Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 5, 2008, стр. 57-72

НЕКОТОРЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВЕКТОРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Х. А. ХАЧАТРЯН

Институт математики, НАН Армении
E-mail: *Khach_82@rambler.ru*

Аннотация. В работе рассматривается следующий класс векторных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки

$$-\frac{d^2 f_i}{dx^2} + a_i f_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^\infty K_{ij}(x-t) f_j(t)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

относительно искомой функции $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_N)^T$, где a_i – заданные неотрицательные числа, $\vec{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_N)^T \in L_1^{\times N}(0, +\infty) \equiv L_1(0, +\infty) \times \ldots \times L(0, +\infty)$ – свободный член уравнения с неотрицательными компонентами, $0 \le K_{ij} \in L_1(-\infty, +\infty)$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$ – ядерные функции. Эти уравнения, кроме самостоятельного математического интереса, имеют важное прикладное значение в теории нелокального взаимодействия волн. Используя специальные факторизационные методы, доказывается разрешимость этой системы в разных естественных функциональных пространствах.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$-\frac{d^2 f_i}{dx^2} + a_i f_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^\infty K_{ij}(x-t) f_j(t)\, dt, \quad x \in (0, +\infty), \tag{1.1}$$

$(i, j = 1, 2, \ldots, N)$, где $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_N)^T$ (T – знак транспонирования) – искомая функция из следующего подкласса медлено растущих функций

$$\mathcal{P} = \left\{ f = (f_1, f_2, \ldots, f_N)^T : \frac{df_i}{dx} \in AC_{loc}(0, +\infty), \right.$$
$$\left. \lim_{x \to +\infty} e^{-\varepsilon x} f_i(x) = 0 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0, \quad i = \overline{1, N} \right\},$$

$AC_{loc}(0,+\infty)$ – пространство абсолютно непрерывных на каждом компакте из $(0,+\infty)$ функций. В уравнении (1.1) a_i – заданные числа,

$$\vec{g}=(g_1,g_2,\ldots,g_N)^T\in L_1^{\times N}(0,+\infty),\quad \text{т.е.}\quad 0\le g_i\in L_1(0,+\infty) \tag{1.2}$$

$(i=1,2,\ldots,N)$ – свободный член, а

$$K(x)=(K_{ij}(x))_{i,j=1}^N,\quad 0\le K_{ij}\in L_1(-\infty,+\infty),\quad i,j=1,2,\ldots,N, \tag{1.3}$$

– ядерная матриц-функция. Искомое решение задачи (1.1)-(1.3) удовлетворяет следующему начальному условию

$$\vec{f}(0)=(y_1,y_2,\ldots,y_N)^T,\quad y_i\in[0,+\infty),\quad i=1,2,\ldots,N. \tag{1.4}$$

Задача (1.1)-(1.4) возникает в теории нелокального взаимодействия волн (см. [1]-[2]). Кроме того, уравнение (1.1) имеет важные применения в механике сплошных сред, в теории бифуркации рождения цикла (см. [3, 4]). Соответствующее скалярное уравнение (1.1) в том случае, когда ядро $K(x)$ из себя представляет вполне монотонную функцию, сравнительно недавно достаточно подробно было изучено в работе [5]. Подобные вопросы для уравнения первого порядка изучались в [6, 7].

В настоящей работе мы будем заниматься изучением задачи (1.1)-(1.4), в основе которой лежит факторизация исходного матричного интегро-дифференциального оператора: в виде произведения двух матричных дифференциальных операторов и одного интегрального оператора Винера–Хопфа. Построенная факторизация позволяет свести решение системы к решению матричного интегрального уравнения Винера–Хопфа. Используя некоторые факты из теории интегральных уравнений Винера–Хопфа, а также результаты классической теории функции, удается доказать несколько структуральных теорем существования.

2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. **Класс матричных интегральных операторов Винера–Хопфа.** Пусть E – одно из следующих банаховых пространств:

(i) $L_p(0,+\infty)$, $1\le p<+\infty$,

(ii) $M(0,+\infty)=L_\infty(0,+\infty)$,

(iii) $C_M(0,+\infty)\subset M(0,+\infty)$ – банахово пространство непрерывных и ограниченных функций в $(0,+\infty)$ с нормой $\|f\|=\operatorname{supess}|f(x)|$.

Обозначим через $W_p^n(0,+\infty)$ пространство Соболева, состоящее из функций f таких, что $f^{(k)} \in L_p(0,+\infty)$ $(k = 0,1,2,\ldots,n)$. Пусть R^N $(N \geq 1)$ – пространство вещественных, N-мерных вектор-столбцов, а $R^{N\times N}$ – алгебра вещественных, $N \times N$-мерных матриц с единицей I.

Введем конусы $K' \subset R^N$ и $\tilde{K} \subset R^{N\times N}$, состоящие из векторов или матриц с неотрицательными коэффициентами. Конусы K' и $\tilde{K}$ вводят частный порядок в своих пространствах. В раасматриваемых нами случаях K' и $\tilde{K}$ являются правильными конусами (см.[6]), т.е. если A_n строго возрастает по n по конусам K' или $\tilde{K}$ и $A \succeq A_n$, то существует $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Мы пишем $A \succeq 0$, если все компоненты A – неотрицательны, и $A \succ 0$, если все компоненты положительны. Обозначим через Ω класс матричных интегральных операторов Винера–Хопфа: $\mathbf{K} \in \Omega$, если

$$(\mathbf{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)\, f(t)\, dt \tag{2.1}$$

где

$$K(x) = (K_{ij}(x))_{i,j=1}^{N\times N}, \quad K_{ij} \in L_1(-\infty,+\infty), \quad i,j = 1,2,\ldots,N,$$

$$f \in E^{\times N} = E \times \ldots \times E, \quad \|f\|_{E^{\times N}} = \sum_{i=1}^N \|f_i\|_E.$$

Как известно, интегральные операторы из Ω не являются вполне непрерывными (см. [8]). Известно также, что если $\mathbf{K}$ – матричный интегральный оператор Винера–Хопфа, то его норма в каждом из пространств $E^{\times N}$ оценивается сверху следующим образом (см. [10, 11])

$$\|\mathbf{K}\|_{E^N} \leq \max_{1\leq j\leq N} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^\infty |K_{ij}(x)|\, dx. \tag{2.2}$$

Введем следующие подалгебры $\Omega^\pm \subset \Omega$ и $U_\pm \in \Omega^\pm$, если:

$$\begin{aligned} (U_+ f)(x) &= \int_0^x u_+(x-t)\, f(t)\, dt, \\ (U_- f)(x) &= \int_0^x u_-(t-x)\, f(t)\, dt, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$f \in E^{\times N}, \quad u_\pm = \left(u_\pm^{i,j}(x)\right)_{i,j=1}^{N\times N}, \quad u_\pm^{i,j} \in L_1(0,+\infty) \quad (i,j = 1,2,\ldots,N).$$

Известно, что если $U_\pm \in \Omega^\pm$ и $\mathbf{K} \in \Omega$, то имеют место следующие включения (см. [9])

$$\text{i)}\ \ U_-\mathbf{K} \in \Omega, \quad \text{ii)}\ \ \mathbf{K}U_+ \in \Omega, \quad \text{iii)}\ \ U_-U_+ \in \Omega. \tag{2.4}$$

Эти включения мы неоднократно будем использовать в последующих параграфах.

2.2. **Факторизация консервативного оператора.** Ядро

$$K(x) = (K_{ij}(x))_{i,j=1}^{N\times N}$$

матричного интегрального оператора $\mathbf{K} \in \Omega$ называется консервативным, если

$$\begin{gathered} 0 \le K_{ij}(x) \in L_1(-\infty,+\infty) \quad (i,j = 1,2,\dots,N), \\ r(C) = 1 \quad \text{при} \quad C = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $r(C)$ – спектральный радиус матрицы C.

Обозначим через $Q = L_1^{N\times N}(-\infty,+\infty)$ и $Q^+ = L_1^{N\times N}(0,+\infty)$ пространство $N\times N$ матриц-функций с компонентами из $L_1(-\infty,+\infty)$ и $L_1(0,+\infty)$ соответственно. Нетрудно убедиться, что Q является алгеброй, в которой умножение определяется с помощью свертки:

$$(W_1 * W_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x-t)\,W_2(t)\,dt, \quad W_1, W_2 \in Q. \tag{2.6}$$

Конус $K' \subset Q$ матриц-функций с неотрицательными компонентами вполне правильный, т.е. монотонная по конусу и ограниченная по норме последовательность из Q сходится (см. [9]).

Предположим, что K – консервативное ядро оператора $\mathbf{K} \in \Omega$. Рассмотрим следующую задачу факторизации: *для заданного оператора* $\mathbf{K} \in \Omega$, *найти такие вольтерровские операторы* $U_\pm \in \Omega^\pm$ *чтобы имело место равенство*

$$J - \mathbf{K} = (J - U_-)(J - U_+). \tag{2.7}$$

Факторизация (2.7) понимается как равенство операторов, действующих в $E^{\times N}$. Легко проверить, что разложение (2.7) эквивалентно следующей системе нелинейных уравнений Н. Б. Енгибаряна (см. [10, 11]):

$$\begin{cases} u_+(x) = K(x) + \displaystyle\int_0^{\infty} u_-(t)\,u_+(x+t)\,dt, \\ u_-(x) = K(-x) + \displaystyle\int_0^{\infty} u_-(x+t)\,u_+(t)\,dt, \quad x \in (0,+\infty). \end{cases} \tag{2.8}$$

В консервативном случае (2.5) существует каноническое решение системы (2.8), представляющее собой предел в $Q^+ \times Q^+$ следующего итерационного процесса

(см. [10]):

$$\begin{cases} u_+^{(n+1)}(x) = K(x) + \int_0^\infty u_-^{(n)}(t)\, u_+^{(n)}(x+t)\, dt, \\ u_-^{(n+1)}(x) = K(-x) + \int_0^\infty u_-^{(n)}(x+t)\, u_+^{(n)}(t)\, dt, \quad u_\pm^{(0)} = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

причем предел (u_+, u_-) обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned} & u_\pm(x) \succeq 0, \quad x \in (0, +\infty) \\ & \gamma_\pm = r\left(\int_0^\infty u_\pm(x)\, dx\right) \le 1, \\ & (1-\gamma_-)(1-\gamma_+) = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

В вопросах дополнительных свойств решения нелинейной консервативной системы (2.8) важную роль играет первый момент ядра K:

$$\nu \equiv \nu(K) = \int_{-\infty}^\infty xK(x)\, dx, \tag{2.11}$$

где предполагается, что интеграл (2.11) абсолютно сходится. В дальнейшем нам понадобится следующая теорема (см. [10, 11, 13]).

Теорема E *Если интеграл* (2.11) *абсолютно сходится, то для консервативной системы* (2.8) *справедливы следующие факты:*

$$\begin{aligned} & a) \quad \nu \succ 0 \Longleftrightarrow \gamma_+ = 1, \quad \gamma_- < 1, \\ & b) \quad \nu = 0 \Longleftrightarrow \gamma_\pm = 1, \\ & c) \quad \nu \prec 0 \Longleftrightarrow \gamma_+ < 1, \quad \gamma_- = 1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.3. **Две вспомогательные леммы гладкости.** В последующих параграфах нами будут использоваться следующие факты:

Лемма 1. a) *Предположим, что* $f \in W_p^{n-1}(0, +\infty)$ $(p, n \in N,\ p \ge 1)$ – *вещественная функция. Тогда при всяком* $\alpha > 0$ *функция*

$$F(x) = \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} f(t)\, dt, \quad x \in (0, +\infty), \tag{2.13}$$

обладает следующим свойством гладкости: $F \in W_p^n(0, +\infty)$.

b) *Если* $\varphi \in W_p^{n-1}(-\infty, +\infty)$ $(p, n \in N,\ p \ge 1)$, *то при всяком* $\alpha > 0$

$$\psi(x) = \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} \varphi(t)\, dt \in W_p^n(-\infty, +\infty).$$

Доказательство. Сначала заметим, что справедлива следующая формула, которая проверяется по индукции:

$$F^{(k)}(x) = -f^{(k-1)}(x) - \alpha f^{(k-2)}(x) - \ldots - \alpha^{k-1} f(x)$$
$$+ \alpha^k \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} f(t)\, dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{2.14}$$

где $f^{(k)}$ – k-ая производная функции $f(x)$.

а) Так как $f \in W_p^{n-1}(0, +\infty)$, то из (2.14) заключаем, что для завершения доказательства достаточно показать, что $F \in L_p^+ \equiv L_p(0, +\infty)$, $p \geq 1$. Сперва рассмотрим $p > 1$. Пусть $\delta > 0$ – произвольное число, рассмотим следующий интеграл

$$I_\delta = \int_0^\delta \left| \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} f(t)\, dt \right|^p dx.$$

В последнем интеграле, применяя неравенство Гельдера, будем иметь:

$$\begin{aligned} I_\delta &\leq \int_0^\delta \left(\int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} |f(t)|\, dt \right)^p dx \\ &= \int_0^\delta \left(\int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)/p} |f(t)| e^{-\alpha(t-x)/q} dt \right)^p dx \\ &\leq \int_0^\delta \left[\left(\int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} dt \right)^{1/q} \right]^p dx \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{p-1} \int_0^\delta \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} |f(t)|^p dt\, dx, \end{aligned}$$

где $p, q \in N$, $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Изменяя порядок интегрирования в последнем интеграле, получим

$$\begin{aligned} I_\delta &\leq \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{p-1} \left(\int_0^\delta \int_x^\delta e^{-\alpha(t-x)} |f(t)|^p\, dt\, dx + \int_0^\delta \int_\delta^\infty e^{-\alpha(t-x)} |f(t)|^p\, dt\, dx \right) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{p-1} \left(\int_0^\delta |f(t)|^p e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} dx\, dt + \int_\delta^\infty |f(t)|^p e^{-\alpha t} \int_0^\delta e^{\alpha x} dx\, dt \right) \\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha} \right)^p \left(\int_0^\delta |f(t)|^p\, dt + \int_\delta^\infty |f(t)|^p e^{-\alpha t} e^{\alpha \delta} dt \right) \\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha} \right)^p \int_0^\infty |f(t)|^p\, dt < +\infty. \end{aligned}$$

Откуда, в силу произвольности числа $\delta > 0$ заключаем, что $F \in L_p(0, +\infty)$.

Пусть теперь $p = 1$, тогда, используя теорему Фубини, можно проверить, что $F \in L_1(0, +\infty)$. Итак, $F^{(k)} \in L_p(0, +\infty)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, следовательно,

$F \in W_p^n(0,+\infty)$. Доказательство b) проводится аналогичным образом. Лемма 1 доказана.

Аналогичным образом можно доказать и следующую лемму.

Лемма 2. a) *Пусть* $f \in W_p^{n-1}(0,+\infty)$ $(p, n \in N,\ p \geq 1)$ – *вещественная функция, тогда при всяком* $\alpha > 0$

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{-\alpha(x-t)} f(t)\, dt \in W_p^n(0,+\infty).$$

b) *Если* $\psi \in W_p^{n-1}(-\infty,+\infty)$ $(p, n \in N, p \geq 1)$, *то при всяком* $\alpha > 0$

$$\chi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-t)} \psi(t)\, dt \in W_p^n(-\infty,+\infty).$$

3. ФАКТОРИЗАЦИЯ ИСХОДНОГО ОПЕРАТОРА

3.1. **Задача факторизации.** Запишем систему (1.1) в операторной форме

$$(\mathbf{D}^2 - AJ + K)\, f = -g,$$

где $\mathbf{D} = diag(\mathbf{D}; \mathbf{D}; ...\mathbf{D})$; $(\mathbf{D}\rho)(x) = \frac{d\rho}{dx}$ – матричный оператор дифференцирования, $A = diag(a_1, a_2, \ ..., \ a_N)$; $J = diag(I, I, ..., I)$ – единичный матричный оператор, а $\mathcal{K} \in \Omega$ – оператор Винера–Хопфа. Рассмотрим следующую задачу факторизации: для заданных операторов A и $\mathcal{K} \in \Omega$ и для двух произвольных независимых диагональных матриц $\alpha = diag(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$, $\beta = diag(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N)$, α_i, $\beta_i > 0$, $i = 1, 2, ..., N$ найти такой матричный интегральный оператор $H \in \Omega$, чтобы имела место факторизация

$$\mathbf{D}^2 - AJ + K = (\mathcal{D} - \alpha J)(J - H)(\mathcal{D} + \beta J). \tag{3.1}$$

Это разложение будем понимать как равенство матричных интегральных операторов, действующих в пространстве Соболева:

$$W_{1,1}^{\times N}(0,+\infty) \equiv W_1^1(0,+\infty) \times ... \times W_1^1(0,+\infty).$$

3.2. **Основная факторизационная лемма.**

Лемма 3. *Факторизация* (3.1) *имеет место для любых операторов* $\mathbf{K} \in \Omega$ *и* $\mathbf{A} = diag\,(a_1, a_2, \ldots, a_N)$. *При этом, ядро оператора* $\mathbf{H} \in \Omega$ *задается согласно следующей формуле* $h(x) = (h_{ij}(x))_{i,j=1}^{N\times N}$, *где функции* h_{ij} *принадлежат*

$W_1^2(-\infty,+\infty)$ *и*

$$h_{ij}(x)=\frac{\alpha_i^2-a_i}{\alpha_i+\beta_i}\,e^{\alpha_i x}\delta_{ij}\theta(-x)+\frac{\beta_i^2-a_i}{\alpha_i+\beta_i}\,e^{-\beta_i x}\delta_{ij}\theta(x)$$
$$+\int_0^\infty e^{-\alpha_i y}\int_0^\infty K_{ij}(x+y-z)\,e^{-\beta_j z}dz\,dy, \tag{3.2}$$

где δ_{ij} *– символ Кронекера, а* $\theta(x)$ *– функция Хевисайда.*

Доказательство. Пусть J_β – обратный оператор матричного дифференциального оператора $\mathbf{D}+\beta\mathbf{J}$ в

$$\mathcal{M}=\left\{f:f\in W_{1,1}^{\times N}(0,+\infty),\ f(0)=0\right\},$$

где $\beta=diag(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_N)$, $\beta_i>0$ $(i=1,2,\ldots,N)$. Нетрудно проверить, что $J_\beta\in\Omega_+$ и задается следующим образом

$$\begin{gathered}J_\beta=diag(J_{\beta_1},J_{\beta_2},\ldots,J_{\beta_N}),\\ (J_{\beta_i}\varphi)(x)=\textstyle\int_0^x e^{-\beta_i(x-t)}\varphi(t)\,dt\quad x\in(0,+\infty),\end{gathered}\tag{3.3}$$

где $\varphi\in E$ и $i=1,2,\ldots,N$. Из (2.4) видно, что

$$\mathbf{Q}_\beta=\mathbf{K}J_\beta\in\Omega. \tag{3.4}$$

Пусть $\alpha=diag(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N)$, $\alpha_i>0$ $(i=1,2,\ldots,N)$, обозначим через $\mathbf{R}_\alpha$ – обратный оператор матричного дифференциального оператора $\alpha\mathbf{J}-\mathbf{D}$ в пространстве $W_{1,1}^{\times N}(0,+\infty)$. Легко заметить, что $\mathbf{R}_\alpha\in\Omega^-$ и

$$\begin{gathered}\mathbf{R}_\alpha=diag(R_{\alpha_1},R_{\alpha_2},\ldots,R_{\alpha_N}),\\ (\mathbf{R}_{\alpha_i}\varphi)(x)=\int_x^\infty e^{-\alpha_i(t-x)}\varphi(t)\,dt,\end{gathered}\tag{3.5}$$

где $\varphi\in E$ и $i=1,2,\ldots,N$. С учетом i) – iii) и включения (3.4) имеем, что

$$L_{\alpha,\beta}\equiv R_\alpha J_\beta\in\Omega,\quad P_{\alpha,\beta}\equiv R_\alpha\mathbf{Q}_\beta\in\Omega. \tag{3.6}$$

Таким образом, оператор $\mathbf{D}^2-\mathbf{AJ}+\mathbf{K}$ представим в следующем виде

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2-\mathbf{AJ}+\mathbf{K}&=\mathbf{D}(\mathbf{D}+\beta\mathbf{J}-\beta\mathbf{J})-\mathbf{AJ}+\mathbf{K}\\&=(\mathbf{D}(\mathbf{J}-\beta\mathbf{J}_\beta)-\mathbf{AJ}_\beta+Q_\beta)(\mathbf{D}+\beta\mathbf{J})\\&=(\mathbf{D}-\beta\mathbf{DJ}_\beta-\mathbf{AJ}_\beta+Q_\beta)(\mathbf{D}+\beta\mathbf{J})\\&=(\mathbf{D}-\alpha\mathbf{J}+\alpha\mathbf{J}-\beta(\mathbf{J}-\beta\mathbf{J}_\beta)-\mathbf{AJ}_\beta+Q_\beta)(\mathbf{D}+\beta\mathbf{J})\\&=(\mathbf{D}-\alpha\mathbf{J})\left(\mathbf{J}-(\alpha-\beta)R_\alpha-\left(\beta^2-\mathbf{A}\right)L_{\alpha,\beta}-P_{\alpha,\beta}\right)(\mathbf{D}+\beta\mathbf{J})\\&=(\mathbf{D}-\alpha\mathbf{J})(\mathbf{J}-\mathbf{H})(\mathbf{D}+\beta\mathbf{J})\end{aligned}$$

и $\mathbf{H} = (\alpha - \beta)\mathbf{R}_\alpha + (\beta^2 - \mathbf{A})L_{\alpha,\beta} + \mathbf{P}_{\alpha,\beta} \in \Omega$.

В последнем соотношении, используя переход от операторных равенств к равенству ядер, с учетом i) – iii), получим формулу (3.2). Нетрудно проверить, что $\mathbf{H}$ действует в пространстве $W_{1,1}^{\times N}(0, +\infty)$.

3.3. **Первый момент ядра $h(x)$.** В дальнейшем нам неоднократно понадобится существование и знак первого момента ядра k.

Лемма 4. *Пусть $K \in Q$ и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t| \, |K_{i,j}(t)| \, dt < +\infty, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N,$$

тогда $h \in Q$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t| \, |h_{i,j}(t)| \, dt < +\infty,$$

причем имеет место формула

$$\nu(h_{ij}) = \frac{\nu(K_{ij})}{\alpha_i \beta_j} + \frac{a_i(\beta_i - \alpha_i)}{\alpha_i^2 \beta_i^2}\delta_{ij} - \frac{c_{ij}(\beta_j - \alpha_i)}{\alpha_i^2 \beta_j^2}, \tag{3.7}$$

где

$$c_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x) \, dx, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Доказательство. Из (3.2) с учетом теоремы Фубини имеем

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\alpha_i^2 - a_i}{\alpha_i + \beta_i}\delta_{ij} \int_{-\infty}^{0} x e^{\alpha_i x} dx + \frac{\beta_i^2 - a_i}{\alpha_i + \beta_i}\delta_{ij} \int_{0}^{\infty} x e^{-\beta_i x} dx = \frac{a_i(\beta_i - \alpha_i)}{\alpha_i^2 \beta_i^2}\delta_{ij}, \\
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha_i y} \int_{0}^{\infty} K_{ij}(x + y - z) \, e^{-\beta_j z} dz \, dy \, dx \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-\beta_i z} \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha_i y} \int_{-\infty}^{\infty} x K_{ij}(x + y - z) \, dx \, dy \, dz \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-\beta_i z} \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha_i y} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(\tau)(\tau - y + z) \, d\tau \, dy \, dz \\
&= \frac{\nu(K_{ij})}{\alpha_i \beta_j} - \frac{c_{ij}(\beta_j - \alpha_i)}{\alpha_i^2 \beta_j^2}.
\end{aligned}$$

Так как

$$\nu(h_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} x h_{ij}(x) \, dx = I_1 + I_2,$$

то лемма доказана.

4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (1.1) С ПОМОЩЬЮ ФАКТОРИЗАЦИИ (3.1)

В настоящем параграфе мы будем заниматься решением системы (1.1) с помощью факторизации (3.1). Предположим, что $\alpha_i,\ \beta_i \in \left[\sqrt{a_i}, +\infty\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Обозначим

$$q_j = a_j - \alpha_j \sum_{i=1}^{N} \frac{c_{ij}}{\alpha_i}, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.1}$$

Имеет место

Теорема 1. *Предположим, что существуют некоторые параметры* $\alpha_i,\ \beta_i \in \left[\sqrt{a_i}, +\infty\right)$ *такие, что все* $q_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, *тогда задача* (1.1)– (1.4) *в пространстве Соболева* $W_{1,2}^{\times N}(0, +\infty)$ *имеет по-компоненетно неотрицательное решение* $\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_N)^T$, *причем*

$$f_j(x) = \int_0^x e^{-\beta_j(x-t)} F_j(t)\, dt + y_j e^{-\beta_j x}, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

где $F_j \in W_1^1(0, +\infty)$ *– неотрицательные функции.*

Доказательство. Используя факторизацию (3.1), перепишем уравнение (1.1) в следующем виде

$$(\mathbf{D} - \alpha\mathbf{J})(\mathbf{J} - \mathbf{H})(\mathbf{D} + \beta\mathbf{J}) f = -g. \tag{4.2}$$

Это уравнение эквивалентно следующим связанным уравнениям:

$$(\mathbf{D} - \alpha\mathbf{J})\varphi = -g, \tag{4.3}$$

$$(\mathbf{J} - \mathbf{H}) F = \varphi, \tag{4.4}$$

$$(\mathbf{D} + \beta\mathbf{J}) f = F. \tag{4.5}$$

Сперва рассмотрим уравнение (4.3). Используя лемму 1, можно убедиться, что диагональная система (4.3) в пространстве $W_{1,1}^{\times N}(0, +\infty)$ имеет единственное решение вида $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)^T$, где

$$\varphi_j(x) = \int_x^\infty e^{-\alpha_j(t-x)} g_j(t)\, dt \in W_1^1(0, +\infty), \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.6}$$

Перейдем теперь к изучению (4.4)

$$F_i(x) = \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^\infty h_{ij}(x-t) F_j(t)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

или в матричной форме

$$F(x) = \varphi(x) + \int_0^\infty h(x-t)\, F(t)\, dt. \tag{4.7}$$

Для системы (4.7) рассмотрим следующие итерации:

$$F^{(n+1)}(x) = \varphi(x) + \int_0^\infty h(x-t)\, F^{(n)}(t)\, dt, \tag{4.8}$$

где

$$F^{(k)}(x) = \left(F_1^{(k)}(x), \ldots, F_N^{(k)}(x)\right)^T, \quad F^{(0)} = (0, 0, \ldots, 0)^T, \quad k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так как $\varphi(x) \succeq 0$ при $x \in (0, +\infty)$ и $h(x) \succeq 0$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, то по индукции легко можно проверить справедливость следующих фактов

$$\text{i)} \quad F^{(n)} \uparrow \quad \text{по} \quad n,$$

$$\text{т.е.} \quad F^{(n+1)}(x) \succeq F^{(n)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in (0, +\infty), \tag{4.9}$$

$$\text{ii)} \quad F^{(n)}(x) \succeq \varphi(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in (0, +\infty). \tag{4.10}$$

С учетом (3.3) и (4.6) будем иметь

$$\left\|F^{(n+1)}(x)\right\|_{L_1^{\times N}(0,\infty)} = \|\varphi(x)\|_{L_1^{\times N}(0,\infty)} + \sum_{i=1}^N \int_0^\infty \sum_{j=1}^N \int_0^\infty h_{ij}(x-t) F_j^{(n)}(t) dt dx$$

$$\leq \|\varphi(x)\|_{L_1^{\times N}(0,+\infty)} + \max_{1\leq j\leq N} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^\infty h_{ij}(x)\, dx \sum_{j=1}^N \int_0^\infty F_j^{(n+1)}(t) dt$$

$$= \|\varphi(x)\|_{L_1^{\times N}(0,+\infty)} + \max_{1\leq j\leq N} (1-q_j) \left\|F^{(n+1)}\right\|_{L_1^{\times N}(0,+\infty)},$$

Откуда следует

$$\|\varphi(x)\|_{L_1^{\times N}(0,+\infty)} \leq \left\|F^{(n+1)}(x)\right\|_{L_1^{\times N}(0,+\infty)} \leq \frac{\|\varphi(x)\|_{L_1^{\times N}(0,+\infty)}}{1 - \max_{1\leq j\leq N}(1-q_j)}. \tag{4.11}$$

Из теоремы Б. Леви (см. [12]) следует, что последовательность вектор-функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$ почти всюду в $(0, +\infty)$ сходится к $F(x) \in L_1^{\times N}(0, +\infty)$. Ниже убедимся, что $F(x) \in W_1^{\times N}(0, +\infty)$ и является решением системы (4.7). Действительно, из (4.8) следует, что

$$F_i^{(n+1)} \leq \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^N \int_0^\infty h_{ij}(x-t)\, F_j(t)\, dt \in L_1(0, +\infty), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

В последнем неравенстве переходя к пределу $n \to \infty$ с учетом теоремы Лебега, получим

$$F_i(x) \leq \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^N \int_0^\infty h_{ij}(x-t)\, F_j(t)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.12}$$

Но с другой стороны, из (4.8) видно, что

$$\varphi_i(x) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^{\infty} h_{ij}(x-t) F_j^{(n)}(t)\, dt \le F_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где, переходя к пределу при $n \to \infty$, с учетом теоремы Б. Леви, получим

$$\varphi_i(x) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^{\infty} h_{ij}(x-t) F_j(t)\, dt \le F_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.13}$$

Сравнивая неравенства (4.12) и (4.13), получим, что $F(x)$ является решением системы (4.7). Так как $\varphi_i \in W_1^1(0, +\infty)$, $h_{ij} \in W_1^2(-\infty, +\infty)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$, то полученное решение по крайней мере принадлежит пространству $W_{1,1}^{\times N}(0, +\infty)$,.

Перейдем к решению простейшего операторного уравнения (4.5), т.е.

$$\frac{df_i}{dx} + \beta_i f_i(x) = F_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Используя начальное значение (1.4) и лемму 2, получаем требуемое. Теорема доказана.

Аналогичными методами с использованием лемм 1 и 2, можно получить более общий результат.

Теорема 2. *Предположим*

a) *выполнены все условия теоремы 1,*
b) $0 \le g_i \in W_p^{n-1}(0, +\infty)$, $0 \le K_{ij} \in W_p^{n-2}(-\infty, +\infty)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ *при* $p, n \in N$, $p \ge 1$, $n = 2, 3, \ldots$

Тогда задача (1.1)-(1.4) *имеет по-компонентно неотрицательное решение*

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_N)^T \in W_{p,n+1}^{\times N}(0, +\infty),$$

где

$$f_j(x) = \int_0^x e^{-\beta_j(x-t)} F_j(t)\, dt + y_j e^{-\beta_j x}$$

и $F_j \in W_p^n(0, +\infty)$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ *– неотрицательные функции.*

Теорема 3. *Предположим, что существуют параметры* α_i *и* $\beta_i \in \left[\sqrt{a_i}, +\infty\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, *для которых*

a) $r(B) = 1$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{N \times N}$, $b_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} h_{ij}(x)\, dx$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$,
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |t|\, |K_{ij}(t)|\, dt < +\infty, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N.$

Тогда:

i) *при* $\nu(K_{ij}) > \dfrac{c_{ij}(\beta_j - \alpha_i)}{\alpha_i \beta_j} - \dfrac{\beta_j a_i (\beta_i - \alpha_j)}{\alpha_i \beta_i^2} \delta_{ij} \equiv \sigma_{ij}$, *задача* (1.1)–(1.4) *в классе* $\mathcal{P}$ *обладает по-компонентно неотрицательным решением следующей структуры*

$$\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_N)^T,$$

$$f_i(x) = y_i e^{-\beta_i x} + \int_0^x e^{-\beta_i (x-t)} \left(R_1^i(t) + R_2^i(t)\right) dt, \tag{4.14}$$

где $R_1^i \in L_1(0, +\infty)$, $R_2^i \in C_M(0, +\infty)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$;

ii) *при* $\nu(K_{ij}) = \sigma_{ij}$ *и*

$$m(g_i) \equiv \int_0^\infty x g_i(x)\, dx < +\infty, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N,$$

задача (1.1)–(1.4) *в классе* $\mathcal{P}$ *также обладает по-компонентно неотрицательным решением вида* (4.14);

iii) *при* $\nu(K_{ij}) < \sigma_{ij}$ *и* $m(g_i) < +\infty$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$, *задача* (1.1)–(1.4) *в пространстве* $W_{1,2}^{\times N}(0, +\infty)$ *имеет по-компонентно неотрицательное решение вида:*

$$f_j(x) = \int_0^x e^{-\beta_j (x-t)} F_j(t)\, dt + y_j e^{-\beta_j x}, \tag{4.15}$$

где $0 \le F_j \in W_1^1(0, +\infty)$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$.

Доказательство. С использованием факторизации (3.1) решая уравнение (4.3), приходим к системе (4.4) интегральных уравнений. Поскольку $r(B) = 1$, то система становится консервативным матричным уравнением Винера–Хопфа. В силу сказанного (см. параграф 2)

$$\mathbf{J} - T = (\mathbf{J} - U_-)(\mathbf{J} - U_+), \tag{4.16}$$

где

$$(Tf)(x) = \int_0^\infty h(x-t) f(t)\, dt, \quad U_\pm \in \Omega^\pm,$$

$$\gamma_\pm = r\left(\int_0^\infty u_\pm(x)\, dx\right) \le 1, \quad (1 - \gamma_-)(1 - \gamma_+) = 0.$$

Поскольку $h_{ij} \in W_1^2(-\infty, +\infty)$, то нетрудно показать, что $u^\pm = \left(u_{ij}^\pm\right)$ и $u_{ij}^\pm \in W_1^2(0, +\infty)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N$. Факторизация (4.15) сводит уравнение $(\mathbf{J} - T) F = \varphi$ (т.е. уравнение $(\mathbf{J} - H) F = \varphi$) к решениею следующих уравнений

$$(\mathbf{J} - U_-)\xi = \varphi, \tag{4.17}$$

$$(\mathbf{J} - U_+) F = \xi. \tag{4.18}$$

Сперва рассмотрим уравнение (4.17): из теоремы E, с учетом леммы 4 следует, что при $\nu(K_{ij}) > \sigma_{ij}$ $(i,j = 1,2,\ldots,N)$ $\gamma_- < 1$. Следовательно, уравнение (4.18) в пространстве $L_1^{\times N}(0,+\infty)$ имеет единственное по-компонентно неотрицательное решение. Так как $u_{ij}^- \in W_1^2(0,+\infty)$ и $\varphi_i \in W_1^1(0,+\infty)$, то полученное решение ξ принадлежит пространству $W_{1,1}^{\times N}(0,+\infty)$. Пусть теперь $\nu(K_{ij}) \le \sigma_{ij}$ $(i,j = 1,2,\ldots,N)$. Тогда снова используя теорему E и лемму 4, заключаем, что $\gamma_- = 1$. Тогда известно (см. [14]), если

$$\int_0^\infty x(\varphi_i(x))\,dx < +\infty, \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{4.19}$$

то уравнение (4.17) в $L_1^{\times N}(0,+\infty)$ также обладает по-компонентно неотрицательным решением. Поскольку $u_{ij}^- \in W_1^2(0,+\infty)$ и $\varphi_i \in W_1^1(0,+\infty)$ $(i = 1,2,\ldots,N)$, то $\xi \in W_{1,1}^{\times N}(0,+\infty)$. Из теоремы Фубини следует, что условие (4.19) равносильно условиям $m(g_i) < +\infty$ $(i = 1,2,\ldots,N)$.

Теперь рассмотрим уравнение (4.18), т.е.

$$F_i(x) = \xi_i(x) + \sum_{j=1}^N \int_0^x u_{i,j}^+(x-t)\,F_j(t)\,dt, \quad i = 1,2,\ldots,N. \tag{4.20}$$

Если $\nu(K_{ij}) < \sigma_{ij}$, то из теоремы E и леммы 4 получим $\gamma_- = 1$, $\gamma_+ < 1$. Следовательно, если $\xi \in W_{1,1}^{\times N}(0,+\infty)$, то уравнение (4.20) в $W_{1,1}^{\times N}(0,+\infty)$ имеет единственное решение. А если $\nu(K_{ij}) \ge \sigma_{ij}$, то $\gamma_+ = 1$, $\gamma_- \le 1$ $(i,j = 1,2,\ldots,N)$. Тогда, если $\xi \in W_{1,1}^{\times N}(0,+\infty)$, то уравнение (4.20) имеет по-компонентно абсолютно непрерывное решение:

$$F_i(x) = R_1^i(x) + R_2^i(x)$$

(см. [12]), где

$$R_i^1 \in L_1(0,+\infty), \quad R_i^2 \in C_M(0,+\infty), \quad i = 1,2,\ldots,N.$$

Таким образом, в обоих случаях существование требуемого решения обеспечено.

Перейдем, наконец, к уравнению (4.5). Используя лемму 2 и начальное условие (1.4), получим требуемое. Теорема доказана.

Проводя аналогичные рассуждения, можно доказать также следующую теорему.

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия a) и b) теоремы 3 и*

$$\nu(K_{ij}) < \sigma_{ij}, \quad m(g_i) < +\infty, \quad K_{ij} \in W_p^{n-2}(-\infty,+\infty), \quad i,j = 1,2,\ldots,N.$$

Тогда задача (1.1)–(1.4) *в пространстве* $W_{p,n+1}^{\times N}(0,+\infty)$ *имеет по-компонентно неотрицательное решение вида*

$$f_j(x) = \int_0^x e^{-\beta_j(x-t)} F_j(t)\,dt + y_j e^{-\beta_j x},$$
$$0 \le F_j \in W_p^n(0,+\infty), \quad j = 1,2,\ldots,N.$$

В заключение автор выражает глубокую признательность проф. Н. Б. Енгибаряну за полезные замечания.

Abstract. The paper deals with vector integro-differential equation of convolution type that have the form

$$-\frac{d^2 f_i}{dx^2} + a_i f_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{N} \int_0^\infty K_{ij}(x-t) f_j(t)\,dt, \quad i = 1,2,\ldots,N,$$

where $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_N)^T$ is the unknown vector-function, a_i are nonnegative numbers, $\vec{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_N)^T \in L_1^{\times N}(0,+\infty) \equiv L_1(0,+\infty) \times \ldots \times L(0,+\infty)$ is the independent term of the equation with nonnegative components and $0 \le K_{ij} \in L_1(-\infty,+\infty)$, $i,j = 1,2,\ldots,N$ are the kernel-functions. These equations have significant applications in the wave non-local interaction theory. Using some special factorization methods, solvability of the system is proved in different functional spaces.

Список литературы

[1] G. A. Baraff, "Transmission of Electromagnetic Waves Through a conducting slab. The Two-Sided Wiener-Hopf Solution," J. Math. Phys. **9** (3), 372-384 (1968).

[2] J. Casti and R. Kalaba, *Embedding Methods in Applied Mathematics* (Addison-Wesley, Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1973).

[3] E. Volterra, "On Elastic Continual Hereditary Characteristics," Journal of Applied Mechanics **18**, 273-279 (1951).

[4] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff and Y. H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation* (Cambridge University Press, 1981).

[5] N. B. Yengibaryan and A. Kh. Khachatryan, "Integro-Differential Equation of Non-Local Wave Interaction," Mat. Sbornik **198** (3), 839-855 (2007).

[6] Х. А. Хачатрян, Э. А. Хачатрян, "О разрешимости интегро-дифференциального уравнения типа свертки на R," Изв. НАН Армении, Математика, **42** (3) 161-175 (2007).

[7] Х. А. Хачатрян, М. Г. Костанян, "Факторизация векторных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки," Изв. НАН Армении, Математика **43** (3) 145-156 (2008).

[8] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций* (Наука, Москва, 1966).

[9] М. А. Красносельский, *положительные решения операторных функций* (Физматиздом, Москва, 1962).

[10] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения," Мат. сборник **97** (1), 35-58 (1975).

[11] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения" Итоги науки и техники, Мат. анализ **22**, 175-242 (1984).

[12] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, Москва, 1981).

[13] Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Системы интегральных уравнений Винера-Хопфа и нелинейные уравнения факторизации," Мат. сборник **124** (6), 189-216 (1984).

[14] N. B. Yengibaryan, "Renewal Theorems for a System of Integral Equations," Sbornik, Mathematics **189** (12), 1795-1808 (1998).

Поступила 11 марта 2008