

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НА ПОЛУОСИ

Э. А. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: *emilya.kh@gmail.com*

Аннотация. В работе рассматривается следующее интегро-дифференциальное уравнение на полуоси:

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} + q f(t, x) = \int_0^\infty k(x - x') f(t, x') dx',$$

где $0 \leq k(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $q = \text{const}$, а $f(t, x)$ – искомая функция. Уравнение имеет важное применение в различных областях естествознания, в частности, в эконометрике (см. [1]), где искомая функция играет роль плотности функции распределения национального дохода в стране, q характеризует средние сбережения, и т.д., $k(x)$ – функция перераспределения доходов. Доказывается структуральная теорема существования решения данного уравнения. Найдена асимптотика полученного решения в бесконечности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается следующее интегро-дифференциальное уравнение на полуоси:

$$(1.1) \quad \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} + q f(t, x) = \int_0^\infty k(x - x') f(t, x') dx',$$

где $0 \leq k(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $q = \text{const} > 0$, $f(t, x)$ искомая функция. Уравнение имеет важное применение в различных областях естествознания, и в частности, в эконометрике (см. [1]). В эконометрике $f(t, x)$ играет роль плотности функции распределения национального дохода в стране, q характеризует средние сбережения, рост капиталов и банкротство предприятий страны, $k(x)$ – функция перераспределения доходов, обусловленных различными экономическими эффектами: создание новых и исчезновение старых предприятий, капитальные трансферты и др.

Настоящая работа посвящена исследованию и решению уравнения (1.1). Удаётся доказать структуральную теорему существования решения для уравнения (1.1), а также найти асимптотику полученного решения в бесконечности.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Обозначим через W_p^n пространство Соболева

$$W_p^n = \left\{ f(x) : f^{(\alpha)}(x) \in L_p(0, +\infty), \alpha = 1, 2, \dots, n \right\},$$

Обозначим через G класс медленно растущих функций:

$$G = \left\{ f(x) : f(x) \in AC_{loc}(0, +\infty), \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\epsilon x} f(x) = 0, \forall \epsilon > 0 \right\},$$

где $AC_{loc}(0, +\infty)$ – пространство абсолютно непрерывных функций на каждом компакте из R^+ .

Пусть E^+ – одно из следующих банаховых пространств $L_p(0, +\infty)$ ($p \geq 1$), $L_\infty(0, +\infty)$ или $L_1 \equiv L_1(-\infty, +\infty)$. Обозначим через Ω класс интегральных операторов Винера–Хопфа:

$$(2.1) \quad (Kf)(x) = \int_0^\infty k(x-t)f(t)dt, \quad k \in L_1.$$

Оператор K действует в пространстве E^+ , причем справедлива следующая оценка (см. [2]):

$$\|K\|_{E^+} \leq \int_{-\infty}^\infty |k(x)|dx.$$

Будем говорить, что ядро k удовлетворяет условию консервативности, если

$$(2.2) \quad 0 \leq k \in L_1 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^\infty k(x)dx = 1.$$

Введем алгебры $\Omega^\pm \subset \Omega$ верхних и нижних Вольтерровых операторов : $V_\pm \in \Omega^\pm$, если

$$(2.3) \quad (V_+f)(x) = \int_0^x v_+(x-t)f(t)dt, \quad (V_-f)(x) = \int_x^\infty v_-(t-x)f(t)dt,$$

где $v_\pm \in L_1(0, +\infty)$. Нетрудно убедиться, что $\Omega^+ \oplus \Omega^- = \Omega$. Известно (см. [3]), что если $K \in \Omega$ и $V_\pm \in \Omega^\pm$, то

$$(2.4) \quad V_-K \in \Omega \quad \text{и} \quad KV_+ \in \Omega.$$

3. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ОСНОВНОМУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ. РАЗРЕШИМОСТЬ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

3.1. Сведение к интегральному уравнению Винера–Хопфа. Основной целью настоящей работы является построение эконометрического решения уравнения (1.1). С этой целью для уравнения (1.1) применим метод разделения переменных

$$(3.1) \quad f(t, x) = u(t)v(x),$$

где $u(t) \in AC_{loc}(0, +\infty)$ и $v(x) \in G$.

Нетрудно убедиться, что $u(t) = c_0 e^{\lambda t}$, а $v(x)$ удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$(3.2) \quad \frac{dv}{dx} + rv = \int_0^\infty k(x - x')v(x')dx',$$

где $\lambda = \text{const} \geq 0$ и

$$(3.3) \quad r = q + \lambda.$$

Отметим, что уравнение вида

$$-\frac{d\tilde{v}}{dx} + r\tilde{v} = \int_0^\infty k(x - x')\lambda(x')\tilde{v}(x')dx', \quad 0 \leq \lambda(x') \leq 1,$$

изучалось в работе [4]. Введем обозначение

$$(3.4) \quad \frac{dv}{dx} + (r + 1)v = s(x).$$

Тогда используя соотношения (2.4), из (3.2) мы приходим к следующему неоднородному интегральному уравнению относительно искомой функции $s(x)$:

$$(3.5) \quad s(x) = \rho(x) + \int_0^\infty w(x - t)s(t)dt,$$

где

$$(3.6) \quad \rho(x) = ce^{-\alpha x} + c \int_0^\infty k(x - t)e^{-\alpha t}dt, \quad \alpha = r + 1$$

и

$$(3.7) \quad w(x) = e^{-\alpha x}\theta(x) + \int_0^\infty k(x - t)e^{-\alpha t}dt.$$

По теореме Фубини нетрудно убедиться, что $w \in L_1(-\infty, +\infty)$ и $\rho \in L_1(0, +\infty)$.

Убедимся теперь, что если $k \in W_p^{n-1}(-\infty, +\infty)$, то $w \in W_p^n(-\infty, +\infty)$. Так как $e^{-\alpha x}\theta(x) \in W_p^n$ почти всюду в $(-\infty, +\infty)$, то нам остается доказать, что

$$(3.8) \quad \tilde{w}(x) = \int_0^{+\infty} k(x-t)e^{-\alpha t} dt \in W_p^n(-\infty, +\infty).$$

Предположим, что $k \in W_p^{n-1}(-\infty, +\infty)$, где $p \geq 1$ и $p, n \in N$. Тогда при всяком $\alpha > 0$ функция $\tilde{w}(x) \in W_p^n(-\infty, +\infty)$. Заметим, что справедлива следующая формула

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \tilde{w}^{(m)}(x) = & k^{(m-1)}(x) - \alpha k^{(m-2)}(x) + \alpha^2 k^{(m-3)}(x) + \dots \\ & + (-\alpha)^{m-1} k(x) + (-\alpha)^m \tilde{w}(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

где $k^{(j)}(x)$ — j -ая производная функции $k(x)$. Так как $k \in W_p^{n-1}(-\infty, +\infty)$, то достаточно показать, что $\tilde{w}(x) \in L_p(-\infty, +\infty)$. Пусть δ_1, δ_2 — произвольные числа.

Рассмотрим следующий интеграл

$$(3.10) \quad I = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(\int_0^{+\infty} k(x-t)e^{-\alpha t} dt \right)^p dx$$

и оценим его с помощью неравенства Гельдера:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(\int_0^{+\infty} k(x-t)e^{-\alpha t} dt \right)^p dx = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(\int_0^{+\infty} e^{\frac{-\alpha t}{p}} k(x-t) e^{\frac{-\alpha t}{q}} dt \right)^p dx \\ &\leq \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} k^p(x-t) dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \\ &= \frac{1}{\alpha^{p/q}} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} k^p(x-t) dt dx, \end{aligned}$$

где $p, q \in N$, $p, q > 1$ и $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Изменяя порядок интегрирования в последнем интеграле, получим

$$I \leq \frac{1}{\alpha^{p/q+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} k^p(\tau) d\tau < +\infty.$$

Пусть теперь $p = 1$, тогда, используя теорему Фубини, можно доказать, что

$$\tilde{w}^{(k)} \in L_p(-\infty, +\infty), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

следовательно, $\tilde{w} \in W_p^n(-\infty, +\infty)$. Доказательство включения

$\tilde{w} \in W_p^n(-\infty, +\infty)$ в случае $k \in W_p^{n-1}(-\infty, +\infty)$ проверяется аналогично.

3.2. Решение уравнения (3.2) в случае $\|K\|_{L_1} = \mu < r$. Ниже будет доказана разрешимость уравнения (3.2) в пространстве $W_1^1(0, +\infty)$ в случае $\mu < r$.

Теорема 1. Пусть $0 \leq k \in L_1(-\infty, +\infty)$, $\mu = \|K\|_{L_1}$, $q \geq 0$. Тогда если $\mu < r$, то уравнение (3.2) в пространстве $W_1^1(0, +\infty)$ имеет нетривиальное решение вида

$$(3.11) \quad v_\lambda(x) = \int_0^x e^{-(r+1)(x-t)} s(t) dt + ce^{-(r+1)x},$$

где $s(x) \in L_1(0, +\infty)$, $r = q + \lambda$, причем $s(x) = s_+(x) - s_-(x)$, а $s_\pm(x)$ — неотрицательные, суммируемые функции на $(0, \infty)$, удовлетворяющие следующим двойным неравенствам

$$\int_0^\infty \rho^\pm(x) dx \leq \int_0^\infty s_\pm(x) dx \leq \frac{r+1}{r-\mu} \int_0^\infty \rho^\pm(x) dx.$$

Доказательство. Введем следующие функции

$$(3.12) \quad \rho^+(x) = \begin{cases} \rho & \text{при } \rho \geq 0 \\ 0 & \text{при } \rho < 0 \end{cases}$$

$$(3.13) \quad \rho^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \geq 0 \\ -\rho & \text{при } \rho < 0 \end{cases}$$

Очевидно, что $\rho = \rho^+ - \rho^-$ и поскольку $\rho \in L_1(0, +\infty)$, то из (3.12) и (3.13) следует, что $0 \leq \rho^\pm \in L_1(0, +\infty)$. Наряду с уравнением (3.5) рассмотрим следующие уравнения

$$(3.14) \quad s_\pm(x) = \rho^\pm(x) + \int_0^\infty s_\pm(t) w(x-t) dt,$$

где $s_\pm(x)$ — искомые функции. Сперва займемся изучением уравнения

$$(3.15) \quad s_+(x) = \rho^+(x) + \int_0^\infty s_+(t) w(x-t) dt.$$

Рассмотрим следующие итерации:

$$(3.16) \quad \begin{cases} s_+^{(n+1)}(x) = \rho^+(x) + \int_0^\infty s_+^{(n)}(t) w(x-t) dt, & n = 0, 1, 2, \dots \\ s_+^{(0)} = \rho^+(x), \end{cases}$$

по индукции можно убедиться в справедливости следующих фактов:

- а) $s_+^{(n)}(x) \geq \rho^+(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$,
- б) $s_+^{(n)}(x)$ строго возрастает по n , т.е. $s_+^{(n+1)}(x) \geq s_+^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$,
- в) $s_+^{(n)}(x) \in L_1(0, +\infty)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Утверждения а) и б) легко проверяются по индукции. Докажем утверждение в).

При $n = 0$ справедливость в) очевидна. Пусть $s_+^{(n)}(x) \in L_1(0, +\infty)$. Убедимся,

что $s_+^{(n+1)}(x) \in L_1(0, +\infty)$. Проинтегрируем обе части соотношения (3.16) от 0 до произвольного δ . Поскольку $0 \leq \rho^+ \in L_1(0, +\infty)$, то будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^\delta s_+^{(n+1)}(x) dx &\leq \int_0^\infty \rho^+(x) dx + \int_0^\delta \int_0^\infty w(x-t) s_+^{(n)}(t) dt dx \\ &= \int_0^\infty \rho^+(x) dx + \int_0^\infty \left(\int_0^\delta w(x-t) dx \right) s_+^{(n)}(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty \rho^+(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx \int_0^\infty s_+^{(n)}(t) dt, \end{aligned}$$

где $\delta \rightarrow +\infty$, откуда получим

$$\int_0^\infty s_+^{(n+1)}(x) dx < +\infty,$$

т.е. $s_+^{(n+1)}(x) \in L_1(0, +\infty)$. Таким образом, с учетом а), б), в) из (3.16) получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho^+(x) dx &\leq \int_0^\infty s_+^{(n+1)}(x) dx \\ &\leq \int_0^\infty \rho^+(x) dx + \int_0^\infty s_+^{(n+1)}(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx \\ &= \int_0^\infty \rho^+(x) dx + \frac{\mu+1}{r+1} \int_0^\infty s_+^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Так как $\mu < r$, то из последнего следует:

$$(3.17) \quad \int_0^\infty \rho^+(x) dx \leq \int_0^\infty s_+^{(n+1)}(x) dx \leq \frac{r+1}{r-\mu} \int_0^\infty \rho^+(x) dx.$$

Следовательно, по теореме Б. Леви (см. [5]) заключаем, что последовательность функций $\{s_+^{(n)}(x)\}_0^\infty$ почти всюду на $(0, +\infty)$ сходится к суммируемой функции $s_+(x) \in L_1(0, +\infty)$.

Докажем теперь, что предельная функция $s_+(x)$ удовлетворяет уравнению (3.5). Из (3.16) и пункта б) следует простейшее неравенство

$$s_+^{(n+1)}(x) \leq \rho^+(x) + \int_0^\infty w(x-t) s_+(t) dt \in L_1(0, +\infty).$$

Следовательно, по теореме Лебега (см., например, [5])

$$(3.18) \quad s_+(x) \leq \rho^+(x) + \int_0^\infty w(x-t) s_+(t) dt.$$

Но, с другой стороны, из б) и (3.16) следует также неравенство

$$(3.19) \quad \int_0^\infty w(x-t) s_+^{(n)}(t) dt \leq s_+(x) - \rho^+(x) \in L_1(0, +\infty).$$

Поскольку $0 \leq w(x)$, $s_+^{(n)}(x)$ и $s_+^{(n)}(x)$ строго возрастают по n , то функция $w(x)s_+^{(n)}(x)$ также строго возрастает по n . Откуда, с учетом (3.19), по теореме Леви (см. [5]) можно совершить предельный переход под знаком интеграла, т.е.

$$\int_0^\infty w(x-t)s_+^{(n)}(t)dt \rightarrow \int_0^\infty w(x-t)s_+(t)dt, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, из (3.19) имеем

$$(3.20) \quad \int_0^\infty w(x-t)s_+(t)dt \leq s_+(x) - \rho(x).$$

Комбинируя неравенства (3.18) и (3.20) заключаем, что функция $s_+(x)$ удовлетворяет уравнению (3.5). Так как $k \in L_1(-\infty, +\infty)$, то из результатов пункта 2.1 следует, что решение уравнения (3.5) принадлежит пространству $W_1^1(0, +\infty)$.

Аналогичным образом доказывается существование решения уравнения (3.14) относительно искомой функции $s_-(x)$, причем $0 \leq s_-(x) \in W_1^1(0, +\infty)$.

Из линейности уравнения (3.14) и формулы $\rho = \rho^+ - \rho^-$ следует, что решение уравнения (3.5) задается формулой

$$s_\lambda(x) \equiv s(x) = s_+(x) - s_-(x),$$

где $0 \leq s_\pm \in W_1^1(0, +\infty)$ и удовлетворяют неравенствам:

$$\int_0^\infty \rho^\pm(x)dx \leq \int_0^\infty s_\pm(x)dx \leq \frac{r+1}{r-\mu} \int_0^\infty \rho^\pm(x)dx.$$

Перейдем теперь к решению уравнения (3.2). Прямой проверкой можно убедиться, что общее решение уравнения записывается в виде

$$v_\lambda(x) = \int_0^x e^{-\alpha(\lambda)(x-t)} s_\lambda(t)dt + c(\lambda)e^{-\alpha x}.$$

Так как $s \in W_1^1(0, +\infty)$, то $v_\lambda \in W_1^1(0, +\infty)$.

3.3. Решение уравнения (3.2) в случае $\|k\|_{L_1} = \mu = r$.

Теорема 2. Пусть $0 \leq k \in L_1(-\infty, +\infty)$, $q \geq 0$ и $\mu = r$. Тогда уравнение (3.2) в классе G имеет нетривиальное решение следующей структуры

$$(3.21) \quad v_\lambda(x) = \int_0^x e^{-(r+1)(x-t)} s_\lambda(t)dt + c(\lambda)e^{-(r+1)x},$$

где $s_\lambda(x)$ из класса $L_1^{loc}(0, +\infty)$ и

$$\int_0^x s(t)dt = o(x^2) \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty.$$

Если дополнительно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|k(t)dt < +\infty \quad \text{и} \quad \nu(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} tk(t)dt < -1,$$

то $s_\lambda(x) \in L_1(0, +\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$(3.22) \quad s(x) = \rho(x) + \int_0^\infty s(t)w(x-t)dt.$$

Следуя доказательству предыдущей теоремы и не умаляя общности, можно считать, что функция ρ неотрицательна. Так как $\mu = p$, то из (3.7) следует, что

$$(3.23) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)dx = \frac{\mu + 1}{q + \lambda + 1} = 1.$$

В работе [6] доказано, что если $0 \leq \rho \in L_1^+$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)dx = 1$, то уравнение (3.5) в пространстве $L_1^{loc}(0, +\infty)$ имеет неотрицательное решение с асимптотикой

$$\int_0^x s(t)dt = o(x^2) \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty.$$

В той же работе доказано, что если

$$m_1(\rho) \equiv \int_0^{+\infty} x\rho(x)dx < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|w(x)dx < +\infty$$

и $\nu(w) < 0$, то $s \in L_1(0, +\infty)$. Ниже докажем, что если $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|k(t)dt < +\infty$, то

$$m_1(\rho) < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|w(x) < +\infty \quad \text{и} \quad \nu(w) = \frac{\nu(k) + 1}{\alpha}.$$

Оценим следующий интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^\delta x\rho dx &= c \int_0^\delta xe^{-\alpha x}dx + c \int_0^\delta \int_0^{+\infty} k(x-t)e^{-\alpha t}dtdx \\ &\leq c \int_0^\infty xe^{-\alpha x}dx + c \int_0^\infty x \int_0^{+\infty} k(x-t)e^{-\alpha t}dtdx \\ &= \frac{c}{\alpha^2} + c \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_0^{+\infty} xk(x-t)dxdt \\ &= \frac{c}{\alpha^2} + \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_{-t}^{+\infty} (y+t)k(y)dydt \\ &\leq \frac{c}{\alpha^2} + \int_0^\infty e^{-\alpha t}tdt \int_{-\infty}^{+\infty} k(y)dy + \int_0^\infty e^{-\alpha t}dt \int_{-t}^{+\infty} |y|k(y)dy \\ &= \frac{c}{\alpha^2} + \frac{\mu}{\alpha^2} + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \int_0^{+\infty} |y|k(y)dy \\ &= \frac{c}{\alpha^2} + \frac{\mu}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} |y|k(y)dy < +\infty. \end{aligned}$$

Устремляя $\delta \rightarrow +\infty$, получим $m_1(\rho) < +\infty$. Далее,

$$\begin{aligned}
 \int_{\delta_1}^{\delta_2} |x|w(x)dx &= \int_{\delta_1}^{\delta_2} |x|e^{-\alpha x}\theta(x)dx + \int_{\delta_1}^{\delta_2} |x| \int_0^{+\infty} k(x-t)e^{-\alpha t}dtdx \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-\alpha x}\theta(x)dx + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \int_{\delta_1}^{\delta_2} |x|k(x-t)dxdt \\
 &= \int_0^{\infty} xe^{-\alpha x}dx + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \int_{\delta_1-t}^{\delta_2-t} |y+t|k(y)dydt \\
 &\leq \frac{1}{\alpha^2} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}|t| \int_{-\infty}^{+\infty} k(y)dydt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{+\infty} |y|k(y)dy \\
 &= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\mu}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} |y|k(y)dy = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} |y|k(y)dy < +\infty,
 \end{aligned}$$

где при $\delta_1 \rightarrow -\infty$, $\delta_2 \rightarrow +\infty$ получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|w(x)dx < +\infty.$$

Легко проверить, что если $\nu(k) < -1$, то $s \in L_1(0, +\infty)$. Следовательно, решая уравнение (3.4), приходим к завершению доказательства.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя, сформулируем некоторые выводы.

Уравнение (1.1) обладает семейством нетривиальных решений вида

$$f_\lambda(x, t) = e^{\lambda t} \left(\int_0^x e^{-\alpha(\lambda)(x-t)} s_\lambda(t) dt + c(\lambda) e^{-\alpha(\lambda)x} \right), \quad \alpha(\lambda) = q + \lambda + 1,$$

причем,

- а) если $\mu < q$ и $0 \leq k \in L_1$, то $s_\lambda(x) \in L_1(0, +\infty)$ при $\lambda \geq 0$,
- б) если $\mu = q$ и $0 \leq k \in L_1$, то
 - i) из неравенства $\lambda > 0$ следует $s_\lambda(x) \in L_1(0, +\infty)$,
 - ii) из равенства $\lambda = 0$ следует $s_\lambda(x) \in L_1^{loc}(0, +\infty)$ и имеет асимптотику $\int_0^x s(t)dt = o(x^2)$, $x \rightarrow +\infty$,
 - iii) из условий $\lambda = 0$, $\nu(k) < -1$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|k(t)dt < +\infty$ следует $s_\lambda(x) \in L_1(0, +\infty)$.

Отметим, что с эконометрической точки зрения случаи $\mu = q$ и $\lambda = 0$ или $\mu > q$ невозможны, так как при этом $f_\lambda(x, t)$ перестает быть функцией распределения.

В конце работы автор выражает искреннюю признательность Х. А. Хачатрян за постановку задачи и обсуждения, а также рецензенту за полезные замечания.

Abstract. The paper considers the following integro-differential equation on the semi-axis:

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} + q f(t, x) = \int_0^\infty k(x - x') f(t, x') dx',$$

where $0 \leq k(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, $q = \text{const}$ and $f(t, x)$ is the unknown function. This equation has significant applications in different fields of natural sciences, particularly in econometrics (see [1]), where the unknown function is considered as the density of the national income distribution function, q characterizes the mean savings etc., $k(x)$ is the function of income rearrangement. A structural theorem of the solution is proved, whose asymptotic at infinity is found.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. D. Sargan, "The Distribution of Wealth," *Econometrica* **25** (4), 568-590 (1957).
- [2] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами", *Мат. сб.* **97** (1), 35-58 (1975).
- [3] Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Некоторые задачи факторизации для интегральных операторов типа свертки", *Диф. уравнения*, **26** (8), 1442-1452 (1990).
- [4] Х. А. Хачатрян, Э. А. Хачатрян, "Об одном интегро-дифференциальном уравнении с почти разностным ядром на полуоси", *Диф. уравнения*, **44** (7), 908-917 (2008).
- [5] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, Москва, 1981).
- [6] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения" *Итого науки и техники, Мат. анализ* **22**, 175 - 243 (1984).

Поступила 2 апреля 2008