

БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФЛЕРА В КЛАССАХ $L^2(D)$

М. А. ГАЛДУНЦ И С. Г. РАФАЕЛЯН

Ереванский Государственный университет,
Европейская региональная образовательная академия (ЕРИСТА)
E-mail: rafayelyansg@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена выявлению параметрического представления пространств $W_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2}$ типа Винера-Пэли целых функций экспоненциального типа многих переменных, изучена базисность систем функций типа Миттаг-Лефлера в этих пространствах, а также в явном виде построена биортогональная система функций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена выявлению параметрического представления пространств $W_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2}$ типа Винера-Пэли целых функций экспоненциального типа многих переменных, изучена базисность систем функций типа Миттаг-Лефлера в этих пространствах, а также в явном виде построена биортогональная система функций.

Исходным пунктом для данной работы являются теоремы типа Винера-Пэли о параметрическом представлении некоторых весовых пространств целых функций [1]. В частности, в [1] установлена следующая теорема, на которую мы часто будем опираться.

Пусть $W_{\sigma}^{p, w}$ ($1 < p < \infty$, $-1 < w < p-1$, $\sigma > 0$) – пространство целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$ с нормой

$$(1.1) \quad \|f\|_{p, w} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^w dx \right\}^{1/p} < +\infty,$$

а

$$E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}, \quad \rho > 0, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad --$$

целая функция типа Миттаг-Лефлера порядка ρ и типа $\sigma = 1$, которая обладает известными асимптотическими свойствами, обеспечивающими возможность установления многих результатов [7].

Теорема 1. *Класс $W_{\sigma}^{2,w}$ ($-1 < w < 1$, $\sigma > 0$) совпадает с классом функций, допускающих представление вида*

$$(1.2) \quad f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} E_1(izx; \mu) \varphi(x) |x|^{\mu-1} dx$$

где $\mu = 1 + w/2$ and $\varphi(x) \in L^{2,-w}(-\sigma, \sigma)$, т.е.

$$\|\varphi\|_{L^{2,-w}(-\sigma, \sigma)} = \left\{ \int_{-\sigma}^{\sigma} |\varphi(x)|^2 |x|^{-w} dx \right\}^{1/2} < +\infty.$$

В данной статье рассматриваются весовые классы целых функций экспоненциального типа в двумерном случае. Функция $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ n -переменных называется функцией экспоненциального типа $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, если при любом $\varepsilon > 0$

$$|f(z_1, z_2, \dots, z_n)| \leq e^{(\sigma_1+\varepsilon)|z_1|+(\sigma_2+\varepsilon)|z_2|+\dots+(\sigma_n+\varepsilon)|z_n|}$$

Через $W_{\sigma_1, \sigma_2}^{p, w_1, w_2}$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < w_i < p-1$, $\sigma_i > 0$) мы обозначаем пространство целых функций $f(z_1, z_2)$ экспоненциального типа (σ_1, σ_2) с нормой

$$(1.3) \quad \|f\|_{p, w_1, w_2} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2)|^p |x_1|^{w_1} |x_2|^{w_2} dx_1 dx_2 \right\}^{1/p} < +\infty,$$

где $z_i = x_i + iy_i$ ($i = 1, 2$). Это пространство является двумерным аналогом пространства $W_{\sigma}^{p, w}$ Винера-Пэли, и для него будет доказан следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Класс $W_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2}$ ($-1 < w_i < 1$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2$) совпадает с классом функций, допускающих представление следующего вида*

$$(1.4) \quad f(z_1, z_2) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} E_1(i\tau_1 z_1; \mu_1) E_1(i\tau_2 z_2; \mu_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) |\tau_1|^{\mu_1-1} |\tau_2|^{\mu_2-1} d\tau_1 d\tau_2,$$

где $\mu_i = 1 + w_i/2$ ($i = 1, 2$) и $\varphi(\tau_1, \tau_2) \in L_2(D)$ причем $D = (-\sigma_1, \sigma_1) \times (-\sigma_2, \sigma_2)$, т.е.

$$\|\varphi\|_{L_2(D)} \equiv \left\{ \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Получен также ряд результатов о базисности систем функций типа Миттаг-Лефлера, ассоциированных с последовательностями нулей целых функций, обобщающих классы целых функций типа синуса.

Через S_λ ($-1 < \lambda < 1$) мы обозначаем класс целых функций $s(z)$ экспоненциального типа $\leq \sigma$, с последовательностью нулей $\{z_k\}$, удовлетворяющей условию

$$\inf_{k \neq j} |z_k - z_j| > 0$$

и таких, что при некоторых положительных константах c , C и K , зависящих от функции $s(z)$,

$$0 < c < |s(z)z^{-\lambda}| e^{-\sigma|\operatorname{Im} z|} < C < +\infty, \quad |\operatorname{Im} z| > K.$$

Отметим, что класс целых функций типа синуса Б. Я. Левина [4, 5] – это подкласс тех функций из S_0 , которые не имеют кратных нулей.

Далее, через $S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ мы обозначаем класс целых функций $s(z^1, \dots, z^n)$ n переменных, имеющих вид

$$s(z^1, z^2, \dots, z^n) = s_1(z^1)s_2(z^2) \cdots s_n(z^n),$$

где $s_i(z^i) \in S_{\lambda_i}$ ($i = \overline{1, n}$, $n = 1, 2, \dots$).

Полагая, что $\{z_k^i\}_0^\infty$ – последовательность корней $s_i(z^i)$, пронумерованных в порядке неубывания модулей, через $s_k^i \geq 1$ и $p_k^i \geq 1$ ($k \geq 0$) мы обозначаем кратности появления числа z_k^i соответственно на отрезке $\{z_j^i\}_0^k$ и во всей последовательности $\{z_j^i\}_0^\infty$. Далее, полагая, что

$$a_\nu^i(z_k^i) = \frac{1}{\nu!} \left\{ \frac{d^\nu}{(dz^i)^\nu} \frac{(z - z_k^i)^{p_k^i}}{s_i(z^i)} \right\}_{z^i = z_k^i}$$

и

$$g_i^k(z^i) = \sum_{\nu=0}^{p_k^i - s_k^i} a_\nu^i(z_k^i) (z - z_k^i)^\nu$$

будем рассматривать целые функции

$$\Omega_i^k(z^i) = \frac{s_i(z^i) q_i^k(z^i)}{(s_k^i - 1)! (z^i - z_k^i)^{p_k^i - s_k^i + 1}} = \frac{s_i(z^i)}{(s_k^i - 1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k^i - s_k^i} \frac{a_\nu^i(z_k^i)}{(z^i - z_k^i)^{p_k^i - s_k^i - \nu + 1}}.$$

Как известно [6], для функции

$$\Omega^\kappa(z) = \Omega_1^{i_1}(z^1) \cdots \Omega_n^{i_n}(z^n) = \prod_{i=1}^n \Omega_i^{\kappa_i}(z^i), \quad \kappa = (i_1, \dots, i_n), \quad i_j = \overline{0, \infty} :$$

справедливы следующие утверждения:

(1.5)

$$1) \frac{\partial^{(s_{i_1}^1-1+s_{i_2}^2-1+\dots+s_{i_n}^n-1)} \Omega^\kappa}{\partial^{(s_{i_1}^1-1)} z_1 \partial^{(s_{i_2}^2-1)} z_2 \dots \partial^{(s_{i_n}^n-1)} z_n} \Big|_{(z_{j_1}^1, \dots, z_{j_n}^n)} = \delta_{\kappa_i, \kappa_j} = \begin{cases} 1, & \kappa_i = \kappa_j \\ 0, & \kappa_i \neq \kappa_j \end{cases},$$

2) Если $S(z) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ и $p\lambda_i + w_i < p - 1$, то

$$(1.6) \quad \Omega^\kappa(z) \in W_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}^{p, w_1, \dots, w_n}.$$

2. ТЕОРЕМЫ ТИПА ВИНЕРА-ПЭЛИ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Доказательство теоремы 2: Как известно (см. [1], стр. 364) в представлении (1.2) класса $W_\sigma^{2, w}$ ($-1 < w < 1$, $\sigma > 0$) для функции $\varphi(x)$ имеет место следующая формула обращения:

$$(2.1) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tau v} - 1}{-iv} f(x) (e^{i\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} v} |v|)^{\mu-1} dv,$$

где $x \in (-\sigma, \sigma)$

$$(2.2) \quad \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \varphi_\sigma(x) = \varphi(x),$$

где

$$(2.3) \quad \varphi_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-i\tau v} f(v) (e^{i\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} v} |v|)^{\mu-1} dv$$

и

$$(2.4) \quad \|f\|_{2, w} \asymp \|\varphi\|_2,$$

где символ $a \asymp b$ означает, что отношение величин a/b заключено между двумя положительными постоянными.

В функции $f(z_1, z_2)$ зафиксируем переменную z_2 и получим функцию $f(z_1, \cdot)$ одной переменной, принадлежащую классу $W_{\sigma_1}^{2, w_1}$. Следовательно, имеет место следующее интегральное представление:

$$(2.5) \quad f(z_1, \cdot) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} E_1(i\tau_1 z_1; \mu_1) \varphi^*(\tau, \cdot) |\tau_1|^{\mu_1-1} d\tau_1,$$

где $\mu_1 = w_1/2 + 1$, $\varphi^*(\tau_1, \cdot) \in L_2(-\sigma_1, \sigma_1)$. Согласно формуле обращения (2.1),

$$(2.6) \quad \varphi^*(\tau_1, \cdot) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\tau_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\tau_1 v_1} - 1}{-iv_1} f(v_1, \cdot) (e^{i\frac{\pi}{2} \text{sign } v_1} |v_1|)^{\mu_1-1} dv_1,$$

где $\tau_1 \in (-\sigma_1, \sigma_1)$. Вне интервала $(-\sigma_1, \sigma_1)$ функция φ^* равна нулю. Аналогично, согласно формулам (2.2) и (2.3)

$$\lim_{s_1 \rightarrow +\infty} \varphi_{\sigma_1}^*(\tau_1, \cdot) = \varphi^*(\tau_1, \cdot),$$

где

$$(2.7) \quad \varphi_{\sigma_1}^*(\tau_1, \cdot) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} e^{-i\tau_1 v_1} f(v_1, \cdot) (e^{i\frac{\pi}{2} \text{sign } v_1} |v_1|)^{\mu_1-1} dv_1.$$

Мы докажем, что функция $\varphi^*(\cdot, z_2)$, которая уже зависит от второй переменной, принадлежит классу $W_{\sigma_2}^{2, w_2}$. Для этого достаточно доказать, что $\varphi_{\sigma_1}^*(\cdot, z_2) \in W_{\sigma_2}^{2, w_2}$. Очевидно, функция $\varphi_{\sigma_1}^*(\cdot, z_2)$ – целая функция от z_2 , так как $f(z_1, z_2)$ – целая функция. Далее, ввиду (2.7)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{\sigma_1}^*(v_1, v_2)|^2 |v_2|^{2(\mu_2-1)} dv_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} e^{-i\tau_1 v_1} f(v_1, v_2) (e^{i\frac{\pi}{2} \text{sign } v_1} |v_1|)^{\mu_1-1} dv_1 \right|^2 |v_2|^{2(\mu_2-1)} dv_2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} |f(v_1, v_2)| |v_1|^{\mu_1-1} dv_1 \right) |v_2|^{2(\mu_2-1)} dv_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} |f(v_1, v_2)| |v_1|^{\mu_1-1} |v_2|^{\mu_2-1} dv_1 \right)^2 dv_2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} |f(v_1, v_2)|^2 |v_1|^{2(\mu_1-1)} |v_2|^{2(\mu_2-1)} dv_1 \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} dv_1 \right) dv_2 \\ &= 2\sigma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} |f(v_1, v_2)|^2 |v_1|^{2(\mu_1-1)} |v_2|^{2(\mu_2-1)} dv_1 dv_2 \\ &\leq 2\sigma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(v_1, v_2)|^2 |v_1|^{w_1} |v_2|^{w_2} dv_1 dv_2 = \|f\|_{p, w_1, w_2} < +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi_{\sigma_1}^*(\cdot, \tau_2) \in L^{2, w_2}(-\infty, \infty)$. Осталось доказать, что $\varphi_{\sigma_1}^*(\cdot, z_2)$ – функция экспоненциального типа $\leq \sigma_2$ относительно z_2 . Для этого заметим, что

$$|\varphi_{\sigma_1}^*(\cdot, z_2)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} e^{-iz_1 v_1} f(v_1, z_2) (e^{i\frac{\pi}{2} \text{sign } v_1} |v_1|)^{\mu_1-1} dv_1 \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq C \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} |f(v_1, z_2)| |v_1|^{\mu_1-1} dv_1 \leq C_1 \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} e^{\sigma_2|z_2|} |v_1|^{\mu_1-1} dv_1 \\ &= e^{\sigma_2|z_2|} C_1 \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} |v_1|^{\mu_1-1} dv_1 = C_2 e^{\sigma_2|z_2|}. \end{aligned}$$

Итак, $\varphi^*(\cdot, z_2) \in W_{\sigma_2}^{2, w_2}$. Следовательно,

$$(2.8) \quad \varphi^*(\cdot, z_2) = \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} E_1(i\tau_2 z_2; \mu_2) \varphi(\cdot, \tau_2) |\tau_2|^{\mu_2-1} d\tau_2,$$

где $\varphi(\cdot, \tau_2) \in L_2(-\sigma_2, \sigma_2)$. Формулу (2.8) подставим в (2.5). Получим

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} E_1(i\tau_1 z_1; \mu_1) \varphi^*(\tau_1, z_2) |\tau_1|^{\mu_1-1} d\tau_1 \\ &= \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} E_1(i\tau_1 z_1; \mu_1) E_1(i\tau_2 z_2; \mu_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) |\tau_1|^{\mu_1-1} |\tau_2|^{\mu_2-1} d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

где $\mu_i = 1 + w_i/2$ and $\varphi(\tau_1, \tau_2) \in L_2(D)$. Теорема доказана.

Отметим, что при частных значениях параметров $\mu_1 = \mu_2 = 1$ теорема 1 переходит в следующую известную теорему Пойа-Планшереля (см. [1]).

Теорема 3. (Пойа-Планшерель) *Класс $W_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, 0, 0}$ ($\sigma_i > 0$, $i = 1, 2$) совпадает с классом функций, допускающих представление следующего вида*

$$f(z_1, z_2) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{i(z_1 t_1 + z_2 t_2)} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

где

$$\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(t_1, t_2)|^2 dt_1 dt_2 = \|\varphi\|^2 < +\infty.$$

Следующая теорема устанавливает связь между нормами функций $f(z_1, z_2) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2}$ и $\varphi(\tau_1, \tau_2) \in L_2(D)$ из представления (1.4).

Теорема 4. *Если функция $f(z_1, z_2) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2}$ ($-1 < w_i < 1$, $\sigma_i > 0$) и $\varphi(\tau_1, \tau_2) \in L_2(D)$ – соответствующая функция из представления (1.4), то*

$$(2.9) \quad \|f\|_{W_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2}} \asymp \|\varphi\|_{L_2(D)}.$$

Доказательство. Зафиксировав переменную z_2 в функции $f(z_1, z_2) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2}$, получим функцию одной переменной, принадлежащую классу $W_{\sigma_1}^{2, w_1}$. По отношению к такой функции можно применять одномерную оценку (2.4). В итоге имеем двойное неравенство

$$\begin{aligned}
C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y_1, y_2)|^2 |y_1|^{w_1} dy_1 &\leq \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 dy_1 \\
&\leq C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y_1, y_2)|^2 |y_1|^{w_1} dy_1.
\end{aligned}$$

Умножим это неравенство на $|y_2|^{w_2}$ и проинтегрируем по y_2 . Получим

$$\begin{aligned}
C'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y_1, y_2)|^2 |y_1|^{w_1} |y_2|^{w_2} dy_1 dy_2 \\
\leq \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 |y_2|^{w_2} dy_1 dy_2 \\
\leq C'_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y_1, y_2)|^2 |y_1|^{w_1} |y_2|^{w_2} dy_1 dy_2.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(2.10) \quad C'_1 \|f\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2} \leq \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 |y_2|^{w_2} dy_1 dy_2 \leq C'_2 \|f\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2}.$$

При доказательстве теоремы 2, исходя из свойств функции $\varphi^*(z_1, z_2) \in W_{\sigma_2}^{2, w_2}$ мы пришли к функции $\varphi(\tau_1, \tau_2) \in L_2(D)$. По отношению к этим двум функциям еще раз применим одномерную оценку. В итоге получим

$$A_2 \|\varphi^*\|_{\sigma_2}^{2, w_2} \leq \|\varphi\|_{L_2(\cdot, R)} \leq A_1 \|\varphi^*\|_{\sigma_2}^{2, w_2},$$

т.е.

$$\begin{aligned}
A_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 |y_2|^{w_2} dy_2 &\leq \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} |\varphi(y_1, y_2)|^2 dy_2 \\
&\leq A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 |y_2|^{w_2} dy_2.
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
A_2 \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 |y_2|^{w_2} dy_1 dy_2 &\leq \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(y_1, y_2)|^2 dy_1 dy_2 \\
(2.11) \quad &\leq A_1 \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(y_1, y_2)|^2 |y_2|^{w_2} dy_1 dy_2.
\end{aligned}$$

Связывая неравенства (2.10) и (2.11) получим

$$B_1 \|f\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2} \leq \|\varphi\|_{L_2(D)} \leq B_2 \|f\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2}$$

и

$$\|\varphi\|_{L_2(D)} \asymp \|f\|_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2}$$

3. БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФЛЕРА

Пусть $\sigma_i > 0$, $-1 < w_i < 1$ ($i = 1, 2$) и $s(z) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, т.е. $s(z) = s_1(z^1) \dots s_n(z^n)$, где $s_i(z^i) \in S_{\lambda_i}$. Напомним, что $\{z_k^i\}_0^\infty$ – последовательность корней $s_i(z^i)$, а s_k^i и p_k^i – соответственно кратности нулей на отрезке последовательности и во всей последовательности.

Докажем следующую теорему о базисности систем функций типа Миттаг-Леффлера.

Теорема 5. Система функций

$$(3.1) \quad \{G_{\ell,p}(\tau_1, \tau_2)\}_{\ell,p} \equiv \left\{ E_1^{(s_\ell^1-1)}(i\tau_1 z_\ell^1; \mu_1) ((i\tau_1)^{s_\ell^1-1} E_1^{(s_p^2-1)}(i\tau_2 z_p^2; \mu_2) (i\tau_2)^{s_p^2-1} |\tau_1|^{\mu-1} |\tau_2|^{\mu_2-1}) \right\}_{\ell,p},$$

где $\mu_i = 1 + w_i/2$ и $-1 < w_i + 2\lambda_i < 1$ ($i = 1, 2$) является базисом Рисса в пространстве $L_2(D)$, т.е. любая функция $f(x_1, x_2) \in L_2(D)$ единственным образом разлагается в ряд

$$(3.2) \quad f(x_1, x_2) = \sum_{\ell,p} C_{\ell,p}(f) G_{\ell,p}(x_1, x_2),$$

сходящийся по норме пространства $L_2(D)$ и

$$(3.3) \quad C_{\ell,p}(f) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} f(x_1, x_2) \varphi_{\ell,p}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Также

$$(3.4) \quad \|f\|_{L_2(D)} \asymp \|\{C_{\ell,p}\}\|_{\ell^2, \lambda_1, \lambda_2},$$

где $\{\varphi_{\ell,p}(x_1, x_2)\}$ – биортогональная система функций $\{G_{\ell,p}(\tau_1, \tau_2)\}$.

Доказательство. Как известно (см. [6]), если $\{z_k^i\}_0^\infty$ – нули функции $s_i(z^i)$ ($i = \overline{1, n}$, $w_i + p\lambda_i \in (-1, p-1)$), то система функций $\{\Omega^\kappa(z)\}_{\kappa \in \mathbb{R}_+^n}$ образует базис Рисса в пространстве $W_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}^{p, w_1, \dots, w_n}$, т.е. всякая $f(z) \in W_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}^{p, w_1, \dots, w_n}$ единственным образом разлагается в ряд

$$(3.5) \quad f(z) = \sum_{\kappa \in \mathbb{R}_+^n} C_\kappa(f) \Omega^\kappa(z),$$

где

$$(3.6) \quad C_\kappa(f) = \frac{\partial^{(s_{i_1}^1-1+\dots+s_{i_n}^n-1)} f(z_{i_1}^1, \dots, z_{i_n}^n)}{\partial^{s_{i_1}^1-1} z^1 \partial^{s_{i_2}^2-1} z^2 \dots \partial^{s_{i_n}^n-1} z^n}, \quad \kappa = (i_1, i_2, \dots, i_n).$$

Так как ряд (3.5) сходится в $W_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}^{p, w_1, \dots, w_n}$ и

$$\|f\|_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}^{p, w_1, \dots, w_n} \asymp \|\{C_\kappa\}\|_{\ell^{p, \lambda_1, \dots, \lambda_n}},$$

то, используя (1.6), при $w_i + 2\lambda_i < 1$ ($i = 1, 2$) имеем

$$\Omega^\kappa(z) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2}.$$

Следовательно, по теореме 2 существует система функций

$$\{\varphi_\kappa(x_1, x_2)\}_{\kappa \in \mathbb{R}_+^2} \quad (\varphi_\kappa(x_1, x_2) \in L_2(D)),$$

для которых имеют место равенства

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & \Omega^\kappa(z^1, z^2) \\ &= \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} E_1(i\tau_1 z^1; \mu_1) E_2(i\tau_2 z^2; \mu_2) |\tau_1|^{\mu_1-1} |\tau_2|^{\mu_2-1} \varphi_\kappa(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

где $\mu_i = 1 + w_i/2$ ($i = 1, 2$), и каждая из функций $\varphi_\kappa(x_1, x_2)$ определяется единственным образом по $\Omega^\kappa(z^1, z^2)$. После $(s_\ell^1 - 1)$ и $(s_p^2 - 1)$ - кратного дифференцирования (3.7) соответственно по z^1 и z^2 , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{s_\ell^1-1+s_p^2-1} \Omega^\kappa(z_\ell^1; z_p^2)}{\partial^{s_\ell^1-1} z^1 \partial^{s_p^2-1} z^2} = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} \left\{ \frac{\partial^{s_\ell^1-1} E_1(i\tau_1 z_\ell^1; \mu_1)}{\partial^{s_\ell^1-1} z^1} (i\tau_1)^{(s_\ell^1-1)} \right. \\ & \quad \times \left. \frac{\partial^{s_p^2-1} E_2(i\tau_2 z_p^2; \mu_2)}{\partial^{s_p^2-1} z^2} (i\tau_2)^{(s_p^2-1)} |\tau_1|^{\mu_1-1} |\tau_2|^{\mu_2-1} \varphi_\kappa(\tau_1, \tau_2) \right\} d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Далее, ввиду интерполяционных свойств (1.5) $\Omega^\kappa(z)$

$$\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} G_{\ell, p}(\tau_1, \tau_2) \varphi_\kappa(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \delta_{(\kappa, \ell)},$$

где $\kappa = (i_1, i_2)$ и $\ell = (\ell, p)$. Следовательно, система функций $\{\varphi_\kappa(\tau_1, \tau_2)\}_{\kappa \in \mathbb{R}_+^2}$ биортогональной системе $\{G_{\ell, p}(\tau_1, \tau_2)\}_{\ell, p}$, где

$$\begin{aligned} G_{\ell, p}(\tau_1, \tau_2) &= \frac{\partial^{s_\ell^1-1} E_1(i\tau_1 z_\ell^1; \mu_1)}{\partial^{s_\ell^1-1} z^1} (i\tau_1)^{s_\ell^1-1} \\ &\times \frac{\partial^{s_p^2-1} E_2(i\tau_2 z_p^2; \mu_2)}{\partial^{s_p^2-1} z^2} (i\tau_2)^{s_p^2-1} |\tau_1|^{\mu_1-1} |\tau_2|^{\mu_2-1}. \end{aligned}$$

Из теоремы 2 следует, что (1.4) - ограниченный интегральный оператор отображающий $L_2(D)$ на $W_{\sigma_1, \sigma_2}^{p, w_1, w_2}$. С другой стороны, система функций $\{\Omega^\kappa(z)\}_{\kappa \in \mathbb{R}_+^2}$ образует базис Рисса в $W_{\sigma_1, \sigma_2}^{p, w_1, w_2}$ [6]. Следовательно, система $\{\varphi_\kappa(x_1, x_2)\}_{\kappa \in \mathbb{R}_+^2}$ также является базисом Рисса в пространстве $L_2(D)$. А так как эта система функций биортогональна с системой (3.1), то система (3.1) также образует базис Рисса в $L_2(D)$. Поэтому, если $f \in L_2(D)$, то

$$(3.8) \quad f(x_1, x_2) = \sum_{(\ell, p)} C_{\ell, p}(f) G_{\ell, p}(x_1, x_2),$$

где ряд (3.8) сходится по норме пространства $L_2(D)$, и имеют место соотношения:

$$C_{\ell, p}(f) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} f(x_1, x_2) \varphi_{(\ell, p)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\ \|f\|_{L_2(D)} \asymp \|\{C_{(\ell, p)}\}\|_{\ell^\ell, \lambda_1, \lambda_2}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь некоторые специальные случаи теоремы 5, которые представляют особый интерес.

1°. Пусть $w_i = 0$, $\mu_i = 1$ и $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, 2$). Тогда ввиду того, что $E_1(z; 1) = e^z$, система (3.1) переходит в

$$(3.9) \quad \left\{ e^{i(z_\ell^1 \tau_1 + z_p^2 \tau_2)} (i\tau_1)^{s_\ell^1 - 1} (i\tau_2)^{s_p^2 - 1} \right\}_{\ell, p},$$

и приходим к следующей теореме

Теорема 6. Пусть $\{z_k^i\}_{k, i}$ - последовательность нулей функций $s_i(z^i) = s_{\chi_i}$. Пусть $-\frac{1}{2} < \chi_i < \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2$), $s(z) = s_1(z^1)s_2(z^2)$, $s(z) \in s_{\lambda_1, \lambda_2}$, и пусть s_ℓ^1 и s_p^2 - кратности появления чисел z_ℓ^1 , z_p^2 на соответствующих отрезках. Тогда система функций (3.9) образует базис Рисса в $L_2(D)$.

2°. При $-1 < w_i < 1$, $\chi_i = 0$ ($i = 1, 2$) и $s_\ell^1 = s_p^2 = 1$ система (3.1) переходит в некоторую систему, для которой верна

Теорема 7. Пусть $\{z_k^i\}_{k, i}$ - последовательность нулей функций $s_i(z^i) \in S_0$, $s(z) = s_1(z^1)s_2(z^2)$, $s(z) \in S_{0,0}$ ($\chi_i = 0$, $s_\ell^1 = s_p^2 = 1$) ($i = 1, 2$). Тогда система функций

$$\left\{ E_1(i\tau_1 z_\ell^1; \mu_1) |\tau_1|^{\mu_1 - 1} E_1(i\tau_2 z_p^2; \mu_2) |\tau_2|^{\mu_2 - 1} \right\}_{(\ell, p) \in \mathbb{R}_+^2},$$

где $\mu_i = 1 + w_i/2$ образует базис Рисса в $L_2(D)$.

4. ПОСТРОЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

В этом параграфе будем полагать, что $\{z_\ell^1\}_\ell$ и $\{z_p^2\}_p$ — соответственно нули целых функций

$$\begin{aligned} s_1(z^1; \nu_1) &= E_1(i\sigma_1 z^1; \nu_1) - E_1(-i\sigma_1 z^1; \nu_1), \quad 0 < \nu_1 < 2, \quad s_1(z^1, \nu_1) \in s_{1-\nu_1}, \\ s_2(z^2; \nu_2) &= E_1(i\sigma_2 z^2; \nu_2) - E_1(-i\sigma_2 z^2; \nu_2), \quad 0 < \nu_2 < 2, \quad s_2(z^2, \nu_2) \in s_{1-\nu_2}. \end{aligned}$$

Мы докажем, что в этом случае биортогональная к (3.1) система имеет определенное аналитическое представление.

Как известно [1], функции $s_1(z^1; \nu_1)$ и $s_2(z^2; \nu_2)$ допускают представление вида

$$(4.1) \quad s_1(z^1; \nu_1) = 2iz^1 E_{1/2}(-\sigma_1^2(z^1)^2; 1 + \nu_1),$$

$$(4.2) \quad s_2(z^2; \nu_2) = 2iz^2 E_{1/2}(-\sigma_2^2(z^2)^2; 1 + \nu_2).$$

Кроме того, все нули функции $E_{1/2}(z; \mu)$ просты и вещественны $1 \leq \mu < 3$ [7]. Отсюда и из (4.1) и (4.2) вытекает, что все нули функций s_1 и s_2 ($1 \leq \nu_{1,2} < 2$) тоже просты и вещественны.

Мы воспользуемся следующей формулой, которая имеет место для любых $\alpha, \beta > 0$ и комплексных λ^* и λ [1]:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} &\int_0^{\sigma_1} x^{\alpha-1} E_\rho(\lambda x^{1/\rho}; \alpha) (\sigma - x)^{\beta-1} E_\rho(\lambda^*(\sigma - x)^{1/\rho}; \beta) dx \\ &= \frac{\lambda E_\rho(\sigma^{1/\rho} \lambda; \lambda + \beta) - \lambda^* E_\rho(\sigma^{1/\rho} \lambda^*; \alpha + \beta)}{\lambda - \lambda^*} \sigma^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

Полагая $\rho = 1$, $\alpha = \mu$, $\beta = 1 + \nu - \mu$ и пользуясь равенством

$$z E_1(z; \mu + 1) = \frac{E_1(z; \mu) - 1}{\Gamma(\mu)}$$

формулу (4.3) можем записать в виде

$$(4.4) \quad \begin{aligned} &\int_0^\sigma x^{\mu-1} E_1(\lambda x; \mu) (\sigma - x)^{\beta-1} E_1(\lambda^*(\sigma - x); \beta) dx \\ &= \frac{E_1(\sigma \lambda; \nu) - E_1(\sigma \lambda^*; \nu)}{\lambda - \lambda^*} \sigma^{\nu-1}. \end{aligned}$$

Вместо λ и λ^* подставим соответственно $-\lambda$ и $-\lambda^*$ и полученную формулу просуммируем с (4.4), тогда получим

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma}^{\sigma} |x|^{\mu-1} E_1(\lambda x; \mu) (\sigma - |x|)^{\beta-1} E_1(\lambda^*(\sigma - |x|) \operatorname{sgn} x; \beta) dx \\ = (s_1(-i\lambda; \nu) + s_1(i\lambda^*; \nu)) \sigma^{\nu-1}. \end{aligned}$$

Подставляя здесь $\lambda^* = iz^k$ и пользуясь обозначениями

$$\left\{ E_1(iz_k^1 x; \mu) |x|^{\mu-1} \right\}_0^{\infty} \equiv \left\{ e_{\mu}(x; iz_k^1) \right\}_0^{\infty},$$

где $\{z_k^1\}_0^{\infty}$ – нули функции $s_1(z^1; \nu)$, получим

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} e_{\mu}(x; \lambda) e_{\beta}(\sigma - |x| \operatorname{sgn} x; iz_k^1) dx = \frac{s_1(i\lambda; \nu)}{\lambda - iz_k^1} \sigma^{\nu-1}$$

Так как $\lambda = iz_k^1$ – простые нули функции $s_1(-i\lambda; \nu)$, то

$$\left. \frac{s_1(-i\lambda; \nu)}{\lambda - iz_k^1} \right|_{\lambda=iz_n^1} = \begin{cases} -is'_1(z_n^1; \nu) & \text{при } n = k \\ 0 & \text{при } n \neq k. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} e_{\mu}(x; iz_n^1) e_{\beta}((\sigma - |x|) \operatorname{sgn} x; iz_k^1) dx = \begin{cases} -is'_1(z_n^1; \nu) \sigma^{\nu-1}, & n = k \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Аналогичное равенство имеет место также для функции $s_2(z^2; \nu_2)$, т.е.

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma_{1,2}}^{\sigma_{1,2}} e_{\mu_{1,2}}(x_{1,2}; iz_{k_{1,2}}^{1,2}) e_{\beta_{1,2}}((\sigma_{1,2} - |x_{1,2}|) \operatorname{sgn} x_{1,2}; iz_{k_{1,2}}^{1,2}) dx_{1,2} \\ = \begin{cases} -is'_{1,2}(z_{n_{1,2}}^{1,2}; \nu_{1,2}) \sigma_{1,2}^{\nu_{1,2}-1} & \text{при } n_{1,2} = k_{1,2} \\ 0 & \text{при } n_{1,2} \neq k_{1,2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Умножая эти два равенства, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} E_1(iz_{n_1}^1 x_1; \mu_1) |x_1|^{\mu_1-1} E_1(iz_{n_2}^2 x_2; \mu_2) |x_2|^{\mu_2-1} \\ \times e_{\beta_1}((\sigma_1 - |x_1|) \operatorname{sgn} x_1; iz_{k_1}^1) e_{\beta_2}((\sigma_2 - |x_2|) \operatorname{sgn} x_2; iz_{k_2}^2) dx_1 dx_2 \\ = \begin{cases} -s'_1(z_{n_1}^1; \nu_1) \sigma_1^{\nu_1-1} s'_2(z_{n_2}^2; \nu_2) \sigma_2^{\nu_2-1} & \text{при } (n_1, n_2) = (k_1, k_2) \\ 0 & \text{при } (n_1, n_2) \neq (k_1, k_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 8. *Системы функций*

$$\left\{ E_1(iz_{n_1}^1 x_1; \mu_1) |x_1|^{\mu_1-1} E_1(iz_{n_2}^2 x_2; \mu_2) |x_2|^{\mu_2-1} \right\}_{n_1, n_2}$$

$$u \quad \left\{ \frac{-e_{\beta_1}((\sigma_1 - |x_1|) \operatorname{sgn} x_1; iz_{k_1}^1) e_{\beta_2}((\sigma_2 - |x_2|) \operatorname{sgn} x_2; iz_{k_2}^2)}{\sigma_1^{\nu_1-1} \sigma_2^{\nu_2-1} s_1'(z_{k_1}^1; \nu_1) s_2'(z_{k_2}^2; \nu_2)} \right\}_{k_1, k_2},$$

где $\beta_{1,2} = 1 + \nu_{1,2} - \mu_{1,2}$, биортгональны на D .

В случае $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ($\beta_1 = \nu_1$, $\beta_2 = \nu_2$) система функций $\{e_\mu(x; iz_k)\}_0^\infty$ переходит в $\{e^{iz_k x}\}_0^\infty$, и получаем следующее

Следствие 1. . Системы функций

$$\left\{ e^{iz_{n_1}^1 x_1} e^{iz_{n_2}^2 x_2} \right\}_{(n_1, n_2) \in \mathbb{R}_+^2}$$

$$u \quad \left\{ \frac{-e_{\beta_1}((\sigma_1 - |x_1|) \operatorname{sgn} x_1; iz_{k_1}^1) e_{\beta_2}((\sigma_2 - |x_2|) \operatorname{sgn} x_2; iz_{k_2}^2)}{\sigma_1^{\nu_1-1} \sigma_2^{\nu_2-1} s_1'(z_{k_1}^1; \nu_1) s_2'(z_{k_2}^2; \nu_2)} \right\}_{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}_+^2},$$

которые образуют базис Рисса в $L_2(D)$, биортгональны на D .

Abstract. The paper finds some descriptive representations of the Wiener-Paley type spaces $W_{\sigma_1, \sigma_2}^{2, w_1, w_2}$ of exponential type entire functions of several variables, studies the basis property of Mittag-Leffler type functions in these spaces and explicitly constructs the biorthogonal system.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области* (Наука, Москва, 1966).
- [2] С. Г. Рафаелян, "Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа", Изв. АН АССР, Математика **18** (3), 167-186 (1983).
- [3] М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян, "О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L_p ", ДАН АССР, **53** (1), 29-36 (1981).
- [4] В. Я. Левин, "О базисах показательных функций в $L^2(-\pi, \pi)$ ", Зап. физ.-мат. фак.-та Харьковского ГУ, **4** (27), 39-48 (1961).
- [5] В. Я. Левин, "Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа", Сб. Мат.-физика и функциональный анализ, ФТИНТ АН УССР, Харьков, **1** 136-146 (1969).
- [6] М. А. Галдунц, С. Г. Рафаелян, "Интерполяция и базисность в некоторых классах целых функций экспоненциального типа многих переменных", Изв. НАН Армении, Математика, **42** (5), 17-32 (2007).
- [7] М. М. Djrbashian, *Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain* (Birkhauser Verlag, Basel, 1993).
- [8] М. М. Джрбашян, "Теоремы единственности аналитических функций, асимптотически представляемых рядами Дирихле-Тейлора", Изв. НАН Армении, Математика, **8** (4), 580-626 (1973).

Поступила 15 июня 2008