН Армении, Математика **25** (6), 534-548 (1990).
- [4] N. Arakelian and H. Shahgholian, “Uniform and Tangential Approximation on a Stripe by Entire Functions, Having Optimal Growth,” Computational Methods and Function Theory **3** (1), 359-381 (2003).

Поступила 30 октября 2008