Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 5, 2008, стр. 13-24

ГРУППЫ АДЯНА-ЛЫСЕНКА И (U) СВОЙСТВО

В. С. АТАБЕКЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *avarujan@ysu.am*

Аннотация. Скажем, что группа G обладает свойством (U) относительно S, если существует такое число $M = M(G)$, что для каждого порождающего множества P группы G найдется элемент $t \in G$, для которого имеет место неравенство $\max_{x\in S}\ t^{-1}xt\ {}_P \leq M$.. В работе доказывается, что известные группы Адяна-Лысенка обладают свойством (U). Вопрос о нахождении бесконечных групп со свойством (U) поставлен в совместной работе Д. Осина и Д. Сонкина. Показано также, что для каждого нечетного $n \geq 1003$ в многообразии групп, удовлетворяющих тождеству $x^n = 1$, существует континуум неизоморфных (простых) групп со свойством (U).

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть G – произвольная группа с конечным множеством порождающих S.

Определение 1. *Скажем, что группа G обладает свойством (U) относительно S, если существует такое число $M = M(G)$, что для каждого порождающего множества P группы G найдется элемент $t \in G$, для которого имеет место неравенство*

$$\max_{x\in S} \left|t^{-1}xt\right|_P \leq M.$$

Нетрудно показать, что если группа обладает свойством (U) относительно некоторого S, то она обладает свойством (U) относительно любого конечного порождающего множества. Важность изучения групп со свойством (U) было подчеркнуто в совместной работе Д. Осина и Д. Сонкина [1] в связи с исследованием константы Каждана некоторых групп (напоминаем, что для каждого конечного подмножества S группы G и для каждого унитарного представления $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ группы G над гильбертовым пространством $\mathcal{H}$ число

$$\kappa(G, S, \pi) = \inf_{\xi\in\mathcal{H}^1} \max_{x\in S} \|\pi(s)\xi - \xi\|$$

называется константой Каждана, где $\mathcal{H}^1$ есть единичная сфера в $\mathcal{H}$. В [1] доказывается, что каждая не элементарная гиперболическая группа без кручения обладает бесконечной фактор-группой со свойством (U). Отсюда выводится существование конечно порожденной группы с ненулевой равномерной константой Каждана. Для сравнения отметим, что равномерная константа Каждана каждой плотной подгруппы связанной локально компактной топологической группы равна нулю (отрицательный ответ на вопрос А. Любоцкого из [3], см. также [2, 4, 5]. Очевидно, конечные группы обладают свойством (U). В работе [1] ставится вопрос о нахождении бесконечных групп со свойством (U).

Группы Адяна-Лысенка из работы [6] оказываются полезными при исследовании групп со свойством (U). Как хорошо известно, для каждого нечетного числа $n \geq 1003$ в [6] построена бесконечная 2-порожденная группа, каждая максимальная подгруппа которой – циклическая группа порядка n (такие группы называются “монстрами” Тарского). Нашей основной целью является

Теорема 1. *Группы Адяна-Лысенка обладают свойством (U).*

Опираясь на работу [6], автором в [7] было доказано, что для каждого нечетного $n \geq 1003$ существует континуум неизоморфных 2-порожденных групп удовлетворяющих тождественному соотношению $x^n = 1$ и все собственные подгруппы которых – циклические.

Теорема 2. *Для каждого нечетного* $n \geq 1003$ *в многообразии групп, удовлетворяющих тождеству* $x^n = 1$*, существует континуум неизоморфных групп обладающих свойством (U).*

В связи с теоремой 2, заметим, что из вышеуказанного результата Осина–Сонкина следует существование лишь счетного множества групп со свойством (U) (множество гиперболических групп - счетное). Из теоремы 2 немедленно следует также существование счетного множества многообразий (многообразия групп простой экспоненты $n \geq 1003$), попарно пересекающихся по тривиальному многообразию, в каждом из которых – континуум неизоморфных групп, обладающих свойством (U).

Поскольку группы из [6, 7] являются простыми, то справедливо

Следствие 1. *Для каждого нечетного* $n \geq 1003$ *в многообразии групп, удовлетворяющих тождеству* $x^n = 1$ *существует континуум неизоморфных простых групп, обладающих свойством (U).*

Отметим, что первые "монстры" Тарского для каждого простого числа $n > 10^{75}$ были построены А. Ю. Ольшанским в работе [8] (см. также [9]). Используя технику работы [10], можно было бы доказать, что и группы Ольшанского обладают свойством (U).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУПП АДЯНА–ЛЫСЕНКА, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

В дальнейшем изложении мы без специальных ссылок будем использовать обозначения и терминологию работ [6] и [11]. Пусть $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число и $d = 191$. Согласно §1 работы [6] каждая из групп Адяна-Лысенка Γ является прямым пределом групп Γ_α, где α – натуральный параметр, называемый рангом. По определению, при $\alpha = 0, 1, 2$ полагаем $\Gamma_\alpha \rightleftharpoons B(2, n, \alpha)$, где $B(m, n, 0)$ – свободная группа с порождающими a, b.

Чтобы определить группы Γ_α, предположим, что при $\beta < \alpha$ группы Γ_β уже определены. Пусть Ψ_α есть множество всех элементарных периодов C ранга $\alpha-1$, удовлетворяющих соотношению

$$C \overset{\alpha-2}{=} A^{-d} Z^{-1} B^{-d} Z\, A^d Z^{-1} A^d Z, \tag{1}$$

где A и B – минимизированные элементарные периоды некоторых рангов γ и β, $Z \in \mathbf{M}_{\alpha-2}$ и $\gamma \leq \beta \leq \alpha - 2$. Для каждого $C \in \Psi_\alpha$ через $[C]$ обозначим множество всех тех слов $D \in \Psi_\alpha$, которые сопряжены в группе $\Gamma_{\alpha-2}$ или слову C, или слову C^{-1}.

Подмножество $\overline{\Psi}_\alpha \subseteq \Psi_\alpha$ выберем так, чтобы

(i) из каждого класса $[C]$ в множестве $\overline{\Psi}_\alpha$ содержался бы ровно один представитель,

(ii) если в классе $[C]$ содержатся периоды вида

$$E^{-d} Z^{-1}\, E^{-d} Z\, E^d Z^{-1}\, E^d Z,$$

где E - минимизированный элементарный период некоторого ранга γ, $Z \in \mathbf{M}_{\alpha-2}$ и $\gamma \leq \alpha - 2$, то в качестве представителя класса $[C]$ выбирался бы один из них. Отметим, что в определении множества $\overline{\Psi}_\alpha$ в §1 [6] есть определенный произвол, а именно, только требуется, чтобы множество, $\overline{\Psi}_\alpha$ удовлетворяло условию (i).

Через Φ_α обозначим множество слов, содержащее для каждого периода $C \in \overline{\Psi}_\alpha$ ровно два слова:

$$C^{200}AC^{200}A^2\cdots A^{n-1}C^{200}a \tag{2}$$

и

$$C^{300}AC^{300}A^2\cdots A^{n-1}C^{300}b, \tag{3}$$

где A – какой-нибудь фиксированный для данного $C \in \overline{\Psi}_\alpha$ элементарный период, участвующий в соотношении (1). В качестве группы Γ_α возьмем группу

$$\Gamma_\alpha \rightleftharpoons \left\langle a, b \;\mid\; E^n = 1,\ F = 1,\ R \in \bigcup_{\beta \le \alpha} \mathbf{E}_\beta,\ F \in \bigcup_{\beta \le \alpha} \Phi_\beta \right\rangle \tag{4}$$

а в качестве Γ возьмем группу

$$\Gamma \rightleftharpoons \left\langle a, b \;\mid\; E^n = 1, F = 1,\ R \in \bigcup_{\beta > 0} \mathbf{E}_\beta,\ F \in \bigcup_{\beta > 2} \Phi_\beta \right\rangle, \tag{5}$$

где $\mathbf{E}_\alpha$ – множество всех элементарных периодов ранга α. Для фиксированного n группа Γ, определенная соотношением (5) и есть группа Адяна-Лысенка. Наша цель – доказать, что они обладают (U) свойством.

В качестве порождающего множества S выберем $S = \{a, b\}$. Допустим, что P – произвольное порождающее множество группы Γ.

Лемма 1. *Если $X^\delta \overset{\Gamma}{=} T\,X^\varepsilon T^{-1}$, то подгруппа $\left\langle X^\varepsilon,\, X^\delta,\, T\right\rangle_\Gamma$ содержится в некоторой циклической подгруппе порядка n.*

Доказательство. Пусть X – произвольный элемент группы Γ. Из равенства

$$X^\delta \overset{\Gamma}{=} T\,X^\varepsilon T^{-1}$$

следует, что $|X^\delta| = |X^\varepsilon| \le n$. Значит $\langle X^\delta\rangle_\Gamma = \langle X^\varepsilon\rangle_\Gamma$ и

$$\left|\left\langle X^\varepsilon,\, X^\delta,\, T\right\rangle_\Gamma\right| = |\langle X^\varepsilon, T\rangle| \le n^2.$$

Согласно основному результату работы [6] группа Γ – бесконечная, а каждая собственная подгруппа содержится в некоторой циклической подгруппе порядка n. Из неравенства $|\langle X^\varepsilon, T\rangle| \le n^2$ следует, что $\langle X^\varepsilon, T\rangle$ – собственная подгруппа, следовательно, $\langle X^\varepsilon, T\rangle$ – подгруппа циклической группы порядка n.

Лемма 2. *Если P – некоторое порождающее множество группы Γ, то в P содержится пара неперестановочных элементов X и Y.*

Доказательство. Так как Γ – конечнопорожденная группа, то достаточно утверждение доказать для конечного множества P. Если бы элементы множества P были бы попарно перестановочны, то они порождали бы конечную подгруппу $|\langle P\rangle|_\Gamma \leq |P|^n$, поскольку в Γ выполняется тождественное соотношение $x^n = 1$. Но это противоречит бесконечности группы Γ.

Лемма 3. *Пусть $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число. Тогда существует число L такое, что всякая нециклическая подгруппа $\Delta \rightleftharpoons \langle X, Y\rangle$ группы Γ содержит такую нециклическую подгруппу вида $U\,\langle A\,, C\rangle\,U^{-1}$, что $C \in \Psi_\alpha$ и*

$$UCU^{-1} \overset{\alpha-2}{=} [(UA^dU^{-1})\,,\,X^{-1}(UA^dU^{-1})X],$$

где A – минимизированный элементарный период некоторого ранга γ, $\gamma \leq \alpha - 2$, и длина слова UAU^{-1} относительно порождающих X и Y удовлетворяет неравенству

$$\left|UAU^{-1}\right|_{\{X,Y\}} < L.$$

Доказательство. Пусть $\Delta \rightleftharpoons \langle X,\, Y\rangle_\Gamma$ – произвольная нециклическая подгруппа группы Γ. В силу VI.2.4 и VI.1.2 работы [11], $X \overset{\Gamma}{=} T\,E^{\,i}\,T^{-1}$ и $T^{-1}Y\,T \overset{\Gamma}{=} Z$ для некоторых слов T, Z и минимизированного элементарного периода E, имеющего ранг β. Согласно VI.2.4 и IV.1.13 работы [11] можем считать, что $Z \in \mathbf{M}_\xi \cap \mathbf{A}_{\xi+1}$ для некоторого $\xi \geq \beta$.

Пусть k – наибольший общий делитель чисел i и n, а r – такое целое число, что $|r| < n$ и $E^{i\,r} = E^k$. Выбрав число $s \rightleftharpoons [n/3k]$, получим $n/5 < sk < n/3$. Таким образом,

$$X^{rs} = T\,E^{i\,rs}\,T^{-1} = T\,E^{ks}\,T^{-1}$$

и

$$186 < ks < \frac{n+1}{2} - 148,$$

поскольку $n \geq 1003$. Итак, для слова $X_1 \rightleftharpoons X^{rs}$ имеем

$$X_1 = T\,E^{ks}\,T^{-1}, \quad |X_1|_{\{X,Y\}} \leq |rs||X|_{\{X,Y\}} < n^2.$$

Поскольку $\langle X,\, Y\rangle$ – нециклическая, то нециклическая и подгруппа

$$T^{-1}\langle X,\, Y\rangle T = \langle E^i,\, Z\rangle.$$

Тогда по лемме 1, $E \neq Z^{-1}E^{\pm1}Z$ в группе Γ. В силу лемм 3.2, 7.2 и 2.8 работы [6] коммутатор

$$\left[X_1,\, Y^{-1}X_1Y\,\right] = T\left[E^{ks},\, Z^{-1}E^{ks}Z\right]T^{-1}$$

сопряжен в Γ некоторому минимизированному элементарному периоду D некоторого ранга $\delta \geq \beta + 1$. Пусть

$$T^{-1}\left[X_1,\, Y^{-1}X_1Y\right]T = Z_1^{-1}D\,Z_1.$$

Так как элемент

$$Z_2 = Z_1T^{-1}XTZ_1{}^{-1}$$

сопряжен степени элементарного периода ранга $\beta < \delta$, то в силу лемм 6.6 из [6] и VI.1.2 из [11], D и Z_2 не могут порождать циклическую подгруппу. Значит, по лемме 1, $D \neq Z_2{}^{-1}D^{\pm 1}Z_2$ в группе Γ.

Считая, что $Z_2 \in \mathbf{M}_\lambda \cap \mathbf{A}_{\lambda+1}$ для некоторого $\lambda \geq \delta$, по лемме 3.2 работы [6] найдем приведенную форму C коммутатора $\left[D^d,\, Z_2^{-1}D^dZ_2\right]$. Согласно лемме 7.2 работы [6], C – элементарный период некоторого ранга $\tau \geq \delta+1$. В силу формулы (3.6) из [6], $C \overset{\delta-1}{=} w\left[D^d,\, Z_2^{-1}D^dZ_2\right]w^{-1}$, где $w \in \Theta(D,\, D_1)$.

Таким образом, в подгруппе $\Delta \rightleftharpoons \langle X,\, Y\rangle_\Gamma$ содержатся элементы

$$T\,Z_1^{-1}D\,Z_1T^{-1}, \quad TZ_1{}^{-1}\left[D^d, Z_2^{-1}D^d\,Z_2\right]Z_1T^{-1}.$$

Рассмотрим элементарные периоды

$$A \rightleftharpoons wDw^{-1} \quad \text{и} \quad C = w\left[D^d,\, Z_2^{-1}D^dZ_2\right]w^{-1}.$$

Из определений следует, что

$$A = wZ_1T^{-1}\left[X_1,\, Y^{-1}X_1Y\right]T\,Z_1^{-1}w^{-1}$$

и

$$C = wZ_1T^{-1}\left[\left[X_1,\, Y^{-1}X_1Y\right]^d,\, X^{-1}\left[X_1,\, Y^{-1}X_1Y\right]^dX\right]T\,Z_1^{-1}w.$$

Значит, если $U \rightleftharpoons T\,Z_1^{-1}w^{-1}$, то $UAU^{-1} \in \Delta$, $UCU^{-1} \in \Delta$ и

$$\left|UAU^{-1}\right|_{\{X,Y\}} = \left|\left[X_1,\, Y^{-1}X_1Y\right]\right|_{\{X,Y\}} < \tag{6}$$
$$< 2(n^2+n^2+2)|\,[X,\, Y]\,|_{\{X,Y\}} < 5n^2.$$

Для завершения доказательства остается выбрать $L > 5n^2$.

Лемма 4. *Если E есть элементарный период ранга β, Z_1, $Z_2 \in \mathbf{M}_\lambda \cap \mathbf{A}_{\lambda+1}$ для некоторого $\lambda \geq \beta$, $\left[E^d, Z^{-1}E^dZ\right] \neq 1$ и коммутаторы $\left[E^d, Z^{-1}E^dZ\right]$ и $\left[E^d, Z'^{-1}E^dZ'\right]$ сопряжены в группе Γ_α, где $\alpha \geq \beta$, то для некоторых целых чисел u и v или*

$$Z'^{-1}E^{-d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^u\,Z^{-1}E^{-d}Z\,E^v,$$

или

$$Z'E^{-d}Z'^{-1} \overset{\Gamma}{=} E^u\,Z^{-1}E^dZ\,E^v.$$

Доказательство. По лемме 3.2 работы [6], найдем приведенные формы G и G' коммутаторов $\left[E^d, Z^{-1} E^d Z\right]$ и $\left[E^d, Z'^{-1} E^d Z'\right]$. Поскольку G и G' сопряжены в группе $\Gamma_{\beta-1}$ исходным коммутаторам, то в силу лемм 7.2 и 6.6 работы [6] G и G' суть элементарные периоды одного и того же ранга $\delta \geq \beta + 1$, сопряженные в группе $\Gamma_{\delta-1}$.

Доказательство будем вести индукцией по α и будем следовать схеме доказательства леммы 7.4 из [6], учитывая, что в нашем случае $B \equiv B' \equiv E$ и A_1, A_2, A_1', A_2' являются циклическими сдвигами элементарного периода E ранга β. Ниже все используемые понятия и обозначения взяты из работы [6]. Как и в лемме 7.4 [6], можно считать, что $\delta \geq \alpha + 1$.

Случай 1: Допустим $\alpha = \beta$. Рассмотрим два подслучая.

Подслучай 1a: Пусть слова G и G' имеют вид (7.11) и (7.13) работы [6] соответственно, и выполнены все соотношения (7.11)–(7.16) [6].

Соотношения (7.17)[6] в нашем случае принимают вид

$$E \overset{\alpha-1}{=} T\, E^{\varepsilon} T^{-1}, \quad L' \overset{\alpha}{=} T\, E^s L\, E^t T^{-1}.$$

Из первого равенства, согласно лемме 2 следуют равенства $\varepsilon = 1$ и $T \overset{\Gamma}{=} E^r$ для некоторого r. Так как Род(W_i, W_i') при $i = 1, 2$, то, согласно II.5.21 [2] σ и τ имеют одинаковый знак. Тогда из второго равенства (7.17) с учетом формул (7.16) и (7.12) [6] получим равенство вида

$$E^l Z' E^{\delta d} Z'^{-1} E^{-l} \overset{\Gamma}{=} E^r\, E^s E^k Z E^{\delta d} Z^{-1} E^{-k}\, E^t E^{-r},$$

где $\delta = \pm 1$. Из этого для некоторых целых u и v получается равенство

$$Z' E^{-d} Z'^{-1} \overset{\Gamma}{=} E^u Z E^{-d} Z^{-1} E^v.$$

Случай, когда слово G имеет вид (7.18) [6] доказывается аналогично, поскольку он сводится к рассмотренному случаю.

Подслучай 1b: рассмотрим подслучай, когда ядро W_1' согласовано с вхождением слова вида $A_1'^{-d}$. Поскольку Род(W_i, W_i') при $i = 1, 2$, то, согласно II.5.21 [6] в соотношениях (7.15) [6] имеем $\sigma = -1$. Тогда $L = S_2 A_2^d S_2^{-1}$. В силу леммы 2 из первого равенства (7.20) [6], т.е. из $E \overset{\alpha-1}{=} T\, E^{\varepsilon} T^{-1}$) получаем $T \overset{\Gamma}{=} E^r$ для некоторого r, а из второго равенства (7.21) и (7.20) [6] следует

$$E^i Z'^{-1} E^{-d} Z' E^j \overset{\alpha}{=} T\, E^s L\, E^t T^{-1}.$$

Воспользовавшись (7.16) и (7.12) работы [6] выводим

$$E^i Z'^{-1} E^{-d} Z' E^j \overset{\Gamma}{=} E^r\, E^s E^k Z E^d Z^{-1} E^{-k}\, E^t E^{-r}.$$

Тем самым, для некоторых u и v имеем ,

$$Z'^{-1}E^{-d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^{u}ZE^{d}Z^{-1}E^{v}.$$

Случай, когда ядро W_1' согласовано с вхождением слова вида $A_2'^{\,d}$ рассматривается аналогично. В этом случае получается, что $\sigma = 1$, $L = S_1A_1^{-d}S_1^{-1}$ и по (7.20), (7.21), (7.16) и (7.12) работы [6] имеем

$$Z'^{-1}E^{d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^{u}ZE^{-d}Z^{-1}E^{v}$$

для некоторых u и v. Вычислив обратные, получаем

$$Z'^{-1}E^{-d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^{-v}ZE^{d}Z^{-1}E^{-u}.$$

Таким образом, в случае $\alpha = \beta$ из сопряженности коммутаторов $\left[E^d, Z^{-1}\,E^dZ\right]$ и $\left[E^d, Z'^{-1}\,E^dZ'\right]$ в группе Γ_α следует, что для некоторых целых чисел u и v или

$$Z'E^{-d}Z'^{-1} \overset{\Gamma}{=} E^{u}\,Z\,E^{-d}Z^{-1}\,E^{v},$$

или

$$Z'^{-1}E^{-d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^{u}\,Z\,E^{d}Z^{-1}\,E^{v}.$$

С другой стороны, из сопряженности $\left[E^d, Z^{-1}\,E^dZ\right]$ и $\left[E^d, Z'^{-1}\,E^dZ'\right]$ в группе Γ_α следует сопряженность коммутаторов

$$\left[E^d, Z'\,E^dZ'^{-1}\right] \overset{0}{=} Z'\left[E^d, Z'^{-1}\,E^dZ'\right]^{-1}Z'^{-1}$$

и

$$\left[E^d, Z\,E^dZ^{-1}\right] \overset{0}{=} Z\left[E^d, Z^{-1}\,E^dZ\right]^{-1}Z^{-1}$$

группе Γ_α. Исходя из этого, в предыдущих рассуждениях применяя замену вида $Z'^{-1} \to Z'$ и $Z^{-1} \to Z$ окончательно получим, что или

$$Z'^{-1}E^{-d}Z' \overset{\Gamma}{=} E^{u}\,Z^{-1}\,E^{-d}Z\,E^{v},$$

или

$$Z'E^{-d}Z'^{-1} \overset{\Gamma}{=} E^{u}\,Z^{-1}\,E^{d}Z\,E^{v}.$$

В случае 1, т.е при $\alpha = \beta$ лемма доказана.

Случай 2: Рассмотрим. случай, когда $\alpha > \beta$. В этом случае, повторив доказательство случая 2 леммы 7.4 [6], мы получим, что или периоды G и G' сопряжены в ранге $\alpha - 1$, или же коммутатор G' в ранге $\alpha - 1$ сопряжен с коммутатором $\left[E^d,\,(w^{-1}S_1^{-1}w_2)\,E^d(w^{-1}S_1^{-1}w_2)^{-1}\right]$, причем $w^{-1}S_1^{-1}w_2 = Z^{-1}$ в ранге α. Тем самым, утверждение леммы верно по индуктивному предположению. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть A и E – элементарные периоды некоторых рангов. Если $\left[A^d, Z^{-1}A^dZ\right] \neq 1$ в группе Γ и коммутатор $\left[A^d, Z^{-1}A^dZ\right]$ сопряжен в Γ или коммутатору $\left[E^d, Z'^{-1}E^dZ'\right]$, или его обратному, то элементарные периоды A и E сопряжены в группе Γ.*

Доказательство. Повторим доказательство леммы 7.4 [6], полагая $A = B$ и $A' = B' = E$. В случае $\alpha = \beta$ получим соотношения (7.17) и (7.20) [6], что доказывает лемму. В случае же $\alpha > \beta$ получим, что коммутатор $\left[E^d, Z'^{-1}E^dZ'\right]$ сопряжен в ранге $\alpha - 1$ с коммутатором $\left[A^d, (w^{-1}S_1^{-1}w_2)\, A^d(w^{-1}S_1^{-1}w_2)^{-1}\right]$. Значит, лемма верна по индуктивному предположению.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть P – произвольное порождающее множество группы Γ. По лемме 2, в P найдется пара неперестановочных элементов X и Y. По лемме 3, для некоторого U в подгруппе $\langle X, Y\rangle$, можно выбрать элементы UAU^{-1} и

$$UCU^{-1} \overset{\alpha-2}{=} [(UA^dU^{-1}), \quad X^{-1}(UA^dU^{-1})X] \overset{0}{=} U[A^d, Z^{-1}A^dZ]U^{-1},$$

где $Z = U^{-1}XU$, C – элементарный период некоторого ранга α, A – элементарный период ранга $\gamma \leq \alpha - 2$ и $C \in \Psi_\alpha$.

Согласно пункту (ii) определения 1 множества $\overline{\Psi}_\alpha$, существует некий период $D \in \overline{\Psi}_\alpha$ сопряженный или с C, или с C^{-1} и $D \overset{\alpha-2}{=} \left[E^d, Z_1^{-1}E^dZ_1\right]$, где E - минимизированный элементарный период некоторого ранга β, $Z_1 \in \mathbf{M}_{\alpha-2}$ и $\beta \leq \alpha - 2$. По лемме 4 элементарный период A сопряжен или с E или с E^{-1}.

Пусть $A = VE^\tau V^{-1}$, где $\tau = \pm 1$. Согласно соотношениям (2) и (3),

$$a = D^{200}ED^{200}E^2 \cdots E^{n-1}D^{200}$$

и

$$b = D^{300}ED^{300}E^2 \cdots E^{n-1}D^{300}.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$a^\tau = D^{\tau 200}ED^{\tau 200}E^2 \cdots E^{(n-1)}D^{\tau 200}$$

и

$$b^\tau = D^{\tau 300}ED^{\tau 300}E^2 \cdots E^{(n-1)}D^{\tau 300}.$$

Учитывая равенство $A = VE^\tau V^{-1}$, получаем, что

$$Va^\tau V^{-1} = (VDV^{-1})^{\tau 200}A^\tau(VDV^{-1})^{\tau 200}A^{\tau 2} \cdots A^{\tau(n-1)}(VDV^{-1})^{\tau 200},$$

и поэтому

$$VaV^{-1} = (VDV^{-1})^{200} A (VDV^{-1})^{200} A^2 \cdots A^{(n-1)} (VDV^{-1})^{200}. \tag{7}$$

Итак, элемент

$$VDV^{-1} = V\left[E^d, Z_1^{-1} E^d Z_1\right] V^{-1} = \left[A^{\tau d}, (VZ_1V^{-1})^{-1} A^{\tau d} (VZ_1V^{-1})\right]$$

при $\tau = \pm 1$ сопряжен с одной стороны с $\left[A^d, (VZ_1V^{-1})^{-1} A^d (VZ_1V^{-1})\right]$, а с другой стороны с $[A^d, Z^{-1}A^dZ]$ или $[A^d, Z^{-1}A^dZ]^{-1}$, где $Z = U^{-1}XU$. В первом случае, в силу леммы 5, для некоторых целых чисел u и v, $0 \le u, v \le n-1$ или

$$(VZ_1V^{-1})^{-1} A^d (VZ_1V^{-1}) = A^u Z^{-1} A^d Z A^v, \tag{8}$$

или

$$(VZ_1V^{-1}) A^d (VZ_1V^{-1})^{-1} = A^u Z^{-1} A^{-d} Z A^v. \tag{9}$$

Во втором случае в соотношениях (8) и (9) необходимо лишь поменять Z на Z^{-1} и наоборот, поскольку, очевидно, что

$$\left[A^d, Z\,A^d Z^{-1}\right] \stackrel{0}{=} Z\left[A^d, Z^{-1}\,A^d Z\right]^{-1} Z^{-1}.$$

Мы рассмотрим лишь первый случай (во втором случае в доказательстве меняются местами лишь Z и Z^{-1}). Пусть имеет место соотношение (8). Так как

$$\begin{aligned}(UV)D(UV)^{-1} &= U\left[A^{\tau d}, A^u Z^{-1} A^{\tau d} Z A^v\right] U^{-1}\\ &= UA^{-v}\left[A^{\tau d}, Z^{-1}A^{\tau d}Z\right] A^v U^{-1}\\ &= UA^{-v}U^{-1}\left[(UA^{\tau d}U^{-1}), X^{-1}(UA^{\tau d}U^{-1})X\right] UA^vU^{-1}\end{aligned}$$

(при $\tau = -1$ нужно поменять местами $\pm u$ и $\mp v$), то из неравенства (6) выводим

$$|UVDV^{-1}U^{-1}|_{\{X,Y\}} < 5|v|n^2 + 4d \cdot 5n^2 + 4 + 5|v|n^2 < 15n^3.$$

Следовательно, из соотношения (7) получаем

$$\left|UVaV^{-1}U^{-1}\right|_{\{X,Y\}} < 200n \cdot 15n^3 + 5n^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} < 4n^5.$$

Аналогичным образом, $|UVbV^{-1}U^{-1}|_{\{X,Y\}} < 4n^5$.

Предположим теперь, что имеет место равенство (9). Тогда

$$\begin{aligned}(VZ_1V^{-1})VDV^{-1}(VZ_1V^{-1})^{-1} &= \left[(VZ_1V^{-1})A^{\tau d}(VZ_1V^{-1})^{-1}, A^{\tau d}\right]\\ &= \left[A^u Z^{-1} A^{-\tau d} Z A^v, A^{\tau d}\right]\end{aligned}$$

и

$$(UVZ_1)D(Z_1V^{-1}U^{-1}) = UA^vU^{-1}\left[X^{-1}UA^{-\tau d}U^{-1}X, UA^{\tau d}U^{-1}\right] UA^{-v}U^{-1}$$

(при $\tau = -1$ нужно поменять местами $\pm u$ и $\mp v$). Из последнего равенства, в силу неравенства (6), получаем

$$\left|(UVZ_1)D(Z_1V^{-1}U^{-1})\right|_{\{X,Y\}} < (2|v|+4d)5n^2+4 < 15n^3. \tag{10}$$

Поскольку НОД$(d,n)=1$, то для некоторого целого s, где $|s|<n$

$$(VZ_1V^{-1})A(VZ_1V^{-1})^{-1} = (A^uZ^{-1}A^{-d}ZA^v)^s$$

и

$$\begin{aligned} &U\left(VZ_1V^{-1}\right)A\left(VZ_1V^{-1}\right)^{-1}U^{-1}\\ &\qquad = \left((UA^uU^{-1})X^{-1}\left(UA^{-d}U^{-1}\right)X(UA^vU^{-1})\right)^s. \end{aligned} \tag{11}$$

Из неравенства (6) и равенства (11) следует, что для любого натурального числа r, $(1\le r\le n-1)$ выполняется неравенство

$$\left|U(VZ_1V^{-1})A^r(VZ_1V^{-1})^{-1}U^{-1}\right|_{\{X,Y\}} \le |r||s|(5n^2(|u|+d+|v|)+2) < 15n^5. \tag{12}$$

Сопрягая обе части равенства (7) элементом UVZ_1V^{-1}, воспользовавшись неравенствами (11), (12), окончательно получим

$$\left|UVZ_1aZ_1^{-1}V^{-1}U^{-1}\right|_{\{X,Y\}} < 200n\cdot 15n^3 + n\cdot 15n^5 < 16n^6.$$

Аналогичным образом покажем, что

$$\left|UVZ_1bZ_1^{-1}V^{-1}U^{-1}\right|_{\{X,Y\}} < 16n^6.$$

Заметим, что для любого элемента R группы Γ справедливо $|R|_P \le |R|_{\{X,Y\}}$, поскольку $\{X,Y\}\subseteq P$. В качестве M можно взять $M=16n^6$. Теорема 1 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть I – произвольное подмножество натуральных чисел и $1,2\notin I$. Для данного I построим 2-порожденную группу Γ^I с циклическими подгруппами, вводя некоторые изменения в определении групп Γ_α из пункта 2. Для $\alpha=0,1,2$ через Γ_α^I обозначим группу Γ_α. Предположим, что α – произвольное натуральное число и группы Γ_α^I уже определены для любого $\beta<\alpha$.

Если $\alpha\notin I$, то $\Gamma_\alpha^I \rightleftharpoons \Gamma_\alpha$. Если же $\alpha\in I$, то мы буквально повторим определение порождающих соотношений группы Γ_α, из пункта 2 в словах (2) и (3), поменяв лишь местами последние буквы a и b, т.е. слово (2) заменим на слово

$$C^{200}AC^{200}A^2\cdots A^{n-1}C^{200}b,$$

а слово (3) заменим на слово $C^{300}AC^{300}A^2\cdots A^{n-1}C^{300}a$. Группа Γ^I строится из групп Γ^I_α точно так же, как группа Γ из Γ_α.

Справедливость следующего утверждения доказана автором в работе [7].

Лемма 6. *Для любого I группа Γ^I – бесконечная простая группа, а все ее максимальные подгруппы – циклические группы порядка n. Среди групп Γ^I существует континуум неизоморфных групп.*

Доказательство теоремы 1 для группы Γ^I приводит к

Лемма 7. *Каждая из групп Γ^I обладает свойством (U).*

Справедливость утверждения теоремы 2 непосредственно следует из лемм 6 и 7.

Abstract. A group G possesses the property (U) with respect to S if there exists a number $M = M(G)$ such that for each generating set P of the group G there exists an element $t \in G$ for which $\max_{x\in S}\left|t^{-1}xt\right|_P \leq M$. It is proved that the well-known Adian–Lisenok groups possess the property (U). In connection with the problem on finding infinite groups with the property (U), which is stated in a joint unpublished work by D. Osin and D. Sonkin, it is shown that for any odd $n \geq 1003$ there is a continuum set of non-isomorphic simple groups with the property (U) in the variety of groups satisfying the identity $x^n = 1$

Список литературы

[1] D. Osin and D. Sonkin, *Uniformly Kazhdan Groups*, preprint, 2006.
[2] T. Gelander and A. Zuk, “Dependence of Kazhdan Constants on Generating Subsets”, Israel Journal of Mathematics **129**, 93-99 (2002).
[3] A. Lubotzky, *Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures*, Progress in Mathematics **125** (Birkhauser Verlag, Basel, 1994).
[4] A. Zuk, “Property (T) and Kazhdan Constants for Discrete Groups”, GAFA, Geom. Funct. Anal. **13**, 643-670 (2003).
[5] B. Bekka, P. de la Harpe and A. Valette, *Kazhdan's Property (T)*, preprint, 2006.
[6] С. И. Адян, И. Г. Лысенок, “О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические”, Изв. АН СССР. Сер. матем. **55** (5), 933-990 (1991).
[7] В. С. Атабекян, “О периодических группах нечетного периода $n > 1001$”, Матем. заметки **82** (4), 495-500, (2007).
[8] А. Ю. Ольшанский, “Группы ограниченного периода с подгруппами”, Алгебра и логика **21** (5), 553-618 (1982).
[9] В. С. Атабекян, С. В. Иванов, “Два замечания о группах ограниченного периода” деп. в ВИНИТИ СССР, 243-В87, 23 р.
[10] D. V. Osin, “Uniform Non-Amenability of Free Burnside Groups” Arch. Math, (Basel) **88** (5), 403-412 (2007).
[11] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, (Наука, Москва, 1975).

Поступила 22 июня 2008