Известия НАН Армении. Математика, том 42, н. 5, 2008, стр. 3-12

ОБОБЩЕННОЕ ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ

Н. Г. АГАРОНЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: narine78@ysu.am

Аннотация. В 1956 году А. Плейелем было найдено семейство тождеств, непосредственно связанных с изопериметрическими неравенствами для плоских выпуклых областей. Будем называть их классическими тождествами Плейеля. Р. В. Амбарцумян дал комбинаторное доказательство этих тождеств и указал, что они могут быть использованы для нахождения функции распределения длины хорды для выпуклых областей. В классических тождествах Плейеля интегрирование проводится по мере в пространстве $\mathbb{G}$ прямых, инвариантной относительно группы всех евклидовых движений. В настоящей статье эти тождества обобщаются на любую локально-конечную меру в пространстве $\mathbb{G}$. Эти тождества применяются для нахождения зависящей от ориентации функции распределения (или плотности) длины хорды ограниченных выпуклых областей.

Выпуклые области; распределения длины хорды; комбинаторный алгоритм; функции ширины.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $\mathbb{G}$ пространство всех прямых g в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, (p,φ) = полярные координаты основания перпендикуляра, опущенного на прямую g из начала координат O (стандартные координаты прямой $g \in \mathbb{G}$). Пусть $[P]$ – пучок прямых, проходящих через точку P, т.е.

$$[P] = \{g \in \mathbb{G} : \quad P \in g\}.$$

Мера $m(\cdot)$ в пространстве $\mathbb{G}$ называется беспучковой, если

$$m([P]) = 0 \qquad \text{для любой точки} \qquad P \in \mathbb{R}^2.$$

Все меры, которые рассматриваются в настоящей статье суть локально-конечные, т.е. термин мера всегда означает локально-конечную меру. Обозначим через $\mu(\cdot)$ меру в пространстве $\mathbb{G}$, инвариантную относительно группы $\mathbf{M}$ всех евклидовых движений (параллельных переносов и вращений). Также мы используем обозначение dg для этой меры. Известно, что (см.[7])

$$\mu(dg) = dg = dp\, d\varphi,$$

где dp – одномерная лебегова мера, а $d\varphi$ – равномерная мера на единичной окружности $\mathbb{S}_1$ с центром в начале координат.

Для ограниченной выпуклой области D через $[D]$ будем обозначать множество прямых, пересекающих D:

$$[D] = \{g \in \mathbb{G}\, g \cap D \neq \emptyset\}.$$

Имеем (см. [5], [7]):

$$\mu([D]) = |\partial D|,$$

где ∂D – граница области D, а $|\partial D|$ обозначает ее длину.

В настоящей статье получены обобщения классических тождеств Плейеля для любой беспучковой меры в пространстве $\mathbb{G}$. Последние используются для нахождения зависящей от ориентации функции распределения (или плотности) длины хорды ограниченных выпуклых областей.

2. КОМБИНАТОРНАЯ ФОРМУЛА АМБАРЦУМЯНА

Этот параграф содержит описание конкретного комбинаторного разложения, версии которого были использованы в работах [2]–[4] и [5], [7]. Мы применяем это разложение в следующем параграфе. Для полноты, начнем с общего комбинаторного алгоритма, впервые представленного (без доказательства) в [8].

Предположим, что на плоскости задано конечное множество точек $\{P_i\}$ (некоторые тройки точек могут быть коллинеарными). Обозначим через ρ_{ij} отрезок с концами P_i и P_j, а через $|\rho_{ij}|$ его длину. Положим $[\rho_{ij}] = \{g \in \mathbb{G}\ g \cap \rho_{ij} \neq \emptyset\}$. Пусть $Br\{P_i\}$ минимальное (конечное) кольцо (кольцо Бюффона) подмножеств $\mathbb{G}$, содержащее все множества $[\rho_{ij}]$. Две точки P_i и P_j называются соседними, если отрезок ρ_{ij} не содержит других точек из множества $\{P_i\}$. Каждой паре P_i, P_j соответствует прямая

$$g_{ij} = \text{ прямая проходящая через } P_i \text{ и } P_j$$

и четыре **локально непересекающиеся** подмножества из $\mathbb{G}$:

$$1 = \{g \in \mathbb{G} \text{ все точки из } \{P_i\} \bigcap g_{ij} \text{ лежат в правой от } g \text{ полуплоскости}\},$$

$$2 = \{g \in \mathbb{G} \text{ все точки из } \{P_i\} \bigcap g_{ij} \text{ лежат в левой от } g \text{ полуплоскости}\},$$

$$3 = \{g \in \mathbb{G} \text{ точка} P_i \text{ лежит в правой, а } P_j \text{ в левой от } g \text{ полуплоскости}\}.$$

$$4 = \{g \in \mathbb{G} \text{ точка} P_i \text{ лежит в левой, а } P_j \text{ в правой от } g \text{ полуплоскости}\}.$$

Так как прямая $g \in \mathbb{G}$ ненаправленная, то говоря о левой или правой полуплоскостях, ограниченных прямой $g \in \mathbb{G}$, мы подразумеваем следующее: каждой прямой g_{ij} мы приписываем направление, скажем от P_i к P_j, если $i < j$. По непрерывности, оно однозначно определяет направление прямых g из окрестности прямой g_{ij}.

Как обычно $I_A(g) = 1$, если $g \in A$ и 0, в противном случае.

Теорема 1. *(Р.В. Амбарцумян* [3], [7] *and* [8]*).Для произвольной беспучковой меры в пространстве $\mathbb{G}$ значение меры $m(C)$ для каждого подмножества $C \in Br\{P_i\}$ представимо в виде линейной комбинации величин $m([\rho_{ij}])$ между соседними точками P_i и P_j, с целочисленными коэффициентами:*

$$m(C) = \sum_{i<j} c_{ij}(C)\, m([\rho_{ij}]), \tag{2.1}$$

где сумма $\sum\limits_{i<j}$ берется по всем парам соседних точек из множества $\{P_i\}$. Целые числа c_{ij} вычисляются по формуле:

$$c_{ij}(C) = I_C(\overset{+}{i}, \bar{j}) + I_C(\bar{i}, \overset{+}{j}) - I_C(\bar{i}, \bar{j}) - I_C(\overset{+}{i}, \overset{+}{j}). \tag{2.2}$$

В (2.2)

$$I_C(\overset{+}{i}, \overset{+}{j}) = I_{C\cap 1}(g),\ I_C(\bar{i}, \bar{j}) = I_{C\cap 2}(g),\ I_C(\overset{+}{i}, \bar{j}) = I_{C\cap 3}(g),\ I_C(\bar{i}, \overset{+}{j}) = I_{C\cap 4}(g).$$

Замечание 1. *Отметим, что в случае наличия коллинеарных троек в $\{P_i\}$ разложение* (2.1) *не единственно. Пример различных представлений* (2.1) - (2.2) *можно найти в статье* [10].

3. ОБОБЩЕННОЕ ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ

В 1956 году А. Плейелем было найдено (см. [1]) семейство тождеств, непосредственно связанных с изопериметрическими неравенствами для плоских выпуклых областей. Будем называть их классическими тождествами Плейеля. Р. В. Амбарцумян дал комбинаторное доказательство этих тождеств и указал, что они могут быть использованы для нахождения функции распределения длины хорды для выпуклых областей. В случае многоугольников функция распределения длины хорды представляется в терминах элементарных функций. В классических тождествах Плейеля интегрирование проводится по мере в пространстве $\mathbb{G}$ прямых, инвариантной относительно группы всех евклидовых движений (параллельных переносов и вращений). В настоящей статье получены обобщения классических тождеств Плейеля для любой беспучковой меры в $\mathbb{G}$.

Пусть $\mathbf{D}$ есть ограниченная выпуклая область на плоскости с кусочно-гладкой границей $\partial\mathbf{D}$ (т.е. $\partial\mathbf{D}$ – объединение счетного числа дуг с непрерывно меняющейся касательной).

Пусть $g_1,..., g_n, g_i \in [\mathbf{D}]$ – n прямых, пересекающих $\mathbf{D}$. Обозначим через $\chi_i = g_i \cap \mathbf{D}$, $i = 1, ..., n$ хорды области $\mathbf{D}$, порожденные прямыми $g_1,..., g_n$. Рассмотрим беспучковую меру $m(\cdot)$ в пространстве $\mathbb{G}$.

Разложение (2.1)-(2.2) используем в следующей постановке. Пусть $C = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [\chi_i]$. Рассмотрим множество

$$\{P_j\} = \text{ множество концов хорд } \chi_i.$$

Можно доказать, что

$$C \in Br\{\{P_j\}\}$$

и разложение (2.1)-(2.2) принимает следующий вид:
(3.1)

$$m(C) = \sum_{i=1}^{n} I_{n-1}(\chi(g_i)) \cdot m([\chi(g_i)]) + \frac{1}{2} \sum_{d_k} I_{n-2}(d_k) \cdot m([d_k]) - \frac{1}{2} \sum_{s_k} I_{n-2}(s_k) \cdot m([s_k]),$$

где $I_k(\nu) = 1$, если ν пересекает точно k хорд из множества $\{\chi(g_1), ..., \chi(g_n)\}$, и 0 – в противном случае. Здесь мы предполагаем, что в случае $\nu = \chi(g_i)$ для некоторого i, хорда $\chi(g_i)$ не учитывается. Отрезок является типом d (типом s), если он соединяет две различные хорды $\chi(g_l)$ и $\chi(g_j)$ такие, что $\chi(g_l)$ и $\chi(g_j)$ лежат в **разных полуплоскостях** (**в одной и той же полуплоскости**) относительно отрезка d (отрезка s).

Проинтегрируем (3.1) по всем реализациям n прямых $(g_1, ..., g_n)$ по мере произведения $dg_1...dg_n$. Так как

$$m(\cap_{i=1}^{n} [\chi(g_i)]) = \int_{\mathbb{G}} I_n(g) \, m(dg),$$

где $I_n(g) = I_C$ и (см. [5])

$$\int_{[\chi(g)]} dg = 2 \cdot |\chi(g)|, \tag{3.2}$$

то по теореме Фубини, получаем

$$\int_{\mathbb{G}} ... \int_{\mathbb{G}} m(\cap_{i=1}^{n} [\chi(g_i)]) \, dg_1...dg_n = 2^n \int_{\mathbb{G}} |\chi(g)|^n \, m(dg). \tag{3.3}$$

Проинтегрируем первую сумму в (3.1). По симметрии имеем:

$$\int_{\mathbb{G}} ... \int_{\mathbb{G}} \sum_{i=1}^{n} I_{n-1}(\chi(g_i)) \cdot m([\chi(g_i)]) \, dg_1...dg_n = n 2^{n-1} \int_{\mathbb{G}} \chi^{n-1}(g) \, m([\chi(g)]) \, dg. \tag{3.4}$$

Отметим, что при $n = 1$ не существуют слагаемые типа s_k и d_k. Поэтому получаем

$$\int_{[D]} \chi(g) \, m(dg) = \frac{1}{2} \int_{[D]} m([\chi(g)]) \, dg. \tag{3.5}$$

Если число прямых $n > 1$, то возникают слагаемые типа s_k и d_k. Рассуждениями аналогичными [7] стр.156-157, по симметрии получаем

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{G}}\cdots\int_{\mathbb{G}}\left[\sum_{d_k} I_{n-2}(d_k)\cdot m([d_k]) - \frac{1}{2}\sum_{s_k} I_{n-2}(s_k)\cdot m([s_k])\right] dg_1 \ldots dg_n =$$

$$= n(n-1)2^{n-2}\int_{\mathbb{G}}\int_{\mathbb{G}} |\chi_{12}|^{n-2}\, m([\chi_{12}])\cdot[I_d - I_s] dg_1\, dg_2, \tag{3.6}$$

где χ_{12} обозначает отрезок, соединяющий “концы” отрезков $\chi(g_1)$ и $\chi(g_2)$, а I_d и I_s суть индикаторы событий $\{\chi_{12}$ – типа $d\}$ и $\{\chi_{12}$ – типа $s\}$, соответственно. Используя представление

$$dg_i = \sin\psi_i\, dl_i\, d\psi_i, \qquad i = 1, 2,$$

можно проинтегрировать по ψ_1 и ψ_2 в правой части (3.6). Для фиксированных $l_1, l_2 \in \partial D$ имеем (см. [5] или [7]):

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \sin\psi_1 \sin\psi_2 [I_d - I_s]\, d\psi_1\, d\psi_2 = -4\cos\alpha_1\, \cos\alpha_2,$$

где углы α_1 и α_2 суть углы между χ_{12} и ∂D в точках l_1 и l_2 соответственно, лежащие в одной полуплоскости относительно внутренности области D.
Следовательно, получаем тождество

$$\int_{\mathbb{G}} |\chi(g)|^n\, m(dg) = \frac{n}{2}\int_{\mathbb{G}} |\chi(g)|^{n-1}\, m([\chi(g)])\, dg$$

$$-\frac{n(n-1)}{4}\int_{(\partial D)^2} \chi_{12}^{n-2} m([\chi_{12}])\, \cos\alpha_1\, \cos\alpha_2\, dl_1\, dl_2, \tag{3.7}$$

которое называется обобщенным тождеством Плейеля.

В частности, если $m(dg) = dg$, т.е. $m([\chi(g)]) = 2\cdot|\chi(g)|$, мы получаем классическое тождество Плейеля:

$$\int_{\mathbb{G}} |\chi(g)|^n\, dg = \frac{n}{2}\int_{(\partial D)^2} \chi_{12}^{n-1}\, \cos\alpha_1\, \cos\alpha_2\, dl_1\, dl_2. \tag{3.8}$$

Рассуждениями аналогичными [5] или [7], получаем

$$\int_{\mathbb{G}} f(|\chi(g)|)\, m(dg) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{G}} f'(|\chi(g)|)\, m([\chi(g)])\, dg$$

$$-\frac{1}{4}\int_{(\partial D)^2} f''(|\chi_{12}|)\, m([\chi_{12}])\, \cos\alpha_1\, \cos\alpha_2\, dl_1\, dl_2 \tag{3.9}$$

для любой функции $f(x)$ два раза дифференцируемой и удовлетворяющей условию $f(0) = 0$ и для любой ограниченной выпуклой области $\mathbf{D}$, граница которой не обладает прямолинейными частями.

Используя якобиан (см. [5] или [7])

$$dl_1\, dl_2 = \frac{\chi(g)\, dg}{\sin\alpha_1\, \sin\alpha_2}$$

получаем

$$\int_{\mathbb{G}} f(|\chi(g)|)\, m(dg) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{G}} f'(|\chi(g)|)\, m([\chi(g)])\, dg$$

$$-\frac{1}{2}\int_{[D]} f''(|\chi(g)|)\, \chi(g) m([\chi(g)])\, \cot\alpha_1\, \cot\alpha_2\, dg. \tag{3.10}$$

Последняя формула есть обобщенное тождество Плейеля в общем виде. Отметим, что тождество Плейеля из [7] имеет вид:

$$\int_{\mathbb{G}} f(|\chi(g)|)\, dg = \int_{[D]} f'(|\chi(g)|)\, \chi(g)\, \cot\alpha_1\, \cot\alpha_2\, dg \tag{3.11}$$

4. ПРОВЕРКА

Проверим формулу (3.10) для меры $m(\cdot)$, сосредоточенной на прямой $g_0 \in [D]$, т.е.

$$m_0(A) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad g_0 \in A, \\ 0, & \text{если} \quad g_0 \notin A. \end{cases}$$

В этом случае имеем

$$\int_{\mathbb{G}} f(|\chi(g)|)\, m_0(dg) = f(|\chi(g_0)|)$$

и формула (3.10) принимает вид:

$$f(|\chi(g_0)|) = \frac{1}{2}\int_{[\chi(g_0)]} f'(|\chi(g)|)\, dg - \frac{1}{2}\int_{[\chi(g_0)]} f''(|\chi(g)|)\, \chi(g)\, \cot\alpha_1\, \cot\alpha_2\, dg. \tag{4.1}$$

Отметим, что формула (4.1) при $f(x) = x^n$ совпадает с формулой (1.8) из [10].

Доказательство (4.1). Запишем классическое тождество Плейеля для функции $f'(x)$ и прямоугольника D_0 с двумя параллельными сторонами равными $\chi(g_0)$, а другими двумя – бесконечно малыми сторонами равными ε:

$$\int_{[D_0]} f'(|\chi(g)|)\, dg = \int_{[D_0]} f''(|\chi(g)|)\, \chi(g)\, \cot\alpha_1\, \cot\alpha_2\, dg + \sum_{i=1}^{4}\int_0^{a_i} f'(u)\, du \tag{4.2}$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{4}\int_0^{a_i} f'(u)\, du = 2\left[f(|\chi(g_0)|) - \varepsilon\right],$$

то при $\varepsilon \to 0$ получаем (4.1).

5. СЛУЧАЙ $\mathbb{T}$-ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ В ПРИСТРАНСТВЕ $\mathbb{G}$

Меры в пространстве $\mathbb{G}$, инвариантные относительно группы $\mathbb{T}$ всех параллельных переносов плоскости $\mathbb{R}^2$), имеют следующий вид (см. [7]):

$$m(dg) = dp\,\gamma(d\phi), \tag{5.1}$$

где dp – одномерная мера Лебега, а $\gamma(d\phi)$ – некоторая мера в $\mathbf{S}_1$. Мера $\gamma(\cdot)$ называется розой направлений $\mathbb{T}$-инвариантной меры в пространстве $\mathbb{G}$.

Рассмотрим меру, роза направлений которой, сконцентрирована в точке ϕ_0. В этом случае формула (5.1) принимает вид:

$$m(dg) = dp\,\delta_{\phi_0}(d\phi), \tag{5.2}$$

где $\delta_{\phi_0}(\cdot)$ – мера, сконцентрированная в точке ϕ_0, т.е.

$$\delta_{\phi_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad \phi_0 \in A, \\ 0 & \text{если} \quad \phi_0 \notin A. \end{cases}$$

Так как в этом частном случае

$$m([\chi(p,\phi)]) = |\sin(\phi-\phi_0)| \cdot |\chi(p,\phi)|,$$

то получаем

$$\int_{p_1(\phi_0)}^{p_2(\phi_0)} f(|\chi(p,\phi_0)|)\,dp = \frac{1}{2}\int_{[D]} f'(|\chi(g)|)\,|\chi(g)|\,|\sin(\phi-\phi_0)|\,dg-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{[D]} f''(|\chi(g)|)\cdot|\chi(g)|^2\,|\sin(\phi-\phi_0)|\,\cot\alpha_1\,\cot\alpha_2\,dg, \tag{5.3}$$

где $p_1(\phi_0)$ и $p_2(\phi_0)$ суть значения p для двух параллельных касательных к границе ∂D, перпендикулярные направлению ϕ_0.

Подставляя в формулу (5.3)

$$f_y(u) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad u < y, \\ 1 & \text{если} \quad u \geq y \end{cases}$$

получаем

$$b(\phi_0)\cdot[1-F_{\phi_0}(y)] = \frac{1}{2}\int_{[D]} \delta(|\chi(g)|-y)\,|\chi(g)|\,|\sin(\phi-\phi_0)|\,dg-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{[D]} \delta'(|\chi(g)|-y)\cdot|\chi(g)|^2\,|\sin(\phi-\phi_0)|\,\cot\alpha_1\,\cot\alpha_2\,dg, \tag{5.4}$$

где $b(\phi)$ – функция ширины (ϕ – направление), а $F_\phi(y)$ – зависящая от направления функция распределения длины хорды в направлении ϕ

$$F_{\phi_0}(y) = \frac{1}{b(\phi_0)}\,\mathcal{L}_1\{p:\,|\chi(p,\phi_0)|<y\},$$

где $\mathcal{L}_1$ – одномерная мера Лебега. В формуле (5.4) производную функции $f_y(u)$ должны заменить на δ–функцию Дирака, сосредоточенную в точке y.

Проверим формулу (5.4) в случае круга радиуса R. В этом случае $b(\phi) = 2R$ для любого направления ϕ. Также имеем

$$\cot \alpha_1 = \cot \alpha_2 = \frac{\sqrt{4R^2 - \chi^2}}{\chi},$$

$$\int_0^{2\pi} |\sin(\phi - \phi_0)| \, d\phi = 4,$$

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \chi^2} \quad \text{и} \quad dp = \frac{\chi \, d\chi}{2\sqrt{4R^2 - \chi^2}}.$$

Используя формулы (см. [6])

$$\int \delta(x - y) \, f(x) \, dx = f(y),$$

$$\int \delta'(x - y) \, f(x) \, dx = -f'(y),$$

получаем

$$2R \, [1 - F_{\phi_0}(y)] = \frac{y^2}{\sqrt{4R^2 - y^2}} - (\chi \sqrt{4R^2 - \chi^2})'_{\chi = y},$$

или

$$2R \, [1 - F_{\phi_0}(y)] = \sqrt{4R^2 - y^2}.$$

Следовательно,

$$F_{\phi_0}(y) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad y \leq 0, \\ 1 - \frac{\sqrt{4R^2 - y^2}}{2R} & \text{если} \quad y \in (0, 2R). \\ 1 & \text{если} \quad y > 2R \end{cases}$$

Соответствующая плотность распределения

$$f_{\phi_0}(y) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad y \notin (0, 2R), \\ \frac{y}{2R\sqrt{4R^2 - y^2}} & \text{если} \quad y \in (0, 2R) \end{cases}$$

совпадает с видом “интегрированной” плотности распределения $f(y)$ (см. [12]).

6. СЛУЧАЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВ НА ПЛОСКОСТИ

Если D является многоугольником, то в (5.3) появляются дополнительные слагаемые вида

$$\iint_{a_i \times a_i} f''(|\chi_{12}|) \, |\chi_{12}| \, \cos \alpha_1 \, \cos \alpha_2 \, dl_1 \, dl_2,$$

где a_i – сторона многоугольника D, $i = 1, 2, ..., n$.

Так как в этом случае $\cos \alpha_1 \, \cos \alpha_2 = 1$, то интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{a_i} dl_1 \int_0^{a_i} f''(|l_2-l_1|)\,|l_2-l_1|\,dl_2 = \sum_{i=1}^n |\sin(\phi-\phi_0)| \left[\int_0^{a_i} f(u)\,du - \frac{a_i\, f(a_i)}{2}\right].$$

Следовательно, формула (5.3) для многоугольника принимает вид:

$$\int_{p_1(\phi_0)}^{p_2(\phi_0)} f(|\chi(p,\phi_0)|)\,dp = \frac{1}{2}\int_{[D]} f'(|\chi(g)|)\,\chi(g)\,|\sin(\phi-\phi_0)|\,dg-$$

$$-\frac{1}{2}\int [D] f''(|\chi(g)|)\cdot\chi^2(g)\,|\sin(\phi-\phi_0)|\,\cot\alpha_1\,\cot\alpha_2\,dg+$$

$$+\sum_{i=1}^n |\sin(\phi-\phi_0)| \left[\int_0^{a_i} f(u)\,du - \frac{a_i\, f(a_i)}{2}\right]. \tag{6.1}$$

Отметим, что здесь условие $f(0)=0$ не необходимо. Если $f(x)\equiv 1$, то получаем

$$b(\phi_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n |\sin(\phi-\phi_0)|\,a_i,$$

т.е. классическую формулу для функции ширины $b(\phi)$ в направлении ϕ_0.

Если в формулу (6.1) подставить

$$f_y(u) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad u<y, \\ 1 & \text{если} \quad u\ge y, \end{cases}$$

то получим формулу для зависящей от ориентации функции распределения длины хорды для многоугольников:

$$b(\phi_0)\cdot[1-F_{\phi_0}(y)] = \frac{1}{2}\sum_{i<j}\int_{[a_i]\cap[a_j]} \delta(|\chi(g)|-y)\,\chi(g)\,|\sin(\phi-\phi_0)|\,dg-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i<j}\int [a_i]\cap[a_j]\delta'(|\chi(g)|-y)\cdot\chi^2(g)\,|\sin(\phi-\phi_0)|\,\cot\alpha_1\,\cot\alpha_2\,dg+$$

$$+\sum_{i=1}^n |\sin(\phi-\phi_0)| \left[(a_i-y)^+ - \frac{a_i\, I(a_i\ge y)}{2}\right]. \tag{6.2}$$

Если предположим, что многоугольник D не имеет параллельных сторон, то в каждом из интегралов в сумме $\sum\limits_{i<j}$ можно провести одно интегрирование, переходя к координатам $(|\chi|,\varphi)$. Имеем (см. [7]):

$$dg = \frac{\sin\alpha_1\,\sin\alpha_2}{|\sin(\alpha_1+\alpha_2)|}\,d|\chi|\,d\varphi,$$

где α_1 – угол между a_i и хордой $\chi(g)=g\cap D$, а α_2 – угол между a_j и хордой $\chi(g)$ $(g\in[a_i]\cap[a_j])$. Следовательно, получаем

$$b(\phi_0)\cdot[1-F_{\phi_0}(y)] =$$

$$= \frac{y}{2}\sum_{i<j}\frac{1}{\sin\gamma_{ij}}\int_{\Phi_{ij}(y)} |\sin(\phi-\phi_0)|\,(\cos\phi\cos(\gamma_{ij}-\phi)+2\sin\phi\sin(\gamma_{ij}-\phi))\,d\phi+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}|\sin(\phi-\phi_0)|\left[(a_i-y)^{+}-\frac{a_i\,I(a_i\geq y)}{2}\right],$$

где γ_{ij} – угол между непараллельными сторонами a_i и a_j, и

$$\Phi_{ij}(y)=\{\varphi : \text{существует хорда с направлением } \varphi \text{ и длиной } y,$$
$$\text{соединяющая } a_i \text{ и } a_j\}.$$

Автор благодарит профессора В. К. Оганяна за полезные советы.

Abstract. A family of identities primarily associated with isoperimetric inequalities for planar convex domains was discovered by Pleijel in 1956. We call these identities classical Pleijel identities. R. V. Ambartzumian gave combinatorial proof of these identities and pointed out that they can be applied to find chord length distribution functions for convex domains. In the classical Pleijel identities integration is over the measure in the space $\mathbb{G}$ of lines which is invariant with respect to the all Euclidean motions. In the present paper they are considered for any locally-finite measure in the space $\mathbb{G}$. These identities are applied to find the so-called orientation-dependent chord length distribution (or density) functions for bounded convex domains.

Список литературы

[1] A. Pleijel, "Zwei kurze Beweise der isoperimetrischen Ungleichung," Archiv Math. **7**, 317-319 (1956).
[2] R. V. Ambartzumian, "A note on pseudo-metrics on the plane," Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. **29**, 25-31 (1973).
[3] R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon-Sylvester problem in $\mathbb{R}^3$," Z. Wahrscheinlichkeits theorie, verw. Geb. **27**, 53-74 (1973).
[4] R. V. Ambartzumian, "Stochastic geometry from the standpoint of integral geometry," Adv. Appl. Prob. **9**, 792-823 (1977).
[5] R. V. Ambartzumian, *Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology* (John Wiley and Sons, Chichester, 1982).
[6] Г. Е. Шилов, *Математический Анализ* (второй специальный курс), (Москва, МГУ, 1984).
[7] R. V. Ambartzumian, *Factorization Calculus and Geometric Probability* (Cambridge, 1990).
[8] Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении меры в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$," Изв. АН Армении, серия Математика, **27** (5), 1-21 (1992).
[9] W. Nagel, "Orientation-dependent chord length distributions characterize convex polygons", J. Appl. Prob. **30**, 730-736 (1993).
[10] Р. В. Амбарцумян, "Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии: Обзор," Известия НАН Армении, серия Математика, **34** (6), 2-46 (1999).
[11] Р. В. Амбарцумян, "Интегрирование комбинаторных разложений при наличии коллинеарностей," Известия НАН Армении, серия Математика, **43** (1), 3-28 (2008).
[12] D. Stoyan and H. Stoyan *Fractals, Random Shapes and Point Fields* (John Wiley& Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1994).

Поступила 26 апреля 2008