Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 5, 2008, стр. 41-56

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Г. КАРАПЕТЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *vahagn_kg@mail.ru*

Аннотация. Линейный дифференциальный оператор $P(D) = P(D_1, ..., D_n)$ с постоянными коэффициентами называется почти гипоэллиптическим, если все производные $D^\alpha P$ характеристического многочлена $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ оцениваются через P. В работе доказывается, что если f – бесконечно дифференцируемая функция, интегрируемая с квадратом с определенным экспоненциальным весом, то любое решение u, интегрируемое с квадратом с тем же весом, уравнения $P(D)u = f$ является бесконечно дифференцируемой функцией, если P – почти гипоэллиптический опрератор и $P(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе будем пользоваться следующими обозначениями: N – множество натуральных чисел, $N_0 = N \bigcup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times \cdots \times N_0$ – множество n-мерных мультииндексов, E^n и R^n – n-мерные, вещественные евклидовы пространства точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ соответственно $\mathbb{C}^n = R^n \times iR^n$ $(i^2 = -1)$.

Для $\xi \in R^n$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, $x \in E^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим

$$|\zeta| = (|\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2)^{1/2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n},$$

где либо

$$D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad \text{либо} \quad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha, \tag{1}$$

где сумма распространяется по конечному набору

$$(P) = \{\alpha \in N_0^n : \gamma_\alpha \neq 0\},$$

а

$$P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$$

– его полный символ. Выпуклая оболочка множества $(P) \bigcup \{0\}$ называется характеристическим многогранником оператора (многочлена) P.

Для линейного дифференциального оператора (1), целого числа $m \geq 0$ и $\delta \geq 0$ обозначим

$$L_{2,\delta} \equiv \left\{ u : u \in L_2^{loc}, \ \|u\|_{L_{2,\delta}} \equiv \left(\int \left| u(x) e^{-\delta |x|} \right|^2 dx \right)^{1/2} < +\infty \right\},$$

$$W_\delta^m \equiv \left\{ u : \|u\|_{W_\delta^m} \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_{2,\delta}} < +\infty \right\},$$

$$N(P, \delta, m) \equiv \left\{ u : \|u\|_{N(P,\delta,m)} \equiv \|P(D) u\|_{W_\delta^m} + \|u\|_{L_{2,\delta}} < +\infty \right\},$$

$$D(P) \equiv \{ \zeta : \zeta \in \mathbb{C}^n; P(\zeta) = 0 \}, \quad D(P, \delta) = \{ \zeta : \zeta \in D(P), \ |\mathrm{Im}\, \zeta| < \delta \}.$$

Положим

$$W_\delta^\infty \equiv \bigcap_{m=0}^\infty W_\delta^m, \quad N(P, \delta) \equiv \bigcap_{m=0}^\infty N(P, \delta, m).$$

Нетрудно заметить, что $W_\delta^m (N(P, \delta, m))$ является Банаховым пространством, а W_δ^∞ $(N(P, \delta))$ становится пространством Фреше, если в них ввести топологию полунормами

$$\| \cdot \|_{W_\delta^m} \quad \text{и} \quad \|P(D) \cdot \|_{W_\delta^m} + \| \cdot \|_{L_{2,\delta}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

При этом, очевидно, $W_\delta^\infty \subset C^\infty, W_\delta^\infty \subset N(P, \delta)$ при всех $\delta > 0$.

В. И. Буренковым (см. [1]), в частности, доказано, что $N(P, 0) \subset W_0^\infty$ если $P(\xi) \neq 0$ при достаточно больших $\xi \in R^n$. Наша цель в настоящей статье найти условия на символ оператора $P(D)$, при выполнении которых существует число $\delta > 0$, для которого $N(P, \delta) \subset W_\delta^\infty$.

Определение 1. *(см. [2], теоремы 11.1.1 и 11.1.3). Дифференциальный оператор $P(D)$ называется гипоэллиптическим, если выполняется одно из следующих эквивалентых условий:*

(i) *для любого $\alpha \in N_0^n$, имеем $P^{(\nu)}(\xi)/P(\xi) \equiv D^\nu P(\xi)/P(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$,*

(ii) *$d_P(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty \quad (\xi \in R^n)$,*

где $d_P(\xi)$ – расстояние точки ξ до поверхности $D(P)$.

В работе [2] доказано (см. теоремы 11.1.1 и 11.1.3), что линейный диффернциальный оператор $P(D) = P(D_1, \ldots, D_n)$ гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда любое обобщенное решение u уравнения $P(D)u = 0$ является бесконечно дифференцируемой функцией.

Определение 2. *(см. [3]) Оператор $P(D)$ называется почти гипоэллипотическим, если для любого $\nu \in N_0^n$ существует постоянная $C_\nu > 0$ такая, что*

$$|P^{(\nu)}(\xi)| \leq C_\nu(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in R^n. \tag{2}$$

Лемма 1. *(см. [2], лемма 11.1.4) Для любого многочлена $Q(\xi)$ от n переменных существует постоянная $\mathcal{H} = \mathcal{H}(n, ord\, Q) > 0$ такая, что для всех тех $\xi \in R^n$, для которых $Q(\xi) \neq 0$*

$$\mathcal{H}^{-1} \leq d_Q(\xi) \sum_{\alpha \neq 0} \left| \frac{Q^\alpha(\xi)}{Q(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leq \mathcal{H}. \tag{3}$$

Из оценки (3) непосредственно следует, что если для многочлена P с некоторыми постоянными $\epsilon > 0$ и $C > 0$

$$|P(\xi)| \geq \epsilon, \quad |\xi| \geq C, \tag{4}$$

то многочлен P почти гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда

$$\rho_p \equiv \liminf_{t \to \infty} \min_{|\xi| = t} d_P(\xi) > 0. \tag{5}$$

Очевидно, что многочлен P гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда $\rho_p = \infty$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Предложение 1. (I) *Многочлен P гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда для любого $\delta > 0$ множество $D(P, \delta)$ ограничено.*

(II) *Если для многочлена P выполняется оценка (4), то он почти гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда существует число $\delta > 0$, для которого множество $D(P, \delta)$ ограничено, при этом $\rho_p \geq \delta$.*

Доказательство. Утверждение пункта (I) непосредственно следует из пункта (ii) определения 1 гипоэллиптичности. Докажем утверждение пункта (II). Пусть для некоторого числа $\delta_0 > 0$ множество $D(P, \delta_0)$ ограничено, покажем, что тогда $\rho_p \geq \delta_0$.

Предположим обратное, что ρ_p конечно и $\rho_p < \delta_0$. Отсюда и определения числа ρ_p следует, что существуют числа $|t_s|_1^\infty$ и точки $\{\xi^s\}_1^\infty$, $|\xi^s| = t_s$ $s = 1, 2, \dots$ и $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$, для которых

$$d_P(\xi^s) \le \frac{\rho_p + \delta_0}{2} \quad s = 1, 2, \dots$$

Пусть точки $\zeta^s \in D(P)$, $s = 1, 2, \dots$ выбраны так, чтобы $d_P(\xi^s) = |\xi^s - \zeta^s|$, $s = 1, 2, \dots$ Тогда

$$|\mathrm{Im}\ \zeta^s| \le |\xi^s - \zeta^s| = d_P(\xi^s) \le \frac{\rho_p + \delta_0}{2} < \delta_0 \ \ s = 1, 2, \dots, \tag{6}$$

т.е. $|\zeta^s|_1^\infty \subset D(P, \delta_0)$. Тогда в силу условия пункта (II) существует постоянная $M > 0$, для которой $|\zeta^s| \le M$, $s = 1, 2, \dots$ Отсюда в силу (6) имеем

$$t_s = |\xi^s| \le |\xi^s - \zeta^s| + |\zeta^s| \le \delta_0 + M, \quad s = 1, 2, \dots,$$

что противоречит условию $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что $\rho_P \ge \delta_0$, следовательно, многочлен P почти гипоэллиптичен.

Докажем обратное, т.е. если многочлен P удовлетворяет оценке (4) и почти гипоэллиптичен, то существует число $\delta_0 > 0$ для которого множество $D(P, \delta_0)$ ограничено. Предположим обратное, что для любого $\delta > 0$ множество $D(P, \delta)$ неограничено, т.е. для любого $s = 1, 2, \dots$ существует точка $\zeta^s \in D(P, 1/s)$ так, что $\lim_{s\to\infty} |\zeta^s| = \infty$. Тогда, используя формулу Ньютона–Лейбница, из определения почти гипоэллиптичности 1, с некоторой постоянной $C_1 = C_1(P) > 0$ имеем

$$|P(Re\zeta^s)| = \left| P(\zeta^s) + \sum_{\alpha\ne 0} \frac{P^{(\alpha)}(\zeta^s)(-\mathrm{Im}\ \zeta^s)^\alpha}{\alpha!} \right|$$

$$= \left| \sum_{\alpha\ne 0} \frac{P^{(\alpha)}(\zeta^s)(-\mathrm{Im}\ \zeta^s)^\alpha}{\alpha!} \right| \le \sum_{\alpha\ne 0} \frac{|P^{(\alpha)}(\zeta^s)|}{\alpha!} \, |{-\mathrm{Im}}\ \zeta^s|^{|\alpha|}$$

$$\le \frac{1}{s} \sum_{\alpha\ne 0} \left| \sum_{\beta} \frac{P^{(\alpha+\beta)}(\mathrm{Re}\ \zeta^s)}{\alpha!\beta!} |\mathrm{Im}\ \zeta^s|^{|\beta|} \right| \le C_1(|P(\mathrm{Re}\ \zeta^s)| + 1)\frac{1}{s},$$

$s = 1, 2, \dots$. Отсюда, при достаточно больших s имеем

$$|P(\mathrm{Re}\ \zeta^s)| \le \frac{C_1}{s(1 - c_1/s)},$$

что противоречит оценке (4). Полученное противореcие доказывает, что если многочлен P почти гипоэллиптичен и удовлетворяет оценке (4), то для некоторого числа $\delta_0 > 0$ множество $D(P, \delta_0)$ ограничено. Предложение доказано.

В работе [4] доказано, что существует неотрицательная функция $g \in C^\infty$, для которой при k и k_α ($\alpha \in N_0^n$)

$$k^{-1}e^{-|x|} \le g(x) \le ke^{-|x|}, \quad x \in E^n, \tag{7}$$

$$|D^\alpha g(x)| \le k_\alpha g(x), \quad x \in E^n, \tag{8}$$

Для любого $\delta > 0$ через g_δ обозначим функцию $g(\delta\cdot)$. Из оценок (7) и (8) непосредственно следует

$$k^{-1}e^{-\delta|x|} \le g_\delta(x) \le ke^{-\delta|x|}, \quad x \in E^n, \tag{9}$$

$$|D^\alpha g_\delta(x)| \le k_\alpha \delta^{|\alpha|} g_\delta(x), \quad \alpha \in N_0^n, \quad x \in E^n. \tag{10}$$

В [4] доказано, что следующие нормы

$$\|u\|'_{W_\delta^m} \equiv \sum_{|\alpha|\le m} \|(D^\alpha u)g_\delta\|_{L_2}$$

и

$$\|u\|''_{W_\delta^m} \equiv \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha (u g_\delta)\|_{L_2}$$

эквивалентны исходной норме пространства W_δ^m. Аналогичным образом можно доказать, что исходная норма в $N(P,\delta,m)$ эквивалентна следующим нормам:

$$\|u\|'_{N(P,\delta,m)} \equiv \sum_{|\alpha|\le m} \|(D^\alpha P(D)u)g_\delta\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2},$$

$$\|u\|''_{N(P,\delta,m)} \equiv \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha (P(D)u)g_\delta)\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2}.$$

Теорема 1. *Если для оператора $P(D)$ при некотором $\delta > 0$, $N(P,\delta) \subset W_\delta^\infty$, то $\rho_P \ge \delta$, следовательно, оператор P почти гипоэллиптичен.*

Доказательство. Рассмотрим следующие отображения

$$D_j : N(P,\delta) \to W_\delta^\infty, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Так как обобщенный дифференциальный оператор замкнут, $N(P,\delta) \subset W_\delta^\infty$, $N(P,\delta)$ и W_δ^∞ – пространства Фреше, то в силу теоремы о замкнутом графике существует натуральное число m и постоянная $C > 0$, такие, что

$$\sum_{j=1}^n \|D_j u\|'_{L_{2,\delta}} \le c\|u\|'_{N(P,\delta,m)}, \quad u \in N(P,\delta). \tag{11}$$

Пусть

$$S_1 \equiv \{x : x \in E^n, \ |x| < 1\}$$

и $\phi \in C_0^\infty(S_1)$ – такая неотрицательная функция, что $\phi(x) = 1$ при $|x| < 1/2$. Так как в силу условия теоремы $N(P,\delta) \subset W_\delta^\infty$ и для любых $M \geq 1$, $u \in N(P,\delta)$ имеем $u\phi(x/M) \in N(P,\delta)$, то для любого целого числа $m \geq 0$ в силу оценки (10) имеем

$$\left\|u\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right\|'_{N(P,\delta,m)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \left\|\left(D^\alpha P(D)\left(u\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right)\right) g_\delta\right\|_{L_2} + \left\|u\phi\left(\frac{x}{M}\right) g_\delta\right\|_{L_2}$$
$$\leq C_1 \sum_{|\alpha|\leq m+ord_p} \left\|\left(D^\alpha\left(u\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right)\right) g_\delta\right\|_{L_2} + \left\|u\phi\left(\frac{x}{M}\right) g_\delta\right\|_{L_2}$$
$$\leq C_2 \sum_{|\alpha|\leq m+ord_p} \sum_{\beta\leq\alpha} \left\|(D^\beta u)\left(D^{\alpha-\beta}\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right) g_\delta\right\|_{L_2} + \left\|u\phi\left(\frac{x}{M}\right) g_\delta\right\|_{L_2}$$
$$\leq C_3 \sum_{|\alpha|\leq m+ord_p} \|(D^\alpha u)\, g_\delta\| + \|u g_\delta\|_{L_2} < \infty,$$

где $C_1 = C_1(P)$, $C_2 = C_2(P,m)$ и $C_3 = C_3(P,m,\phi) > 0$ – некоторые постоянные.

Пусть $0 < \delta_0 < \delta$, $\zeta \in D(P,\delta_0)$ и $u_\zeta = e^{i<x,\zeta>}$. Очевидно, что $u_\zeta \in N(P,\delta)$ для любого $\zeta \in D(P,\delta_0)$. Следовательно, в силу оценки (11) имеем при всех $M \geq 1$ и $\zeta \in D(P,\delta_0)$

$$\sum_{j=1}^{n} \left\|D_j\left(u_\zeta\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right)\right\|'_{L_{2,\delta}} \leq C\left\|u_\zeta\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right\|'_{N(P,\delta,m)}. \tag{12}$$

Для левой части этого неравенства имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \left\|D_j\left(u_\zeta\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right)\right\|'_{L_{2,\delta}} = \sum_{j=1}^{n} \left\|\left(D_j\left(e^{i<x,\zeta>}\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right)\right) g_\delta(x)\right\|_{L_2}$$
$$\geq \sum_{j=1}^{n}\left[\left\|\left(D_j e^{i<x,\zeta>}\right)\phi\left(\frac{x}{M}\right) g_\delta(x)\right\|_{L_2} - \left\|e^{i<x,\zeta>} D_j\phi\left(\frac{x}{M}\right) g_\delta(x)\right\|_{L_2}\right]$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left[|\zeta_j|\left\|e^{i<x,\zeta>}\phi\left(\frac{x}{M}\right) g_\delta(x)\right\|_{L_2} - \frac{1}{M}\left\|e^{i<x,\zeta>}(D_j\phi)\left(\frac{x}{M}\right) g_\delta(x)\right\|_{L_2}\right].$$

Произведя замену переменных $x/M = y$ и используя свойства функций ϕ и g, в силу оценки (9) получим

$$\sum_{j=1}^{n} \left\|D_j\left(u_\zeta\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right)\right\|'_{L_{2,\delta}} \geq \sum_{j=1}^{n}\Bigg\{|\zeta_j|\left[\int \left|e^{iM<y,\zeta>}\phi(y) g_{\delta M}(y)\right|^2 dy\right]^{1/2} M^{n/2}$$
$$-\frac{M^{n/2}}{M}\left[\int \left|e^{iM<y,\zeta>} D_j\phi(y) g_{\delta M}(y)\right|^2 dy\right]^{1/2}\Bigg\}$$
$$\geq \sum_{j=1}^{n} M^{n/2}\Bigg\{|\zeta_j|\left[\int_{|y|<1/2} \frac{e^{-2|\mathrm{Im}\ \zeta|M|y|-2\delta M|y|}}{k^2} dy\right]^{1/2}$$

$$-\frac{k}{M}\left[\int_{|y|<1} e^{2|\mathrm{Im}\ \zeta|M|y|-2\delta M|y|}dy\right]^{1/2}\Bigg\},$$

где k – постоянная из оценки (9). Переходя к полярным координатам, находим, что

$$\sum_{j=1}^{n}\left\|D_j\left(u_\zeta\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right)\right\|'_{L_{2,\delta}}\geq$$

$$\geq M^{n/2}\sum_{j=1}^{n}\Bigg\{\frac{|\zeta_j|}{k}\frac{1}{\sqrt{2M(\delta+|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{1-e^{-M(\delta+|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{|S_1|}$$

$$-\frac{k}{M}\frac{1}{\sqrt{2M(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{1-e^{-2M(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{|S_1|}\Bigg\}, \tag{13}$$

где $|S_1|$ площадь поверхности единичной сферы в R^n.

Для правой части оценки (12), где предполагаем, что $\zeta\in D(P,\delta)$, $P(\zeta)=0$ и $|\mathrm{Im}\ \zeta|<\delta$, имеем

$$\left\|u_\zeta\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right\|'_{N(P,\delta,m)}=$$

$$=\sum_{|\alpha|\leq m}\left\|\left(D^\alpha P(D)\left(e^{i<x,\zeta>}\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right)\right)g_\delta(x)\right\|_{L_2}+\left\|e^{i<x,\zeta>}\phi\left(\frac{x}{M}\right)g_\delta(x)\right\|_{L_2}$$

$$\leq C_1\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{\beta\neq 0}\sum_{\gamma\leq\alpha}\left\|\zeta^\gamma P^{(\beta)}(\zeta)e^{i<x\zeta>}D^{\alpha-\gamma+\beta}\phi\left(\frac{x}{M}\right)g_\delta(x)\right\|_{L_2}+$$

$$+\left\|e^{i<x\zeta>}\phi\left(\frac{x}{M}\right)g_\delta(x)\right\|_{L_2}$$

$$=C_1\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{\beta\neq 0}\sum_{\gamma\leq\alpha}\left\|\zeta^\gamma\frac{P^{(\beta)}(\zeta)e^{i<x,\zeta>}(D^{\alpha-\gamma+\beta}\phi)(\frac{x}{M})}{M^{(\alpha-\gamma+\beta)}}g_\delta(x)\right\|_{L_2}+$$

$$+\left\|e^{i<x\zeta>}\phi\left(\frac{x}{M}\right)g_\delta(x)\right\|_{L_2},$$

где $C_1=C_1(m, ord\,p)$ – постоянная и $M\geq 1$. Производя замену переменных, $x/M=y$, отсюда с некоторой постоянной $C_2=C_2(P,m,\phi)>0$ в силу свойств функций ϕ и g имеем

$$\left\|u_\zeta\phi\left(\frac{x}{M}\right)\right\|'_{N(P,\delta,m)}$$

$$\leq C_2\sum_{|\alpha|\leq m+ord\,p}k\frac{M^{n/2}}{M}(1+|\zeta|)^{|\alpha|}\left(\int_{|y|\leq 1}\left|e^{i<y,\zeta>M}e^{-\delta M|y|}\right|^2dy\right)^{1/2}$$

$$+M^{n/2}k\left(\int_{|y|\leq 1}\left|e^{i<y,\zeta>M}e^{-\delta M|y|}\right|^2dy\right)^{1/2}$$

$$\leq C_2\sum_{|\alpha|\leq m+ord\,p}kM^{\frac{n}{2}-1}(1+|\zeta|)^{|\alpha|}\frac{1}{\sqrt{2M(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}$$

$$\times\sqrt{1-e^{-2M(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{|S_1|}$$
$$+M^{n/2}k\frac{1}{\sqrt{2M(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{1-e^{-2M(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{|S_1|}.$$

Отсюда и из оценки (13), в силу (12) имеем

$$M^{n/2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{|\zeta_j|}{k}\frac{1}{\sqrt{2M(\delta+|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{1-e^{-M(\delta+|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{|S_1|}\right.$$
$$\left.-\frac{k}{M}\frac{1}{\sqrt{2M(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{1-e^{-M(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{|S_1|}\right\}$$
$$\leq C\left\{C_2\sum_{|\alpha|\leq m+ord\ p}kM^{n/2-1}(1+|\zeta|)^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2M(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\right.$$
$$\times\sqrt{1-e^{-2M(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{|S_1|}$$
$$\left.+M^{n/2}\frac{k}{\sqrt{2M(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{1-e^{-2M(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\sqrt{|S_1|}\right\}.$$

Умножив это неравенство на $\dfrac{M^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}{\sqrt{|S_1|}}$ и устремив $M\to+\infty$, учитывая, что $|\mathrm{Im}\ \zeta|<\delta$, получим

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{|\zeta_j|}{k}\frac{1}{\sqrt{2(\delta+|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}\leq\frac{Ck}{\sqrt{2(\delta-|\mathrm{Im}\ \zeta|)}}.$$

Откуда

$$\sum_{j=1}^{n}|\zeta_j|\leq Ck^2\sqrt{\frac{\delta+\delta_0}{\delta-\delta_0}},$$

так как $\zeta\in D(P,\delta_0)$ (т.е. $|\mathrm{Im}\ \zeta|<\delta_0<\delta$). Таким образом, множество $D(P,\delta_0)$ ограничено. Отсюда, в силу предложения 1 оператор P почти гипоэллиптичен и $\rho_P\geq\delta_0$. Так как $\delta_0\in(0,\delta)$ было произвольным, то $\rho_P\geq\delta$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если для линейного дифференциального оператора P для всех $\delta>0$ или последовательности $\delta_n\to+\infty$ (при $n\to\infty$)*

$$N(P,\delta)\subset W_\delta^\infty\quad \text{или}\quad N(P,\delta_n)\subset W_\delta^\infty,$$

то оператор P гипоэллиптичен.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1, так как в силу теоремы $\rho_p\geq\delta$ для любого $\delta>0$, и $\rho_p\geq\delta_n$, $n=1,2,\ldots$

Для оператора $P(D)$ и числа $\delta>0$, обозначим

$$W(P,\delta)=\{u:u\in L_{2,\delta},\ P(D)u\in L_{2,\delta}\}.$$

В работе [4] (лемма 2.3) доказано, что если

$$P \in I_n \equiv \{Q : Q(\xi) = Q(\xi_1, \ldots, \xi_n) \to \infty \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty\}$$

и P почти гипоэллиптичен, то существуют число $\Delta(P) > 0$ и постоянная $C = C(\Delta, P) > 0$ такие, что для всех $\delta \in (0, \Delta(p))$ и $u \in W(P, \delta)$

$$(14) \qquad \sum_\alpha \|P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\|_{L_2} \le C\|u\|_{W(P,\delta)} \equiv C\left[\|(P(D)u)g_\delta\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2}\right].$$

Лемма 2. *Если оператор $P(D)$ гипоэллиптичен, то существует постоянная $C = C(P)$ такая, что для любого $\delta > 0$ и $u \in W(P, \delta)$*

$$(15) \qquad \sum_\alpha \left\|P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)\right\|_{L_2} \le C\|(P(D)u)g_\delta\|_{L_2} + C_1\|ug_\delta\|_{L_2},$$

где $C_1 = C_1(\delta, P) > 0$ – постоянная, а $F(\cdot)$ – преобразование Фурье.

Доказательство. Согласно следствию 2.2 работы [4], W_δ^∞ плотно в $W(P, \delta)$. Поэтому достаточно доказать неравенство (15) для функций из W_δ^∞.

Пусть $\delta > 0$ – любое фиксированное число, а $\rho \ge 1$. Так как многочлен P гипоэллиптичен, то существует число $M = M(\rho)$, для которого

$$(16) \qquad d_P(\xi) \ge \rho, \quad |\xi| \ge M(\rho), \quad \xi \in R^n.$$

В силу оценок (16) и (3) и равенства Парсеваля имеем

$$\sum_\alpha \rho^{(\alpha)} \left\|P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)\right\|_{L_2} = \sum_\alpha \rho^{(\alpha)} \left(\int_{R^n} |P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

$$= \sum_\alpha \rho^{(\alpha)} \left(\int_{|\xi| \ge M(\rho)} |P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

$$+ \sum_\alpha \rho^{(\alpha)} \left(\int_{|\xi| < M(\rho)} |P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

$$\le \sum_\alpha \left(\int_{|\xi| \ge M(\rho)} |d_P^{|\alpha|}(\xi)P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

$$+ \sum_\alpha \rho^{(\alpha)} \left(\int_{|\xi| \le M(\rho)} |P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

$$(17) \qquad \le \mathcal{H}C_2\|P(D)(ug_\delta)\|_{L_2} + \rho^{ordp}C_2\|ug_\delta\|_{L_2},$$

где

$$C_2 = C_2(ord\, p) = card\, \mathcal{N}(P),$$
$$C_2 = C_2(P, \rho) = \max_{|\xi| \le M(\rho)} \sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(\xi)|,$$

и $\mathcal{N}(P)$ – характеристический многогранник оператора (или многочлена) P.

В силу формулы Лейбница и оценок (9) и (10)) имеем

$$\|P(D)(ug_\delta)\|_{L_2} \le \sum_{\alpha} \left\| \frac{(P^{(\alpha)}(D)u) D^\alpha g_\delta}{\alpha!} \right\|_{L_2}$$
$$\le \|(P(D)u) g_\delta\|_{L_2} + \sum_{\alpha \ne 0} \left\| (P^{(\alpha)}(D)u) g_\delta \right\|_{L_2} (k'\delta)^{|\alpha|}, \tag{18}$$

где

$$k' = \max_{|\nu| \le ord p} (k_\nu / \nu!)^{1/|\nu|}.$$

Применяя формулу Лейбница и свойства g имеем

$$\sum_{|\alpha|=j} \|(P^{(\alpha)}(D)u) g_\delta\|_{L_2} (k'\delta)^{|\alpha|}$$
$$\le \sum_{|\alpha|=j} \|(P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\|_{L_2} (k'\delta)^{|\alpha|} + \sum_{|\alpha|=j} \sum_{\beta \ne 0} \| \frac{(P^{(\alpha+\beta)}(D)u) D^\beta g_\delta\|_{L_2}}{\beta!} (k'\delta)^{(\alpha)}$$
$$\le \sum_{|\alpha|=j} \|P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\|_{L_2} (k'\delta)^{(\alpha)} + \sum_{|\alpha|=j} \sum_{\beta \ne 0} \|(P^{(\alpha+\beta)}(D)u) g_\delta\|_{L_2} (k'\delta)^{|\alpha+\beta|}$$
$$\le \sum_{|\alpha|=j} \|P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\|_{L_2} (k'\delta)^{|\alpha|} + C_3 \sum_{\Gamma=j+1}^{ord\ p} \sum_{|\gamma|=\Gamma} \|(P^{(\gamma)}(D)u) g_\delta\|_{L_2} (k'\delta)^{\Gamma}, \tag{19}$$

где

$$C_3 = C_3(P) = card\, \Omega(\gamma) \equiv card\{(\alpha, \beta) : \alpha + \beta = \gamma,\ |\alpha| = j\}.$$

Поэтому в силу леммы 1.2 работы [4]

$$\sum_{\alpha \ne 0} \left\| (P^{(\alpha)}(D)u) g_\delta \right\|_{L_2} (k'\delta)^{|\alpha|}$$
$$\le \sum_{|\alpha| \ne 0} ((1 + C_3) k'\delta)^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta) \right\|_{L_2}. \tag{20}$$

Из оценок (18)–(20), в силу (17) следует, что

$$\sum_{\alpha} \rho^{(\alpha)} \left\| P^{(\alpha)}(\xi) F(ug_\delta) \right\|_{L_2} \le \mathcal{H} C_2 \Bigg\{ \|(P(D)u) g_\delta\|_{L_2}$$
$$+ \sum_{\alpha \ne 0} ((1 + C_3) k'\delta)^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta) \right\|_{L_2} \Bigg\} + \rho^{ord p} C_2 \|ug_\delta\|$$

при всех $u \in W_\delta^\infty$. Взяв здесь

$$\rho = \max\left\{2,\ \sqrt{2(1+C_3)}k'\delta \max\{1, (\mathcal{H}C_2)\}\right\},$$

непосредственно получим оценку (15). Лемма доказана.

Следствие 2. (i) *Если оператор P гипоэллиптичен и $f \in L_{2,\delta}$ при $\delta > 0$, то любое решение u уравнения $P(D)u = f$ из $L_{2,\delta}$ принадлежит*

$$W(\widetilde{P},\delta) \equiv \left\{u:\ u \in L_{2,\delta},\ \sum_\alpha \left\|\left(P^{(\alpha)}(D)u\right)g_\delta\right\|_{L_2} < \infty\right\}.$$

(ii) *Если оператор P почти гипоэллиптичен, $\delta \in (0,\Delta(P))$ и $f \in L_{2,\delta}$, то любое решение u уравнения $P(D)u = f$ принадлежит $W(\widetilde{P},\delta)$.*

Доказательство. (i) и (ii) непосредственно следуют из оценок (15) и (14) соответственно.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 2. *Если оператор P гипоэллиптичен, то для любого $\delta > 0$, $N(P,\delta) = W_\delta^\infty$.*

Доказательство. Так как очевидно $W_\delta^\infty \subset N(P,\delta)$, то достаточно показать, что $N(P,\delta) \subset W_\delta^\infty$, $\delta > 0$. Заметим, что в силу теоремы работы [2] $N(P,\delta) \subset C^\infty$ для любого $\delta > 0$. Покажем, что для любого натурального m $N(P,\delta) \subset W_\delta^m$. Доказательство проведем по индукции относительно m.

Из условия гипоэллиптичности и теоремы Зайденберга–Тарского (см., например, [2]), существуют числа $a > 0$ и $A > 0$ такие, что

$$1 + |P(\xi)| \ge A(1 + |\xi|^a), \quad \xi \in R^n. \tag{21}$$

Ради простоты записи, будем считать, что $a \ge 1$. Из оценки имеем (15)

$$\sum_{i=1}^n \|D_i(ug_\delta)\|_{L_2} \le \frac{C}{A}\|(P(D)u)g_\delta\|_{L_2} + \frac{C_1}{A}\|ug_\delta\|_{L_2} \tag{22}$$

для любого $\delta > 0$ и $u \in N(P,\delta)$ $(\subset W(P,\delta))$, т.е. $N(P,\delta) \subset W_\delta^1$ при всех $\delta > 0$.

Пусть $N(P,\delta) \subset W_\delta^{m-1}$, $m \ge 2$. Покажем, что $N(P,\delta) \subset W_\delta^m$ при всех $\delta > 0$. Пусть $\alpha \in N_0^n$ – любой мультииндекс длины $m-1$. Так как P гипоэллиптичен, то $V = D^\alpha u \in N(P,\delta)$ при $u \in N(P,\delta)$. Поэтому в силу оценки (22)

$$\sum_{i=1}^n \|D_i((D^\alpha u)g_\delta)\|_{L_2} \le \frac{C}{A}\|(P(D)D^\alpha u)g_\delta\|_{L_2} + \frac{C_1}{A}\|(D^\alpha u)g_\delta\|_{L_2},$$

где $\|(P(D)D^{\alpha}u)g_{\delta}\|_{L_2} < \infty$, поскольку $u \in N(P,\delta)$. С другой стороны, в силу предположения индукции, так как $|\alpha| = m-1$, то $\|(D^{\alpha}u)g_{\delta}\|_{L_2} < \infty$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i((D^{\alpha}u)g_{\delta})\|_{L_2} < \infty$$

для любого $\alpha \in N_0^n$, $|\alpha| = m-1$. Отсюда, в силу формулы Лейбница имеем

$$+\infty > \sum_{i=1}^{n} \|D_i((D^{\alpha}u)g)\delta)\|_{L_2} \geq \sum_{i=1}^{n} \|(D_iD^{\alpha}u)g_{\delta}\|_{L_2} - k'\delta n\|(D^{\alpha}u)g_{\delta}\|_{L_2}.$$

Так как в силу предположения индукции $\|(D^{\alpha}u)g_{\delta}\|_{L_2} < \infty$, то отсюда получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \|(D_iD^{\alpha}u)g_{\delta}\|_{L_2} < \infty.$$

Так как $\alpha \in N_0^n$ – произвольный мультииндекс длины $m-1$, то отсюда получаем, что $u \in W_{\delta}^{m}$, и $u \in \bigcap_m W_{\delta}^{m} = W_{\delta}^{\infty}$.

Следствие 3. *Оператор $P(D)$ гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда $N(P,\delta) = W_{\delta}^{\infty}$ для любого $\delta > 0$.*

Доказательство непосредственно следует из теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Если оператор $P \in I_n$ почти гипоэллиптичен, то существует число число $\Delta(P) > 0$ такое, что $N(P,\delta) = W_{\delta}^{\infty}$ при всех $\delta \in (0,\Delta(P))$.*

Доказательство. Пусть m – любое фиксированное натуральное число. Так как, очевидно, $W_{\delta}^{\infty} \subset N(P,\delta)$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что $N(P,\delta) \subset W_{\delta}^{m}$ при $\delta \in (0,\Delta(P))$. Так как $P \in I_n$, то в силу теоремы Зайденберга–Тарского при некоторых постоянных $a, A > 0$ выполняется оценка (21). Ради простоты записи будем считать, что $a \geq 1$. Тогда из оценки (14) при всех $u \in N(P,\delta)$ и $\delta \in (0,\Delta(P))$ имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \|D_j(ug_{\delta})\|_{L_2} \leq C\big[\|(P(D)u)g_{\delta}\|_{L_2} + \|ug_{\delta}\|_{L_2}\big]. \tag{23}$$

Пусть $\phi \in C_0^{\infty}(s_1)$, $\int \phi dx = 1$ и $\phi_{\epsilon}(x) = \epsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\epsilon})$ для любого $\epsilon > 0$, тогда в силу леммы 2.2 работы [4] $u_{\epsilon} \equiv u * \phi_{\epsilon} \in W_{\delta}^{\infty}$ и

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \|u_{\epsilon} - u\|_{L_{2,\delta}} = 0.$$

Покажем, что при любом $\epsilon \in (0,1)$ функция $\{u_{\epsilon}\}$ равномерно ограничена в W_{δ}^{r} для любого натурального r. Так как $u \in N(P,\delta)$, то для любого натурального m

существует постоянная $C_m > 0$ такая, что

(24) $$\|(P(D)u_\epsilon)\|_{W^m_\delta} = \|(P(D)u)_\epsilon\|_{W^m_\delta} \le C_m \|(P(D)u)\|_{W^m_\delta}.$$

На самом деле, для любого $v \in W^m_\delta$ в силу свойств функции g, используя неравенство Юнга и условие

$$g_\delta \le k^2 e^{\epsilon\delta} g_\delta(x-y), \quad \forall x \in E^n, \quad |y| \le \epsilon \quad (y \in supp\, \phi_\epsilon),$$

имеем

$$\|v_\epsilon\|_{W^m_\delta} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha(v * \phi_\epsilon)\cdot g_\delta\|_{L_2} = \sum_{|\alpha|\le m} \|((D^\alpha v) * \phi_\epsilon)\cdot g_\delta\|_{L_2}$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} \left\{ \int \left(\left| \int D^\alpha v(x-y)\phi_\epsilon(y)dy \right| g_\delta(x) \right)^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\le k^2 e^\delta \sum_{|\alpha|\le m} \left\{ \int \left| \int (D^\alpha v(x-y)) g_\delta(x-y)\phi_\epsilon(y)dy \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\le k^2 e\epsilon\delta \|v\|_{W^m_\delta} \|\phi_\epsilon\|_{L_2} = k^2 e^\delta \|v\|_{W^m_\delta}.$$

Равномерную ограниченность $\{u_\epsilon\}$, $\epsilon \in (0,1)$ в W^r_δ докажем по индукции по r. Равномерная ограниченность $\{u_\epsilon\}$, $\epsilon \in (0,1)$, в W^1_δ непосредственно следует из неравенств (23) и (24) когда $m = 0$, так как в силу этих оценок

(25) $$\sum_{j=1}^n \|D_j(u_\epsilon g_\delta)\|_{L_2} \le C\big[\|(P(D)u_\epsilon)g_\delta\|_{L_2} + \|u_\epsilon g_\delta\|_{L_2}\big]$$

$$= C\big[\|(P(D)u)_\epsilon g_\delta\|_{L_2} + \|u_\epsilon g_\delta\|_{L_2}\big] \le C\big(C_1\|P(D)u\|_{L_{2,\delta}} + \|u\|_{L_{2,\delta}}\big), \quad j = 1,\dots,n.$$

Предположим, что множество $\{u_\epsilon\}$, $\epsilon \in (0,1)$ при $u \in N(P,\delta)$, $\delta > 0$ равномерно ограничено в W^l_δ когда $l \le r$. Докажем его равномерную ограниченность в W^{r+1}_δ. Пусть $\alpha \in N^n_0$ – любой мультииндекс длины r. Тогда, так как $D^\beta u_\epsilon = (D^\beta u)_\epsilon$ при $D^\beta u \in L_{2,loc}$, то в силу оценок (23) и (24) при $m = r$ имеем

$$\|D_j[(D^\alpha u_\epsilon)g_\delta]\|_{L_2} \le C[\|(P(D)(D^\alpha u)_\epsilon g_\delta]\|_{L_2} + \|(D^\alpha u)_\epsilon g_\delta\|_{L_2}]$$

$$= C\big[\|(D^\alpha(P(D)u)_\epsilon g_\delta\|_{L_2} + \|(D^\alpha u)_\epsilon g_\delta\|_{L_2}\big]$$

$$\le C\big[\|P(D)u\|_{W^r_\delta} + \|u\|_{W^r_\delta}\big] < +\infty.$$

Так как $\alpha \in N^n_0$ – любой мультииндекс длины r, то отсюда в силу эквивалентности норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ получаем, что

$$\|D_j D^\alpha u_\epsilon\|_{L_{2,\delta}} \le const < \infty, \quad \epsilon \in (0,1),$$

т.е. множество u_ϵ, $\epsilon \in (0,1)$ равномерно ограничено в W_δ^m.

Пусть $u \in N(P,\delta)$. Покажем, что для любого натурального m

$$\lim_{\epsilon\to 0, \rho\to 0+} \|u_\epsilon - u_\rho\|_{W_\delta^m} = 0. \tag{26}$$

Доказательство проведем по индукции относительно m. Для $m = 1$ из оценки (25) имеем

$$\sum_{j=1}^{m} \|D_j((u_\epsilon - u_\rho)g_\delta)\|_{L_2} \le C\big[\, \|(P(D)(u_\epsilon - u_\rho)g_\delta\|_{L_2} + \|(u_\epsilon - u_\rho)g_\delta\|_{L_2}\big]$$

$$\le C\big[\, \|[(P(D)u)_\epsilon - (P(D)u)_\rho]g_\delta\|_{L_2} + \|((P(D)u)_\rho - P(D)u)g_\delta\|_{L_2}$$

$$+ \|(u_\epsilon - u)g_\delta\| + \|(u_\rho - u)g_\delta\|_{L_2}\big]. \tag{27}$$

Так как для любого $v \in L_{2,\delta}$

$$\|(v_\epsilon - v)g_\delta\| \to 0 \quad \text{при} \quad \epsilon \to 0+ \tag{28}$$

(см соотношение (2.5) работы [4]), то получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \|D_j((u_\epsilon - u_\rho)g_\delta)\|_{L_2} \to 0 \quad \text{при} \quad \epsilon \to 0+, \quad \rho \to 0+\,.$$

Так как нормы $\|\cdot\|'_{W_\delta^m}$ и $\|\cdot\|''_{W_\delta^m}$ эквивалентны, то отсюда получаем

$$\|(Du_\epsilon)g_\delta - (Du_\rho)g_\delta\|_{L_2} \to 0, \quad \text{при} \quad \epsilon, \rho \to 0+$$

. Пусть соотношение (26) верно при $m \le k-1$ $(k \ge 2)$, докажем его при $m = k$. В силу оценки (25)

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k-1} \big\|D_j\,[(D^\alpha u_\epsilon - D^\alpha u_\rho)g_\delta]\,\big\|_{L_2} \tag{29}$$

$$\le C\left[\sum_{|\alpha|=k-1} \|(P(D)(D^\alpha u_\epsilon - D^\alpha u_\rho))g_\delta\|_{L_2} + \sum_{|\alpha|=k-1} \|(D^\alpha u_\epsilon - D^\alpha u_\rho)g_\delta\|_{L_2}\right].$$

Второе слагаемое правой части оценки (29) при $\epsilon, \rho \to 0+$ стремится к нулю в силу индукционного предположения. Для первого слагаемого правой части оценки (29) имеем в силу (28)

$$\sum_{|\alpha|=k-1} \|(P(D)((D^\alpha u_\epsilon) - (D^\alpha u_\rho)))g_\delta\|_{L_2}$$

$$= \sum_{|\alpha|=k-1} \|((D^\alpha P(D)u)_\epsilon - (D^\alpha P(D)u)_\rho)g_\delta\|_{L_2} \to 0$$

при $\epsilon, \rho \to 0+$, так как из условия $u \in N(p, \delta)$ следует, что $D^\alpha P(D)u \equiv v \in L_{2,\delta}$. Так как нормы $\|\cdot\|'_{W^k_\delta}$ и $\|\cdot\|''_{W^k_\delta}$ эквивалентны, то из (13) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k-1} \|(D_j D^\alpha u_\epsilon - D_j D^\alpha u_\rho)g_\delta\|_{L_2} \to 0 \quad \text{при} \quad \epsilon, \rho \to 0+$$

таким образом соотношение (26) верно для любого m.

Так как W^m_δ – пространство Банаха и обобщенный дифференциальный оператор замкнут, то из соотношения (11) и из того, что $\|u_\epsilon - u\|_{L_{2,\delta}} \to 0$ $(\epsilon \to 0+)$ непосредственно следует, что существует обобщенная производная $D^\alpha u$ при $|\alpha| \leq m$ и $u \in W^m_\delta$. Так как число $m \in N$ – произвольное, то отсюда непосредственно получаем, что $u \in W^\infty_\delta$, следовательно, $N(P, \delta) \subset W^\infty_\delta$ при всех $\delta \in (0, \Delta(P))$.

Следствие 4. *Для того, чтобы при некотором $\delta > 0$ $N(P, \delta) = W^\infty_\delta$ необходимо и достаточно, чтобы оператор P был почти гипоэллиптическим.*

Доказательство непосредственно следует из теорем 2 и 1.

Abstract. A linear differential operator $P(D) = P(D_1, \ldots, D_n)$ with constant coefficients is called almost hypoelliptic if all the derivatives $D^\alpha P$ of the characteristic polynomial $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ can be estimated by P. The paper proves that if P is an almost hypoelliptic operator, $P(\xi) \to \infty$ as $\xi \to \infty$ and f is an infinitely differentiable function, square-summable with a definite exponential weight, then any square summable with the same weight solution u of the equation $P(D)u = f$ is again an infinitely differentiable function.

Список литературы

[1] В. И. Буренков, “Аналог теоремы Хермандера о гипоэллиптичности для функций, стремящихся к нулю в бсконечности” *Сборник докладов 7-ого Советско–Чехословацкого семинара*, 63-67 (1982).

[2] L. Hoermander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol. 2 (Springer-Verlag, 1983).
[3] Г. Г. Казарян, "О почти гипоэллиптических полиномах" Докл. РАН **398** (6), 701-703 (2004).
[4] Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян, "Об одном классе почти гипоэллиптических операторов", Изв. НАН Армении, Математика, **41** (6), 39-56 (2007).
[5] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения* (Наука, Москва, 1996).

Поступила 25 июня 2008