

ПРЯМОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. Г. ДАЛАЛЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: dalalyan@ysu.am

Аннотация. В настоящей статье представлено прямое доказательство следующего результата: для любого линейного оператора, определенного над произвольным полем, найдется базис, в котором он имеет поликвазициклическую матрицу, т. е. обобщенную жорданову форму второго рода. Поликвазициклическая форма линейного оператора единственным образом определяется с точностью до порядка прямых слагаемых по диагонали. Показано, что обобщенная жорданова форма второго рода является связью, которая связывает классическую жорданову форму с рациональной канонической формой.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основной целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1 (Теорема о квазициклическом максимальном разложении (ТКМР)). Пусть $\mathbf{k}$ – произвольное поле, L – конечномерное линейное пространство над $\mathbf{k}$, $\mathcal{A}$ – линейный оператор на L , $m_{\mathcal{A}}(t)$ – минимальный полином оператора $\mathcal{A}$ и $m_{\mathcal{A}}(t) = p_1^{\mu_1}(t) \dots p_l^{\mu_l}(t)$ – (унитарное) неприводимое разложение $m_{\mathcal{A}}(t)$ над полем $\mathbf{k}$.

Тогда найдется базис $\mathbf{e}$ в L такой, что матрица $A_{\mathbf{e}}$ оператора $\mathcal{A}$ в $\mathbf{e}$ есть прямая сумма неразложимых матриц

$$(1) \quad P = (\oplus_{ij} P_{1ij}) \oplus \dots \oplus (\oplus_{ij} P_{lij}),$$

где каждая матрица P_{kij} ($k = 1, \dots, l$; $i = \mu_k, \dots, 1$; $j = 1, \dots, n_{ki} - n_{k(i+1)}$) – квазициклическая матрица с i сопровождающей матрицей $[p_k(t)]$ на диагонали, а j параметризует все такие блоки. Здесь

$$n_{ki} = \dim_{K_k} (L_{ki}/L_{k(i-1)}), \quad L_{ki} = \ker (p_k(\mathcal{A})^i), \quad K_k = \mathbf{k}[t]/p_k(t)$$

при $i = 1, \dots, \mu_k$ и $n_{k(\mu_k+1)} = 0$.

Любые два таких представления различаются только порядками прямых слагаемых. Таким образом, система, состоящая из:

- (а) всех (унитарных) неприводимых делителей $p_k(t)$ минимального полинома $m_A(t)$,
- (б) кратностей μ_k этих делителей,
- (в) размерностей n_{ki} для каждого $k = 1, \dots, l$ и $i = 1, \dots, \mu_k$

является полной системой инвариантов оператора A .

Матрица (1) называется *обобщенной жордановой формой второго рода* линейного оператора A . Разложение (1) является *максимальным* в том смысле, что все P_{kij} – неразложимы. В утверждении вышеупомянутой теоремы $[p(t)]$ обозначает *сопровождающую матрицу* полинома $p(t)$, а определение квазициклических матриц дано в параграфе 5. Подчеркнем, что ТКМР дает как разложение произвольного линейного оператора в прямою сумму неразложимых линейных операторов, так и подходящую (а именно, квазициклическую) форму для этих неразложимых операторов.

Теория различных нормальных (канонических) форм для линейных операторов на конечномерных линейных (векторных) пространствах изучалась еще Вейерштрассом [11] и Жорданом [6] (см. Исторический очерк к Главам VI и VII работы [2]). В настоящее время, эта теория составляет важную часть линейной алгебры и излагается в любом учебнике по линейной алгебре. Для ссылок на использованные в этой статье понятия и результаты мы отсылаем к книге [5].

В случае, когда основное поле $\mathbf{k}$ является алгебраически замкнутым или, более обще, характеристический полином (или, что равносильно, минимальный полином) оператора A имеет только линейные неприводимые делители, ТКМР дает хорошо известную жорданову форму (см. [5], Глава 7.3). Обратно, ТКМР может быть получена из теоремы Жордана переходом к алгебраическому замыканию поля $\mathbf{k}$ [4].

В настоящей статье дается прямое доказательство ТКМР. Центральная идея, используемая в статье, заключается в том, что в качестве собственных значений оператора A на L рассматриваются точки $\text{Spec } \mathbf{k}[t]$ (т.е. множества простых идеалов $(p(t))$ кольца $\mathbf{k}[t]$), удовлетворяющих условию $p(A)(x) = 0$ для некоторого ненулевого $x \in L$. При этом $\text{Spec}_{\mathbf{k}} A$ определяется как множество всех характеристических значений оператора A над $\mathbf{k}$. Очевидно, что $\text{Spec } \mathbf{k}[t] = \mathbf{k}$,

если $\mathbf{k}$ – алгебраически замкнутое поле, или, более обще, $\text{Spec}_{\mathbf{k}} \mathcal{A} \subset \mathbf{k}$, если все неприводимые делители $m_{\mathcal{A}}(t)$ линейны.

В параграфе 2 вводятся некоторые используемые в статье обозначения и упоминается теорема о примарном разложении (см. [5], Глава 6.8). Параграфы 3–5 посвящены доказательству ТКМР для простых операторов (теорема 3 параграфа 5). Сформулированная выше общая ТКМР непосредственно следует из этих двух теорем. В качестве применения ТКМП, в параграфе 6 приводятся некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы линейные операторы были двух специальных типов: диагонализируемые или циклические операторы. В параграфе 7, с помощью разложения (1) (ре)конструируется *рациональная каноническая форма* линейного оператора (см. [5], глава 7.2).

Подчеркнем, что существуют некоторые другие канонические формы в специальных случаях. С помощью процедуры комплексификации Постников [10] получил каноническую форму для некоторых вещественных линейных операторов, в общем случае аналогичный результат получен в работе [4]. Эта каноническая форма имеет на диагонали блоки, которые являются матричным представлением

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

комплексного числа $a + bi$, являющегося характеристическим значением для рассматриваемого вещественного линейного оператора.

Мальцев [8] построил *обобщенную жорданову форму* для любого линейного оператора, которая определена над подполем поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Назовем эту форму *обобщенной жордановой формой первого рода*.

Единственное различие между обобщенными жордановыми формами первого и второго родов состоит в том, что в квазициклических матрицах (см. определение 5 в параграфе 5) вместо блоков F используются единичные матрицы E .

В работе [3] доказывается, что для линейного оператора $\mathcal{A}$ существует обобщенная жорданова форма первого рода, если характеристический полином оператора $\mathcal{A}$ сепарабелен над основным полем $\mathbf{k}$.

Существуют линейные операторы с несепарабельным характеристическим полиномом, которые не приводимы к обобщенной жордановой форме первого рода: например, линейный оператор, представленный сопровождающей матрицей $[t^4 + u^2]$, определенной над полем $\mathbb{F}_2(u)$.

Следующая задача остается открытой: описать все обобщенные жордановы матрицы второго рода, которые подобны обобщенным жордановым матрицам первого рода. Заметим, что определяя рациональную каноническую форму и жорданову форму, М. Артин [1] (стр. 479-480) пишет: “Жорданова форма более красивая, чем рациональная каноническая форма, ...но [последняя] является лучшей формой, пригодной в случае произвольного поля”.

Введенная поликвазициклическая форма (1) линейного оператора также пригодна в случае произвольного поля, и из этой формы можно получить и жорданову, и рациональную каноническую формы. Таким образом, обобщенная Жорданова форма второго рода связывает классическую жорданову форму и рациональную каноническую форму. Другие известные канонические формы для специальных линейных операторов, т.е. формы Постникова и Мальцева, также можно получить из поликвазициклической формы. Заметим, что ТКМП можно вывести из рационального разложения линейного оператора (матрицы). Но само доказательство теоремы о рациональном разложении (см., например, [9], параграф 3.29.3) длинное и не геометрическое.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ПРЯМУЮ СУММУ ПРОСТЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $\mathbf{k}$ – произвольное поле, L – линейное пространство над $\mathbf{k}$, $\text{End}_{\mathbf{k}} L$ – $\mathbf{k}$ -алгебра линейных операторов на L и $\mathbf{k}[t]$ – кольцо полиномов с коэффициентами в $\mathbf{k}$, т.е свободная $\mathbf{k}$ -алгебра, порожденная элементом t . Тогда для любого $\mathcal{A} \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$ существует стандартный гомоморфизм $\mathbf{k}$ -алгебр

$$\sigma_{\mathcal{A}} : \mathbf{k}[t] \rightarrow \text{End}_{\mathbf{k}} L \quad | \quad f(t) \mapsto f(\mathcal{A}).$$

Образ $\sigma_{\mathcal{A}}$ является коммутативной подалгеброй в $\text{End}_{\mathbf{k}} L$, порожденной $\mathcal{A}$ (которую будем обозначать через $\mathbf{k}[\mathcal{A}]$), и ядро $\sigma_{\mathcal{A}}$ есть идеал $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ кольца $\mathbf{k}[t]$.

Предложение 1. *Если $\dim_{\mathbf{k}} L < \infty$, то $\mathcal{I}_{\mathcal{A}} \neq 0$.*

Доказательство. Зафиксируем базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на L и заметим, что для любого базисного вектора e_i существует целое число d_i такое, что:

- 1) система векторов $e_i, \mathcal{A}(e_i), \mathcal{A}^2(e_i), \dots, \mathcal{A}^{d_i-1}(e_i)$ линейно независима,
- 2) существует (унитарный) полином $f_i(t) \in \mathbf{k}[t]$ степени $\deg f_i = d_i$, такой, что $f_i(\mathcal{A}) = 0$.

Пусть $f(t) = f_1(t) \dots f_n(t)$. Тогда $f(t) \neq 0$ и $f(t) \in \mathcal{I}_A$, так как

$$f(\mathcal{A})(x) = x^1 \frac{f(\mathcal{A})}{f_1(\mathcal{A})} f_1(\mathcal{A})(e_1) + \dots + x^n \frac{f(\mathcal{A})}{f_n(\mathcal{A})} f_n(\mathcal{A})(e_n) = 0$$

для любого $x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n \in L$. Это завершает доказательство.

Так как $\mathbf{k}[t]$ – кольцо главных идеалов, то существует единственный унитарный полином $m_A(t)$, порождающий $\mathcal{I}_A$, названный *минимальным полиномом оператора $\mathcal{A}$* . Таким образом, имеем изоморфизм $\mathbf{k}$ -алгебр $\mathbf{k}[\mathcal{A}] \cong \mathbf{k}[t]/(m_A(t))$.

Полиномы $f(t) \in \mathbf{k}[t]$ действуют на векторах $x \in L$ следующим образом $f(t)x = f(\mathcal{A})(x)$. Множество всех простых идеалов $\mathbf{k}[t]$ совпадает с множеством всех максимальных идеалов $\mathbf{k}[t]$ и биективно множеству всех унитарных неприводимых полиномов $\mathbf{k}[t]$. Эти множества образуют $\text{Спец } \mathbf{k}[t]$.

Определение 1. Если $p(t) \in \text{Спец } \mathbf{k}[t]$, $x \in L^* = L - \{0\}$ и $p(\mathcal{A})(x) = 0$, то x называется *характеристическим вектором $\mathcal{A}$* , а $p(t)$, соответствующим x – *характеристическим значением оператора $\mathcal{A}$* . Множество всех характеристических значений $\mathcal{A}$ образует спектр $\text{Спец}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$.

Предложение 2. $\text{Спец}(\mathcal{A})$ есть множество всех унитарных неприводимых делителей $m_A(t)$. Другими словами, если

$$m_A(t) = p_1^{\mu_1}(t) \dots p_l^{\mu_l}(t)$$

есть (унитарное) неприводимое разложение $m_A(t)$ над $\mathbf{k}$, то

$$\text{Спец}(\mathcal{A}) = \{p_1(t), \dots, p_l(t)\}.$$

Доказательство: Согласно определению минимального полинома, для любого $x \in L$

$$m_A(\mathcal{A})(x) = (p_1(\mathcal{A})^{\mu_1} \dots p_l(\mathcal{A})^{\mu_l})(x) = 0,$$

и для любого $i = 1, \dots, l$ существует $x_i \in L$ такое, что

$$y_i = (p_1(\mathcal{A})^{\mu_1} \dots p_l(\mathcal{A})^{\mu_l} / p_i(\mathcal{A})^{\mu_i})(x_i) \neq 0.$$

Тогда $p_i(\mathcal{A})^{\mu_i}(y_i) = 0$. Следовательно, существуют $s_i \in \{1, \dots, \mu_i\}$, удовлетворяющие условию

$$z_i = p_i(\mathcal{A})^{s_i-1}(y_i) \neq 0, \quad p_i(\mathcal{A})^{s_i}(z_i) = 0.$$

Поэтому $p_i(t) \in \text{Спец}(\mathcal{A})$.

Обратно, предположим, что унитарный полином $p(t)$, неприводимый над $\mathbf{k}$, принадлежит $\text{Спец}(\mathcal{A})$. Если $p(t) \neq p_i(t)$ для всех $i = 1, \dots, l$, то $p(t)$ взаимно простой к $m_A(t)$. Откуда получаем, что существуют некоторые полиномы

$u(t), v(t) \in \mathbf{k}[t]$ такие, что

$$u(t)p(t) + v(t)m_{\mathcal{A}}(t) = 1.$$

В частности,

$$u(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + v(\mathcal{A})m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = id_L.$$

Из $p(t) \in \text{Spec}(\mathcal{A})$ следует, что существует ненулевое $x \in L$, для которого имеет место $p(\mathcal{A})(x) = 0$. Тогда

$$x = id_L(x) = u(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(x) + v(\mathcal{A})m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(x) = u(\mathcal{A})(0) + v(\mathcal{A})(0) = 0.$$

Это противоречие завершает доказательство.

Определение 2. Пусть $p(t) \in \text{Spec } \mathbf{k}[t]$. Линейный оператор $\mathcal{A}$ на L называется $p(t)$ -примарным, если имеют место следующие эквивалентные условия:

- (i) $m_{\mathcal{A}}(t) = p(t)^\mu$ для некоторого натурального числа μ ,
- (ii) $\text{Spec } \mathcal{A} = \{p(t)\}$,
- (iii) $p(\mathcal{A})^\mu(x) = 0$ для некоторого натурального числа μ и для всех $x \in L$.

Единственным образом определенное натуральное число μ , для которого имеет место $m_{\mathcal{A}}(t) = p(t)^\mu$, называется высотой $p(t)$ -примарного оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 2 (Теорема о примарном разложении ([5], Глава 6.8)). Пусть $\mathcal{A} \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$ и

$$m_{\mathcal{A}}(t) = p_1^{\mu_1}(t) \dots p_l^{\mu_l}(t)$$

– (унитарное) неприводимое разложение $m_{\mathcal{A}}(t)$ над $\mathbf{k}$, $L_k = \ker p_k(\mathcal{A})^{\mu_k}$ – ядро $p_k(\mathcal{A})^{\mu_k}$ и $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}|_{L_k}$ – сужение $\mathcal{A}$ на L_k ($k = 1, \dots, l$).

Тогда каждый оператор $\mathcal{A}_k$ является $p_k(t)$ -примарным оператором и

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_l.$$

Обратно, если в этом прямом разложении каждое слагаемое $\mathcal{A}_k$ является $p_k(t)$ -примарным оператором высоты μ_k ($k = 1, \dots, l$), то имеет место представление

$$m_{\mathcal{A}}(t) = p_1^{\mu_1}(t) \dots p_l^{\mu_l}(t).$$

Следовательно, примарное разложение оператора $\mathcal{A} \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$ является единственным с точностью до порядка прямых слагаемых.

Определение 3. $\mathbf{k}$ -линейный оператор $\mathcal{A}$ называется неразложимым над полем $\mathbf{k}$, если невозможно представить $\mathcal{A}$ в виде прямой суммы ненулевых $\mathbf{k}$ -линейных операторов.

Вообще говоря, слагаемые $\mathcal{A}_k$ в примарном разложении линейного оператора $\mathcal{A}$ не являются неразложимыми. В последующих трех параграфах мы докажем, что каждый примарный оператор $\mathcal{A}_k$ можно разложить в прямую сумму неразложимых операторов.

3. ЦЕПОЧКИ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ СВЯЗАННЫЕ С ПРИМАРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Предположим, что $\mathcal{A} \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$ — $p(t)$ -примарный оператор высоты μ , где $p(t)$ — (унитарный) неприводимый полином над $\mathbf{k}$, т.е. $m_{\mathcal{A}}(t) = p(t)^\mu$. Заметим, что это означает, что

$$p(\mathcal{A})^\mu(L) = 0 \quad \text{но} \quad p(\mathcal{A})^{\mu-1}(L) \neq 0.$$

Положим $L_i = \ker p(\mathcal{A})^i$ и рассмотрим цепочку невозрастающих подпространств

$$(2) \quad L = L_\mu \supset L_{\mu-1} \supset \dots \supset L_1 \supset L_0 = \{0\}.$$

Это приводит к цепочке $\mathbf{k}$ -линейных отображений

$$(3) \quad L = L_\mu \rightarrow L_{\mu-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 = \{0\},$$

где $x \in L_i$ отображается в $p(\mathcal{A})(x) \in L_{i-1}$, и к индуцированной цепочке

$$(4) \quad L_\mu/L_{\mu-1} \rightarrow L_{\mu-1}/L_{\mu-2} \rightarrow \dots \rightarrow L_1/L_0 = L_1,$$

где $x + L_i \in L_{i+1}/L_i$ отображается в $p(\mathcal{A})(x) + L_{i-1} \in L_i/L_{i-1}$. Последнее отображение определено корректно, поскольку

$$\begin{aligned} x + L_i = y + L_i &\Rightarrow x - y \in L_i \Rightarrow p(\mathcal{A})(x) - p(\mathcal{A})(y) = p(\mathcal{A})(x - y) \in L_{i-1} \\ &\Rightarrow p(\mathcal{A})(x) + L_{i-1} = p(\mathcal{A})(y) + L_{i-1}. \end{aligned}$$

Далее, можно рассмотреть каждое $\mathbf{k}$ -линейное пространство L_i/L_{i-1} как пространство над полем $K = \mathbf{k}[t]/(p(t))$, если произведение $f(t) + (p(t)) \in K$ и $x + L_{i-1} \in L_i/L_{i-1}$ определить формулой

$$(f(t) + (p(t)))(x + L_{i-1}) = f(\mathcal{A})(x) + L_{i-1}.$$

Эта операция также корректно определена, так как если

$$(5) \quad f(t) + (p(t)) = g(t) + (p(t)), \quad x + L_{i-1} = y + L_{i-1},$$

то

$$f(\mathcal{A})(x) + L_{i-1} = g(\mathcal{A})(y) + L_{i-1}.$$

Действительно, (5) означает, что

$$f(t) = g(t) + h(t)p(t), \quad h(t) \in \mathbf{k}[t], \quad x = y + z, \quad z \in L_{i-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(\mathcal{A})(x) + L_{i-1} &= (g(\mathcal{A}) + h(\mathcal{A})p(\mathcal{A}))(y + z) + L_{i-1} \\ &= g(\mathcal{A})(y) + (g(\mathcal{A})(z) + h(\mathcal{A})p(\mathcal{A}))(y + z) + L_{i-1} \\ &= g(\mathcal{A})(y) + L_{i-1}, \end{aligned}$$

в силу включения $(g(\mathcal{A})(z) + h(\mathcal{A})p(\mathcal{A}))(y + z) \in L_{i-1}$.

Каждое отображение цепочки (4) не только $\mathbf{k}$ -линейное, но также K -линейное. Действительно,

$$p(\mathcal{A})((f(t) + (p(t)))(x + L_i) = (f(t) + (p(t)))p(\mathcal{A})(x + L_i)$$

для всех $f(t) + (p(t)) \in K$, так как левая сторона равна $p(\mathcal{A})(f(\mathcal{A})(x)) + L_{i-1}$, правая сторона равна $f(\mathcal{A})(p(\mathcal{A})(x)) + L_{i-1}$, и операторы $f(\mathcal{A})$ и $p(\mathcal{A})$ коммутируют.

Лемма 1. *Все стрелки в цепочке (4) являются инъективными отображениями.*

Доказательство. Если

$$p(\mathcal{A})(x + \ker p(\mathcal{A})^i) = p(\mathcal{A})(x) + \ker p(\mathcal{A})^{i-1} = 0,$$

то $p(\mathcal{A})(x) \in \ker p(\mathcal{A})^{i-1}$. Следовательно,

$$p(\mathcal{A})^{i-1}(p(\mathcal{A})(x)) = p(\mathcal{A})^i(x) = 0,$$

и поэтому $x \in \ker p(\mathcal{A})^i$, т.е. $x + \ker p(\mathcal{A})^i = 0$.

Следствие 1. *Все стрелки в цепочке (4) отображают любую систему линейно независимых векторов (элементов) в систему линейно независимых векторов.*

Заметим, что утверждения леммы 1 и следствия 1 верны для линейных пространств как над полем $\mathbf{k}$, так и над K .

Следствие 2. *Имеем $n_{i+1} = \dim_K L_{i+1}/L_i \leq \dim_K L_i/L_{i-1} = n_i$.*

4. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИКВАЗИЦИКЛИЧЕСКОГО БАЗИСА ПРИМАРНОГО ОПЕРАТОРА

Для любого $e \in L$ и $L_0 < L$ положим $\bar{e} = e + L_0 \in L/L_0$ и выберем базис в цепочке фактор-пространств (4) над K следующим образом:

- 1) Зафиксируем произвольный базис $\bar{e}_{\mu 1}, \dots, \bar{e}_{\mu n_\mu}$ в $L_\mu/L_{\mu-1}$.
- 2) В каждом L_i/L_{i-1} ($i = \mu-1, \dots, 1$), к K -независимым векторам, являющимся образами базисных векторов L_{i+1}/L_i относительно K -линейного отображения $p(\mathcal{A})$, добавим векторы $\bar{e}_{i1}, \dots, \bar{e}_{i(n_i-n_{i+1})}$ так, чтобы получить систему, которая будет базисом K -линейного пространства L_i/L_{i-1} .

Положим $d = \deg p(t)$, $n_i = \dim L_i/L_{i-1}$ ($\mu \geq i \geq 1$) и $n_{\mu+1} = 0$ и обозначим через e_{ij} систему векторов (элементов)

$$e_{ij}, \mathcal{A}(e_{ij}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(e_{ij}); p(\mathcal{A})(e_{ij}), \mathcal{A}p(\mathcal{A})(e_{ij}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}p(\mathcal{A})(e_{ij}); \dots; \\ p(\mathcal{A})^{i-1}(e_{ij}), \mathcal{A}p(\mathcal{A})^{i-1}(e_{ij}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}p(\mathcal{A})^{i-1}(e_{ij}),$$

а через e систему, состоящую из всех векторов систем e_{ij} , где $i = \mu, \dots, 1$ и $j = 1, \dots, n_i - n_{i+1}$.

Лемма 2. Система e линейно независима над полем $\mathbf{k}$.

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i,j,r,s} a_{ijrs} \mathcal{A}^r p(\mathcal{A})^s(e_{ij}) = 0, \quad a_{ijrs} \in \mathbf{k}.$$

Можно переписать это равенство в виде

$$\sum_{i,j,s} f_{ijs}(\mathcal{A}) p(\mathcal{A})^s(e_{ij}) = 0,$$

где

$$f_{ijs}(t) = a_{ij0s} + a_{ij1s}t + \dots + a_{ij(d_1)s}t^{d-1},$$

или эквивалентно

$$(6) \quad \sum_{i,j,s} f_{ijs}(t) p(t)^s e_{ij} = 0.$$

Для фактор-пространства $L_\mu/L_{\mu-1}$ над K , из равенства (6) следует равенство

$$\sum_{j=1}^{n_\mu} \bar{f}_{\mu j 0}(t) \bar{e}_{\mu j} = 0.$$

Так как $\bar{e}_{\mu 1}, \dots, \bar{e}_{\mu n_\mu}$ — базис $L_\mu/L_{\mu-1}$, получим

$$\bar{f}_{\mu j 0}(t) = f_{\mu j 0}(t) + (p(t)) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n_\mu.$$

Отсюда $f_{\mu j 0} = 0$ в силу $\deg f_{\mu j 0}(t) < d = \deg p(t)$, и следовательно, $a_{\mu j r 0} = 0$ для всех j и r .

Подставляя эти значения $a_{\mu j r 0}$ в (4) для $L_{\mu-1}/L_{\mu-2}$, получим

$$\sum_{j=1}^{n_{\mu}} f_{\mu j 1}(t) \overline{p(t) e_{\mu j}} + \sum_{j=1}^{n_{\mu-1}} f_{(\mu-1) j 0}(t) \bar{e}_{(\mu-1) j} = 0.$$

Заметим, что

$$\overline{p(t) e_{\mu 1}}, \dots, \overline{p(t) e_{\mu n_{\mu}}}, \bar{e}_{(\mu-1) 1}, \dots, \bar{e}_{(\mu-1) n_{\mu-1}}$$

образовывает базис $L_{\mu-1}/L_{\mu-2}$, причем степени полиномов $f_{\mu j 1}(t)$ ($j = 1, \dots, n_{\mu}$) и $f_{(\mu-1) j 0}(t)$ ($j = 1, \dots, n_{\mu-1}$) меньше, чем d . Отсюда получаем, что все эти полиномы обращаются в нуль. Следовательно, $a_{\mu j r 1} = 0$ и $a_{(\mu-1) j r 0} = 0$ для всех j и r . Продолжая тем же образом, получим, что все $a_{i j r s} = 0$, откуда следует требуемое утверждение.

Предложение 3. Система $\mathbf{e}$ является базисом $\mathbf{k}$ -линейного пространства L .

Доказательство. Достаточно заметить, что число

$$\sum_{i=\mu}^1 d \cdot i \cdot (n_i - n_{i+1}) = \sum_{i=\mu}^1 d \cdot n_i$$

векторов системы $\mathbf{e}$ совпадает с

$$\dim_{\mathbf{k}} L = \sum_{i=\mu}^1 \dim_{\mathbf{k}} L_i / L_{i-1} = \sum_{i=\mu}^1 \dim_K L_i / L_{i-1} \cdot \dim_{\mathbf{k}} K = \sum_{i=\mu}^1 d \cdot n_i,$$

поскольку $\dim_{\mathbf{k}} K = \deg p(t) = d$ в виду $K = \mathbf{k}[t]/(p(t))$.

Определение 4. Базис $\mathbf{e}_{ij}$ $p(t)$ -примарного оператора $\mathcal{A}_{ij}$ называется $[p(t)]$ -квазициклическим; $\mathbf{a}$ называется $[p(t)]$ -поликвазициклическим базисом $p(t)$ -примарного оператора $\mathcal{A}$.

5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРИМАРНОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ПРЯМУЮ СУММУ НЕРАЗЛОЖИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $p(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_{d-1} t^{d-1}$ и

$$[p(t)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \dots & -p_{d-2} & -p_{d-1} \end{pmatrix}$$

— сопровождающая матрица $p(t)$.

Определение 5. $[p(t)]$ -квазициклическая матрица (относительной) степени i – это матрица вида

$$P = P([p(t)], i) = \begin{pmatrix} [p(t)] & F & \dots & 0 & 0 \\ 0 & [p(t)] & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [p(t)] & F \\ 0 & 0 & \dots & 0 & [p(t)] \end{pmatrix},$$

где число блоков $[p(t)]$ на диагонали равно i , а F – блок с 1 в левом нижнем углу и 0 в остальных местах.

Предложение 4. Для любого $i = \mu, \dots, 1$ и $j = 1, \dots, n_i - n_{i+1}$ подпространство L_{ij} , натянутое на вектора системы $\mathbf{e}_{ij}$, является $\mathcal{A}$ -инвариантным и ограничение A_{ij} оператора $\mathcal{A}$ на L_{ij} задается в квазициклическом базисе $\mathbf{e}_{ij}$ посредством $[p(t)]$ -квазициклической матрицы P_{ij} (относительной) степени i .

Доказательство. Утверждение следует из вида квазициклического базиса $\mathbf{e}_{ij}$.

Предложение 5. Для любого $p(t)$ -примарного линейного оператора $\mathcal{A}$ высоты μ существует базис $\mathbf{e}$ такой, что матрица $A_{\mathbf{e}}$ оператора $\mathcal{A}$ в $\mathbf{e}$ является $[p(t)]$ -поликвазициклической. Более точно, это – прямая сумма $[p(t)]$ -квазициклических матриц P_{ij} , где $i = \mu, \dots, 1$ и $j = 1, \dots, n_i - n_{i+1}$ для каждого i .

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из вида поликвазициклического базиса $\mathbf{e}$.

Заметим, что $[p(t)]$ -поликвазициклическая форма $p(t)$ -примарного оператора $\mathcal{A}$ определяется не единственным образом. Во-первых, переставляя базисные векторы, можно изменить порядок $[p(t)]$ -квазициклических блоков на диагонали, при этом $\mathcal{A}$ -инвариантные подпространства L_{ij} не меняются. Могут меняться и сами эти подпространства, если взять другие базисные векторы $\mathbf{e}_{ij}$. Тем не менее, справедливо следующее утверждение о единственности.

Предложение 6. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольный $[p(t)]$ -примарный линейный оператор на $L/\mathbf{k}$ высоты μ , $n_i = \dim L_i/L_{i-1}$ (см. (4)) и $P = \oplus_{i,j} P_{ij}$ – поликвазициклическая матрица $\mathcal{A}$ в некотором базисе $\mathbf{e}$. Здесь i – число блоков $[p(t)]$ на диагонали квазициклической матрицы P_{ij} , а j нумерует такие матрицы.

При этом $\max i = \mu$, и $j = 1, \dots, n_i - n_{i+1}$ для любого $i = \mu, \dots, 1$.

Доказательство. Имеем $m_P(t) = m_{\mathcal{A}}(t) = (p(t))^\mu$, откуда $\max i = \mu$. Базис $\mathbf{e}$ состоит из векторов системы $\mathbf{e}_{ij}$, где для любого $i = \mu, \dots, 1$ индекс j изменяется

от 1 до m_i . Следовательно, векторы $\bar{e}_{i1}, \dots, \bar{e}_{im_i}$ принадлежат L_i/L_{i-1} , но не $p(\mathcal{A})(L_{i+1}/L_i)$. Более того, они определяют базис $(L_i/L_{i-1})/(p(\mathcal{A})(L_{i+1}/L_i))$ над K . Поэтому,

$$\begin{aligned} m_i &= \dim_K(L_i/L_{i-1})/(p(\mathcal{A})(L_{i+1}/L_i)) \\ &= \dim_K(L_i/L_{i-1}) - \dim_K(L_{i+1}/L_i) = n_i - n_{i+1}, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение.

Следствие 3. *Поликвазициклическая форма $P = \oplus_{i,j} P_{ij} [p(t)]$ -примарного линейного оператора $\mathcal{A}$ единственным образом определяется с точностью до порядка квазициклических блоков на диагонали. Другими словами, высота μ и размерности $n_i = \dim_K L_i/L_{i-1}$ образуют полную систему инвариантов для $\mathcal{A}$.*

Следствие 4. *$[p(t)]$ -примарный линейный оператор $\mathcal{A}$ является неразложимым тогда и только тогда, когда его поликвазициклическая форма имеет одно слагаемое.*

Доказательство. Квазициклическая матрица представляет неразложимый оператор $\mathcal{A}$ в силу следствия 3. Необходимость очевидна.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3 (Теорема о квазициклическом максимальном разложении для примарных операторов). *Для любого $[p(t)]$ -примарного линейного оператора $\mathcal{A}$ на конечномерном линейном пространстве L/K , существует поликвазициклическая форма*

$$P = \oplus_{i,j} P_{ij},$$

которая единственна с точностью до порядка квазициклических матриц P_{ij} на диагонали. Здесь $i = \mu, \dots, 1$, где μ – высота $[p(t)]$ -примарного оператора $\mathcal{A}$, $j = 1, \dots, n_i - n_{i+1}$, где $n_i = \dim L_i/L_{i-1}$ и $L_i = \ker p(\mathcal{A})^i$.

Таким образом, $(p(t), \mu, n_\mu, \dots, n_1)$ – полная система инвариантов для $\mathcal{A}$.

6. ДВА ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ ПОЛЮСА: ДИАГОНАЛИЗИРУЕМЫЙ И ЦИКЛИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОРЫ

Определение 6. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется диагонализированным, если в некотором базисе он представим в виде прямой суммы сопровождающих матриц неприводимых полиномов, т.е. если все квазициклические блоки в его*

обобщенной жордановой форме второго рода имеют относительную степень один.

Определение 7. Спектр $\text{Спек}(\mathcal{A})$ называется простым, если кратности всех неприводимых делителей характеристического полинома линейного оператора $\mathcal{A}$ равны единице.

Предложение 7. Линейный оператор с простым спектром диагонализируем.

Доказательство. Доказательство является непосредственным следствием ТКМР.

Разумеется, обратное утверждение не верно, и ниже мы даем необходимое и достаточное условие для диагонализируемости.

Предложение 8. Пусть $\mathcal{A} \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$,

$$m_{\mathcal{A}}(t) = p_1^{\mu_1}(t) \dots p_l^{\mu_l}(t)$$

– (унитарное) неприводимое разложение минимального многочлена $\mathcal{A}$ над $\mathbf{k}$ и $K_k = \mathbf{k}[t]/(p_k(t))$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем тогда и только тогда, когда

$$\dim_{K_k}(\ker p_k(\mathcal{A})) = \mu_k \quad \text{для всех } k = 1, \dots, l.$$

Доказательство. По определению, $\mathcal{A}$ – диагонализируемый оператор тогда и только тогда, когда каждое слагаемое P_{kij} его поликвазициклической формы (1) имеет только один блок $[p_k(t)]$ на диагонали, т.е. $i = 1$ для любого $k = 1, \dots, l$. Это означает, что

$$n_{k\mu_k} = \dots = n_{k2} = 0 \quad \text{и} \quad n_{k1} = \mu_k.$$

Остается заметить, что для любого $k = 1, \dots, l$ из равенства

$$n_{k1} = \dim_{K_k}(\ker p_k(\mathcal{A})) = \mu_k$$

следует, что $n_{k\mu_k} = \dots = n_{k2} = 0$.

Следствие 5. Линейный оператор $\mathcal{A} \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$ диагонализируем тогда и только тогда, когда все неприводимые делители $p_k(t)$ минимального полинома $m_{\mathcal{A}}(t)$ имеют кратность один.

По определению, *циклическая матрица* – сопровождающая матрица полинома, а *циклический оператор* – линейный оператор, представимый циклической матрицей в некотором базисе. Иначе говоря, оператор $\mathcal{A} \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$ цикличесен, тогда и только тогда, когда существует вектор $e \in L$ такой, что $e, \mathcal{A}(e), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(e)$

есть базис L . Таким образом, существуют специальные *циклические* линейные операторы и эти операторы обладают *циклической* канонической формой.

Ситуация иная в квазициклическом случае. Не существуют специальные квазициклические операторы, но существует *квазициклическая* каноническая форма для *неразложимых* операторов. Любой неразложимый оператор циклический, но обратное не верно.

Предложение 9. Пусть $A \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$, $K_k = \mathbf{k}[t]/(p_k(t))$ и

$$m_A(t) = p_1^{\mu_1}(t) \dots p_l^{\mu_l}(t)$$

– (унитарное) неприводимое разложение минимального полинома A над $\mathbf{k}$. Тогда оператор A циклический тогда и только тогда, когда имеет место

$$n_{ki} = \dim_{K_k}(\ker p_k(A)^i) = 1$$

для всех $i = 1, \dots, \mu_k$ и $k = 1, \dots, l$.

Доказательство. A циклический тогда и только тогда, когда для каждого $k = 1, \dots, l$ в разложении (1) существует только одно слагаемое P_{kij} . Согласно ТКМР, необходимое и достаточное условие, обеспечивающее это свойство, имеет вид

$$n_{ki} = \dim_{K_k}(\ker p_k(A)^i) = 1, \quad i = 1, \dots, \mu_k, \quad k = 1, \dots, l.$$

Следствие 6. Следующие условия эквивалентны для любого линейного оператора $A \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$:

- (i): A – циклический оператор,
- (ii): характеристический полином $\chi_A(t)$ и минимальный полином $m_A(t)$ оператора A совпадают,
- (iii): для любого неприводимого делителя $p_k(t)$ полинома $m_A(t)$ существует только одно $p_k(t)$ -примарное слагаемое в поликвазициклическом разложении (1) оператора A ,
- (iv): любой компонент примарного разложения A неразложим.

Итак, диагонализируемые операторы и циклические операторы представляют два противоположных полюса: среди линейных операторов A с заданным характеристическим полиномом $\chi_A(t)$ с неприводимым разложением $p_1(t)^{\nu_1} \dots p_l(t)^{\nu_l}$, диагонализируемый оператор обладает максимальным числом прямых слагаемых в обобщенной жордановой форме (1) (= минимальной степени минимального полинома: $\deg m_A(t) = \deg p_1(t) + \dots + p_l(t)$).

В противовес этому, циклический оператор имеет минимальное число прямых слагаемых в разложении (1) (= максимальной степени минимального полинома: $\deg m_{\mathcal{A}}(t) = \deg \chi_{\mathcal{A}}(t) = \nu_1 \deg p_1(t) + \dots + \nu_l \deg p_l(t)$).

7. РАЗЛОЖЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ПРЯМУЮ СУММУ ЦИКЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим квазициклическое максимальное разложение (1) произвольного линейного оператора $\mathcal{A} \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$. Для всех $k = 1, \dots, l$ выберем слагаемое P_{kij} матрицы P с максимальным i . Согласно предложению 9 и следствию 6 прямая сумма выбранных блоков представляет циклический оператор $[d_1(t)]$ (точнее подобна ему), где $d_1(t)$ есть произведение характеристических (= минимальных) полиномов всех выбранных P_{kij} .

Исключая выбранные блоки P_{ijk} из прямой суммы $P = P_1$, мы получим новую прямую сумму P_2 . Повторяя эту процедуру для P_2 , получим циклический оператор $[d_2(t)]$ и матрицу P_3 . Продолжая тем же образом, получим разложение

$$P = [d_1(t)] \oplus \dots \oplus [d_i(t)] \oplus P_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

а в конечном итоге, доказательство первого утверждения следующей теоремы.

Теорема 4 (теорема о циклическом разложении, [5, Гл. 7.2]). *Для любого оператора $\mathcal{A} \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$ существует разложение $\oplus_i [d_i(t)]$ в прямую сумму циклических операторов $[d_i(t)]$, где каждый $d_{i+1}(t)$ делит $d_i(t)$.*

Такое разложение единственно.

Чтобы доказать единственность, достаточно заметить, что $d_1(t) = m_{\mathcal{A}}(t)$ – минимальный полином P_1 и что для каждого i полином $d_i(t)$ – минимальный полином P_i . Как и выше, разложение $\mathcal{A} = \oplus_i \mathcal{A}_i$, для которого $\mathcal{A}_i$ задан в подходящем базисе сопровождающей матрицей $[d_i(t)]$ при всех i , определено не единственным образом, тогда как полиномы $d_i(t)$ определены однозначно.

Рациональная каноническая форма линейного оператора $\mathcal{A} \in \text{End}_{\mathbf{k}} L$ задается матрицей $\oplus_i [d_i(t)]$, такой, что $d_{i+1}(t)$ делит $d_i(t)$ для всех i (см. [5, Глава 7.2]). Обычно, теорему о циклическом разложении и каноническую рациональную форму линейных операторов получают либо геометрически, как в [5], либо алгебраически, как в [1] (с помощью структурной теоремы для модулей над евклидовой областью, стр. 475), или в [7] (с помощью более общей теории модулей над областью главных идеалов, глава 15.2).

Abstract. The present paper gives a direct proof of the following result: *for any linear operator over arbitrary field there exists a basis in which it has a polyquasicyclic matrix, i.e. a generalized Jordan form of second kind.* The polyquasicyclic form of a linear operator is uniquely determined up to the order of direct summands on the diagonal, and it is shown that the generalized Jordan form of second kind is a link that connects the classical Jordan form and the rational canonical form.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Artin, *Algebra* (Prentice Hall, New Jersey, 1991).
- [2] N. Bourbaki, *Algèbre*, livre II (Hermann and Co, Paris, 1958).
- [3] С. Г. Далалян, “Обобщенная жорданова нормальная форма матрицы с сепарабельными неприводимыми делителями характеристического полинома”, Вестник РАУ (1), 7-14 (2005).
- [4] С. Г. Далалян, “Обобщенная жорданова матрица линейного оператора”, Мат. заметки **82** (1), 27-35 (2007).
- [5] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra* (Prentice-Hall, New Jersey, 1971).
- [6] C. Jordan, “Traité des Substitutions et des Équations Algébrique” in: Gauthier-Villars, Paris, 114-126, 1870.
- [7] S. Lang, *Algebra* (Addison-Wesley Publ. Comp., 1965).
- [8] А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры* (Наука, Москва, 1975).
- [9] M. Marcus, H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities* (Dover, 1992).
- [10] М. М. Постников, *Линейная алгебра и дифференциальная геометрия* (Наука, Москва, 1979).
- [11] K. Weierstrass, “Zur Theorie der Bilinearen und Quadratischen Formen”, Berliner Monatsbericht (1868), 310; Werke 2 (1895), 19-44.

Поступила 22 июня 2008