

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ТИПА ОДНОМЕРНЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. КАМАЛЯН И В. В. СИМОНЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *kamalyan_armen@yahoo.com*, *smnvhn@yahoo.com*

Аннотация. В работе предлагается метод решения одномерных псевдодифференциальных уравнений неотрицательного порядка с символом вида $A_1(\xi) + \text{th}(kx + \omega)A_2(\xi)$. Метод основан на сведении псевдодифференциального уравнения к некоторому сингулярному интегральному уравнению. Получены интегральные представления для решений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих прикладных задачах возникает необходимость обращения одномерных псевдодифференциальных операторов

$$A(x, D) = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} A(x, \xi) F_{x \rightarrow \xi},$$

с символами вида

$$A(x, \xi) = A_1(\xi) + \varphi(x)A_2(\xi), \quad x, \xi \in \mathbb{R}.$$

Особый интерес представляют псевдодифференциальные операторы, допускающие явное обращение. Исключительным в этом смысле является оператор “плавного перехода”, обнаруженный Ю. И. Черским [1] (см. также [2, 3, 4]). Им было показано, что уравнение

$$(1) \quad y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)y(t)dt + \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)y(t)dt = f,$$

$$k_1, k_2 \in L_1(\mathbb{R}), \quad y, f \in L_2(\mathbb{R})$$

может быть решено в замкнутой форме в случае когда $\varphi(x) = \text{th}(x/2)$. Метод решения, предложенный в [1], основан на сведении интегрального уравнения к краевой задаче для аналитических функций.

Другой подход исследования операторов “плавного перехода” предложен в работе [5], где исследование на разрешимость оператора $A(x, D)$ в случае непрерывных на оси φ (включая $\pm\infty$) и $A_i \in L_\infty(\mathbb{R})$ ($i = 1, 2$), сводится к соответствующей задаче для некоторого сложного интегрального оператора на полуоси (т.е. представителя алгебры, порожденной сингулярным оператором и операторами умножения на функцию). Последнее обстоятельство позволило несколько расширить класс уравнений “плавного перехода”, разрешаемых в замкнутой форме.

Данная работа посвящена исследованию псевдодифференциальных операторов $A(x, D)$ неотрицательного порядка в случае

$$\varphi(x) = \operatorname{th}(kx + \omega), \quad k > 0, \quad \omega \in \mathbb{C}, \quad |\operatorname{Im} \omega| < \pi/2.$$

Разрешимость уравнения $A(x, D)u = f$ в классах Соболева–Слободецкого сводится к соответствующей задаче для характеристического сингулярного уравнения на оси в некотором весовом пространстве $L_2(\mathbb{R}, \rho)$. Теория разрешимости характеристических сингулярных интегральных уравнений общеизвестна (см. [6]) и основана на возможности факторизации символа сингулярного оператора.

В случае, когда функция факторизуема и известен ее индекс, факторизация может быть явно построена с помощью интегралов Коши. В настоящее время (см. [6, 7]) критерии существования факторизации и формулы вычисления индекса получены для широких классов функций (непрерывных, кусочно-непрерывных и т.д.).

В случае дифференциальных операторов, т.е. когда $A_i(\xi)$ – полиномы, в настоящей статье строится явная факторизация символа сингулярного оператора и для решений из класса Соболева–Слободецкого получены интегральные представления.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Пусть X_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) – линейные пространства над полем комплексных чисел,

$$\tilde{\omega}_1 : X_1 \rightarrow X_2, \quad \tilde{\omega}_2 : X_2 \rightarrow X_1, \quad \tilde{\omega}_3 : X_1 \rightarrow X_3, \quad \tilde{\omega}_4 : X_4 \rightarrow X_1, \quad \tilde{\omega}_5 : X_4 \rightarrow X_5$$

– линейные отображения и $\tilde{\omega}_4$ – обратимое отображение. Рассмотрим линейные отображения

$$\begin{aligned}
\tilde{T} : X_2 &\rightarrow X_2 \oplus X_3, & \tilde{K} : X_4 \oplus X_5 &\rightarrow X_1 \oplus X_3 \oplus X_5, \\
A_{12} : X_1 \oplus X_3 \oplus X_5 &\rightarrow X_2 \oplus X_3, & A_{21} : X_2 &\rightarrow X_4 \oplus X_5, \\
A_{22} : X_1 \oplus X_3 \oplus X_5 &\rightarrow X_4 \oplus X_5, & B_{11} : X_2 \oplus X_3 &\rightarrow X_2, \\
B_{12} : X_4 \oplus X_5 &\rightarrow X_2, & B_{21} : X_2 \oplus X_3 &\rightarrow X_1 \oplus X_3 \oplus X_5,
\end{aligned}$$

определенные равенствами

$$\begin{aligned}
\tilde{T} &= \begin{bmatrix} I_{X_2} + \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \tilde{\omega}_2 \end{bmatrix}, & A_{12} &= \begin{bmatrix} -\tilde{\omega}_1 & 0 & 0 \\ -\tilde{\omega}_3 & I_{X_3} & 0 \end{bmatrix}, & A_{21} &= \begin{bmatrix} -\tilde{\omega}_4^{-1} \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_5 \tilde{\omega}_4^{-1} \tilde{\omega}_2 \end{bmatrix}, \\
A_{22} &= \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_4^{-1} & 0 & 0 \\ -\tilde{\omega}_5 \tilde{\omega}_4^{-1} & 0 & I_{X_5} \end{bmatrix}, & B_{11} &= [I_{X_2} & 0], & B_{12} &= [\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_4 & 0], \\
B_{21} &= \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_2 & 0 \\ 0 & I_{X_3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \tilde{K} &= \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_4 + \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_4 & 0 \\ \tilde{\omega}_3 \tilde{\omega}_4 & 0 \\ \tilde{\omega}_5 & I_{X_5} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Непосредственным подсчетом нетрудно убедиться в тождестве

$$\begin{bmatrix} \tilde{T} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & \tilde{K} \end{bmatrix}.$$

Из этого тождества и результатов работы [8] следует следующее утверждение.

Предложение 1. Если $\tilde{K}^{(-1)}$ – псевдообратное к $\tilde{K}$, то отображение

$$\tilde{T}^{(-1)} = B_{11} - B_{12} \tilde{K}^{(-1)} B_{21}$$

является псевдообратным к $\tilde{T}$. Аналогично, если $\tilde{T}^{(-1)}$ – псевдообратное к $\tilde{T}$, то

$$\tilde{K}^{(-1)} = A_{22} - A_{21} \tilde{T}^{(-1)} A_{12}$$

является псевдообратным к $\tilde{K}$. Пространства $\text{Ker } \tilde{T}$ и $\text{Ker } \tilde{K}$ изоморфны. Кроме того справедливы равенства:

$$\text{Ker } \tilde{T} = B_{12} \text{Ker } \tilde{K}, \quad \text{Ker } \tilde{K} = A_{21} \text{Ker } \tilde{T},$$

$$\text{Im } \tilde{T} = B_{21}^{-1} \text{Im } \tilde{K}, \quad \text{Im } \tilde{K} = A_{12}^{-1} \text{Im } \tilde{T}.$$

2.2. Пусть S_Γ – оператор сингулярного интегрирования вдоль контура Γ :

$$(S_\Gamma y)(t) = \frac{1}{\pi i} \text{ v.p. } \int_\Gamma y(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} \quad (t \in \Gamma).$$

Если Γ – замкнутый контур расширенной плоскости и оператор S_Γ ограничен в пространстве $L_2(\Gamma, \tilde{\rho})$, где $\tilde{\rho}$ – весовая функция, определенная на контуре Γ , то через $\mathbb{P}_\Gamma^\pm$ обозначим действующие в пространстве $L_2(\Gamma, \tilde{\rho})$ проекторы, определенные равенствами $\mathbb{P}_\Gamma^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S_\Gamma)$. Пусть $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ и $p > 0$. Обозначим через $H_p^+(\mathbb{T})$ ($H_p^-(\mathbb{T})$) класс Харди аналитических внутри (вне) круга функций, а через $H_p^+(\mathbb{R})$ ($H_p^-(\mathbb{R})$) класс Харди аналитических в верхней (нижней) полуплоскости функций. Скажем, что $f \in L_p^\pm(\mathbb{T})$ ($f \in L_p^\pm(\mathbb{R})$), если существует функция из $H_p^\pm(\mathbb{T})$ ($H_p^\pm(\mathbb{R})$), граничные значения которой совпадают с f .

Пусть $B : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ – оператор “пересадки”, определенный равенством

$$(B\varphi)(\zeta) = (1 - \zeta)^{-1} \varphi(\tau(\zeta)), \quad \tau(\zeta) = i(\zeta + 1)/(1 - \zeta),$$

так, что $B^{-1}S_{\mathbb{T}}B = S_{\mathbb{R}}$ (см. [6]). Кроме того, условие $g_\pm \in L_2^\pm(\mathbb{T})$ эквивалентно условию $B^{-1}g_\pm \in L_2^\pm(\mathbb{R})$ [9].

Как известно (см. [10])

$$L_2^\pm(\mathbb{T}) = \mathbb{P}_\mathbb{T}^\pm L_2(\mathbb{T}) \quad \text{и} \quad L_2^\pm(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_\mathbb{R}^\pm L_2(\mathbb{R}).$$

Пользуясь данной аналогией, под пространством $L_2^\pm(\Gamma, \tilde{\rho})$ мы понимаем пространство $\mathbb{P}_\Gamma^\pm L_2(\Gamma, \tilde{\rho})$ (см. [6]).

Ниже под $\rho(z) = z^\beta$ ($-1 < \beta < 1$) мы понимаем аналитическую в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ ветвь этой функции, принимающую положительные значения на положительной полуоси. Рассмотрим функции

$$\rho_+(z) = \rho(\tau(z)) \quad (|z| < 1) \quad \text{и} \quad \rho_-(z) = \rho(\tau(z)) \quad (|z| > 1).$$

Условие $f_\pm \in L_2^\pm(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ эквивалентно условию $f_\pm \rho_\pm^{1/2} \in L_2^\pm(\mathbb{T})$. Действительно, из условия $f_\pm \in L_2^\pm(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ следует, что $f_\pm = \mathbb{P}_\mathbb{T}^\pm f$, где $f \in L_1(\mathbb{T})$, следовательно, $f_\pm \in L_1^\pm(\mathbb{T})$. Поскольку $\rho_\pm^{1/2} \in L_2^\pm(\mathbb{T})$, то $f_\pm \rho_\pm^{1/2} \in L_{2/3}^\pm(\mathbb{T}) \cap L_2(\mathbb{T})$, и потому $f_\pm \rho_\pm^{1/2} \in L_2^\pm(\mathbb{T})$ (см. [11], стр. 264-266). Обратно, если $f_\pm \rho_\pm^{1/2} \in L_2^\pm(\mathbb{T})$, то из условия $\rho_\pm^{-1/2} \in L_2^\pm(\mathbb{T})$ следует, что $f_\pm \in L_1^\pm(\mathbb{T})$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{T}} f_+(t) t^k dt = 0$$

для всех неотрицательных целых значений k , и

$$\int_{\mathbb{T}} f_{-}(t) t^k dt = 0$$

для всех неположительных целых k . Поскольку $f_{\pm} \in L_2(\mathbb{T}, |\tau|^{\beta})$, то из этих условий следует, что $f_{\pm} \in L_2^{\pm}(\mathbb{T}, |\tau|^{\beta})$ (см. [6], гл. II, теоремы 4.4 и 4.5).

Под факторизацией функции $\Psi \in L_{\infty}(\mathbb{R})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$ мы будем понимать представление

$$(2) \quad \Psi(t) = \Psi_{-}(t) \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{\kappa} \Psi_{+}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$(3) \quad \frac{1}{t-i} \left(t^{\beta/2} \Psi_{-}(t) \right)^{\pm 1} \in L_2^{-}(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{t+i} \left(t^{-\beta/2} \Psi_{+}(t) \right)^{\pm 1} \in L_2^{+}(\mathbb{R}),$$

оператор $\Lambda_{\Psi_{+}^{-1} S_{\mathbb{R}} \Lambda_{\Psi_{+}}}$ ограничен в $L_2(\mathbb{R})$, а число κ (индекс функции Ψ) – целое. Обозначим

$$\tilde{\Psi}(\zeta) = \Psi(\tau(\zeta)), \quad \tilde{\Psi}_{\pm}(\zeta) = \Psi_{\pm}(\tau(\zeta)),$$

пользуясь равенством

$$L_2^{\pm}(\mathbb{T}, |\tau|^{\beta}) = \rho_{\pm}^{-1/2} L_2^{\pm}(\mathbb{T})$$

и свойствами оператора “пересадки”, нетрудно убедиться, что (2) является факторизацией в $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$ тогда и только тогда, когда представление

$$\tilde{\Psi}(\zeta) = \tilde{\Psi}_{-}(\zeta) \zeta^{\kappa} \tilde{\Psi}_{+}(\zeta)$$

является обобщенной факторизацией $\tilde{\Psi}$ в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^{\beta})$ относительно контура $\mathbb{T}$ (см. [6], гл.8). Эта связь позволяет перевести известные результаты теории сингулярных интегральных операторов, определенных на ограниченных контурах (см. [6], гл. 8) на случай вещественной оси. Приведем некоторые из этих результатов, необходимые нам в дальнейшем. Ниже через Λ_u обозначается оператор умножения на функцию u (т.е. $\Lambda_u y = uy$).

Предложение 2. Пусть функция Ψ допускает факторизацию в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$. Тогда оператор $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{+} \Lambda_{\Psi} + \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{-}$ обратим справа, слева или с двух сторон в зависимости от того будет ли число κ соответственно отрицательным, положительным или равным нулю.

Во всех случаях оператор, обратный к $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^+ \Lambda_{\Psi} + \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^-$ с существующей стороны задается равенством

$$\begin{aligned} & (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^+ \Lambda_{\Psi} + \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^-)^{-1} = \\ & = \left(\Lambda_{\Psi_{-1}} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^+ \Lambda_{\Psi_{+1}^{-1}} + \Lambda_{\Psi_{-1}} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^- \Lambda_{\Psi_{+1}^{-1}} \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{\kappa} \Lambda_{\Psi} \right) \left(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^+ \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{\kappa} I + \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^- \right). \end{aligned}$$

Если $\kappa < 0$, то

$$\begin{aligned} & \text{Ker } [\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^+ \Lambda_{\Psi} + \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^-] \\ & = \text{span} \left\{ \frac{1}{t+i} \Psi_{+1}^{-1}(t), \frac{1}{t+i} \Psi_{+1}^{-1}(t) \frac{t-i}{t+i}, \dots, \frac{1}{t+i} \Psi_{+1}^{-1}(t) \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{-\kappa-1} \right\}, \end{aligned}$$

если $\kappa > 0$, то уравнение $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^+ \Lambda_{\Psi} + \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^-)y = f$ ($f \in L_2(\mathbb{R}, |t|^{\beta})$) разрешимо тогда и только тогда, когда имеют место следующие условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\Psi_{-1}^{-1}(t) - \Psi_{+1}(t) \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{\kappa} \right] \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{-j} \frac{dt}{t+i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \kappa.$$

3. СВЯЗЬ С СИНГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

3.1. Пусть $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$ ($r \in \mathbb{R}$) – пространство Соболева–Слободецкого обобщенных функций u , преобразование Фурье $\hat{u}$ которых принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}, (1 + |x|)^r)$. Следуя [12], класс локально суммируемых на $\mathbb{R}$ функций A , удовлетворяющих условию

$$|A(\xi)| \leq c(1 + |\xi|)^r$$

будем обозначать через $\mathbb{S}_r^{\circ}$. Как известно, псевдодифференциальный оператор $A(D) = F^{-1} \Lambda_A F$ с символом $A \in \mathbb{S}_r^{\circ}$ непрерывно отображает $\mathbb{H}_s(\mathbb{R})$ в $\mathbb{H}_{s-r}(\mathbb{R})$ для любого $s \in \mathbb{R}$. Пусть

$$\alpha > 0, \quad -1 < \beta < 1, \quad \varphi(x) = \text{th } \frac{\pi}{\alpha} \left(x - \zeta + i \frac{\alpha\beta}{2} \right), \quad x, \zeta \in \mathbb{R}$$

и

$$(4) \quad A_i \in \mathbb{S}_r^{\circ}, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим функцию

$$A(x, \xi) = 1 + A_1(\xi) + \varphi(x)A_2(\xi)$$

и псевдодифференциальный оператор $A(x, D)$ с символом $A(x, \xi)$:

$$A(x, D)u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} A(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R})).$$

Поскольку

$$A(x, D)u = u + A_1(D)u + \Lambda_\varphi A_2(D)u,$$

то очевидно, что $r \geq 0$ отображение $A(x, D)$ можно продолжить до непрерывного отображения из $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Рассмотрим функцию $A_0(\xi) = 1 + A_1(\xi) - A_2(\xi)$. Далее будем предполагать, что

$$(5) \quad A_0^{-1} \in \mathbb{S}_{-r}^\circ.$$

Пусть $h(x) = \alpha^{-1} \ln x$ ($x \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$). Определим функции

$$\Psi_0 = A_0 \circ h, \quad \Psi_1 = (1 + (A_1 \circ h))\Psi_0^{-1}, \quad \Psi_2 = (A_2 \circ h)\Psi_0^{-1}$$

на $\mathbb{R}_+$ и $\Psi_1 = 1$, $\Psi_2 = 0$ на $\mathbb{R}_- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$. Определим также сингулярный интегральный оператор

$$K = \Lambda_{\Psi_1} + S_{\mathbb{R}} \Lambda_{\Psi_2} : L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|)) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|)).$$

Наша ближайшая цель – установление связи между решениями уравнений

$$A(x, D)y = f, \quad f \in L_2(\mathbb{R}), \quad \text{и} \quad Kz = g, \quad g \in L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|)).$$

3.2. Для функции y , определенной на $\mathbb{R}_+$ через γy будем обозначать функцию $e^{sx}y(e^{\alpha x})$, где $\sigma = \alpha(\beta+1)/2$ и $s = \sigma + i\zeta$. Очевидно, что операторы γ и $\omega_1 = F^{-1}\gamma$ непрерывно отображают $L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$ в $L_2(\mathbb{R})$. Оператор $\omega_2 : \mathbb{H}_r(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$ определим равенством

$$\omega_2 = \gamma^{-1}FA_1(D) + S_{\mathbb{R}_+}\gamma^{-1}FA_2(D).$$

Пусть $\mathbb{M}_r(\mathbb{R})$ – некоторое прямое дополнение к линейному пространству $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, а

$$\pi_1 : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}_r(\mathbb{R}), \quad \pi_2 : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_r(\mathbb{R})$$

операторы проектирования, связанные соотношением

$$\pi_1 y + \pi_2 y = y, \quad y \in L_2(\mathbb{R}).$$

Определим пространство $W = \{f : \Psi_0^{-1}f \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho)\}$ и оператор $\pi_3 : W \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$, действующий тождественно на $L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$. Далее, применим предложение 1 для пространств

$$X_1 = L_2(\mathbb{R}_+, \rho), \quad X_2 = \mathbb{H}_r(\mathbb{R}), \quad X_3 = \mathbb{M}_r(\mathbb{R}),$$

$$X_4 = W, \quad X_5 = L_2(\mathbb{R}_-, \rho(|t|))$$

и операторов

$$\tilde{\omega}_1 = \pi_1 \omega_1, \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2, \quad \tilde{\omega}_3 = \pi_2 \omega_1, \quad \tilde{\omega}_4 = \Lambda_{\Psi_0^{-1}} \quad \text{и} \quad \tilde{\omega}_5 = \omega_5 \pi_3,$$

где $\omega_5 : L_2(\mathbb{R}_+, \rho) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_-, \rho(|t|))$ определен равенством

$$(\omega_5 y)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \Psi_2(\tau) y(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Пользуясь равенством $F^{-1} \gamma S_{\mathbb{R}_+} \gamma^{-1} F = \Lambda_\varphi$ (см., например, [5]), нетрудно убедиться, что

$$\omega_1 \omega_2 = A_1(D) + \Lambda_\varphi A_2(D),$$

т.е. оператор $\tilde{T}$, действующий из $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$, совпадает с $A(x, D)$.

Лемма 1. Пусть

$$\tilde{f} = (f, 0, 0) \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho) \oplus \mathbb{M}_r(\mathbb{R}) \oplus L_2(\mathbb{R}_-, \rho(|t|)).$$

Функция z является решением уравнения $\tilde{K}z = \tilde{f}$ тогда и только тогда, когда $z \in L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$ и $Kz = f_0$, где

$$f_0 = (f, 0) \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho) \oplus L_2(\mathbb{R}_-, \rho(|t|)).$$

Доказательство. Пусть $z = (z_+, z_-)$ – решение уравнения $\tilde{K}z = \tilde{f}$, i.e.

$$(6) \quad \tilde{\omega}_4 z_+ + \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_4 z_+ = f, \quad \tilde{\omega}_3 \tilde{\omega}_4 z_+ = 0, \quad \tilde{\omega}_5 z_+ + z_- = 0.$$

Сначала докажем, что $z_+ \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$. Действительно, из второго равенства (6) следует, что $g = \omega_1 \Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ \in \mathbb{H}_r(\mathbb{R})$. Следовательно, $\gamma z_+ = F A_0(D)g \in L_2(\mathbb{R})$, т.е. $z_+ \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$. Заметим, что из (6) следует также, что

$$\pi_1 \omega_1 \Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ = \omega_1 \Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ \quad \text{и} \quad \tilde{\omega}_5 z_+ = \omega_5 z_+.$$

Нетрудно также убедиться, что $\omega_2 \omega_1 = \Lambda_{A_1 \circ h} + S_{\mathbb{R}_+} \Lambda_{A_2 \circ h}$. Отсюда в силу первого и третьего равенств в (6) $Kz = f_0$.

Пусть теперь $z \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$ и $Kz = f_0$. Тогда

$$(7) \quad (\Lambda_{\Psi_1} + S_{\mathbb{R}_+} \Lambda_{\Psi_2}) z_+ = f, \quad \omega_5 z_+ + z_- = 0.$$

Кроме того, из равенства $\omega_1 \Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ = A_0^{-1}(D) \omega_1 z_+$ и условия (5) следует, что

$$\omega_1 \Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ \in \mathbb{H}_r(\mathbb{R}),$$

т.е. $\pi_2 \omega_1 \Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ = 0$. Отсюда и из первого равенства (7) имеем

$$\begin{aligned} (\Lambda_{\Psi_1} + S_{\mathbb{R}_+} \Lambda_{\Psi_2}) z_+ &= (\Lambda_{\Psi_0^{-1}} + \Lambda_{A_1 \circ h} \Lambda_{\Psi_0^{-1}} + S_{\mathbb{R}_+} \Lambda_{A_2 \circ h} \Lambda_{\Psi_0^{-1}}) z_+ \\ &= (\Lambda_{\Psi_0^{-1}} + (\Lambda_{A_1 \circ h} + S_{\mathbb{R}_+} \Lambda_{A_2 \circ h}) \Lambda_{\Psi_0^{-1}}) z_+ \\ &= (\Lambda_{\Psi_0^{-1}} + \omega_2 \omega_1 \Lambda_{\Psi_0^{-1}}) z_+ = \Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+ + \omega_2 \pi_1 \omega_1 \Lambda_{\Psi_0^{-1}} z_+. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливы равенства (6), т.е. $\tilde{K}z = \tilde{f}$. Доказательство завершено.

Определим функцию $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$. Легко видеть, что $K = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^+ \Lambda_{\Psi} + \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^-$.

Теорема 1. Пусть $r \geq 0$ и функции $A_i(\xi)$ ($i = 0, 1, 2$) удовлетворяют условиям (4), (5). Тогда справедливо равенство

$$\dim \text{Ker } A(x, D) = \dim \text{Ker } K.$$

Если функция y принадлежит пространству $\text{Ker } A(x, D)$, то функция z , определенная равенствами

$$z = -\Lambda_{\Psi_0}\omega_2 y \quad \text{на } \mathbb{R}_+ \quad \text{и} \quad z = \omega_5 \Lambda_{\Psi_0}\omega_2 y \quad \text{на } \mathbb{R}_-,$$

принадлежит пространству $\text{Ker} K$.

Обратно, если функция z принадлежит пространству $\text{Ker} K$, то функция y , определенная равенством

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} e^{st} A_0^{-1}(t) z(e^{\alpha t}) dt,$$

принадлежит $\text{Ker} A(x, D)$. Более того, если представление (2) является факторизацией функции $\Psi \in L_{\infty}(\mathbb{R})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$, то при $\kappa \geq 0$ уравнение $Ky = 0$ имеет лишь тривиальное решение, а при $\kappa < 0$ система функций

$$y_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} e^{st} A_0^{-1}(t) \frac{1}{e^{\alpha t} + i} \Psi_+^{-1}(e^{\alpha t}) \left(\frac{e^{\alpha t} - i}{e^{\alpha t} + i} \right)^{j-1} dt, \quad j = 1, \dots, -\kappa,$$

является базисом $\text{Ker} A(x, D)$.

Доказательство. Из леммы 1 и предложения 1 следуют равенства

$$\text{Ker} A(x, D) = (\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_4 \quad 0) \text{Ker} K, \quad \text{Ker} K = \begin{pmatrix} -\tilde{\omega}_4^{-1} \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_5 \tilde{\omega}_4^{-1} \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} \text{Ker} A(x, D),$$

$$\dim \text{Ker} A(x, D) = \dim \text{Ker} K.$$

Из этих соотношений и предложения 2 следует доказательство теоремы.

Теорема 2. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$, $g = \omega_1^{-1} f$ и функция g_0 совпадает с g на $\mathbb{R}_+$ и равна нулю на $\mathbb{R}_-$.

Тогда, если $z \in L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$ является решением уравнения $Kz = g_0$, то функция y , определяемая равенством

$$(8) \quad y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} e^{st} A_0^{-1}(t) z(e^{\alpha t}) dt,$$

является решением уравнения $A(x, D)y = f$.

Пусть, дополнительно, представление (2) является факторизацией функции Ψ в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$ и функция z определена равенством

$$z = \left(\Lambda_{\Psi_-^{-1}} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^+ \Lambda_{\Psi_+^{-1}} + \Lambda_{\Psi_-^{-1}} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^- \Lambda_{\Psi_+^{-1}} \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^\kappa \Lambda_{\Psi} \right) \left(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^+ \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^\kappa I + \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^- \right) g_0.$$

Тогда, если $\kappa \leq 0$, то функция y , определенная равенством (8) является решением уравнения $A(x, D)y = f$. Если $\kappa > 0$, то уравнение $A(x, D)y = f$ разрешимо в $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty (\omega_1^{-1} f)(t) \left[\Psi_-^{-1}(t) - \Psi_+(t) \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^\kappa \right] \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{-j} \frac{dt}{t+i} = 0, \quad j = 1, \dots, \kappa.$$

При выполнении этих условий формула (8) дает единственное решение уравнения $A(x, D)y = f$ в $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что, если $z \in L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$ является решением уравнения $Kz = g_0$, то z является решением уравнения $\tilde{K}z = g_{00}$, где

$$g_{00} = (g, 0, 0) \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho) \oplus \mathbb{H}_r(\mathbb{R}) \oplus L_2(\mathbb{R}_-, \rho(|t|)).$$

Пусть функция z_+ есть сужение функции z на $\mathbb{R}_+$. В силу предложения 1 функция $y = \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_4 z_+$ является решением уравнения $A(x, D)y = f$ в классе $\mathbb{H}_r(\mathbb{R})$. Остальные утверждения теоремы следуют из предложения 2.

Теорема 3. Пусть $g \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$, функция g_0 , определенная на $\mathbb{R}$, совпадает с g на $\mathbb{R}_+$ и равна нулю на $\mathbb{R}_-$. Тогда, если $y \in \mathbb{H}_r(\mathbb{R})$ является решением уравнения

$$A(x, D)y = \omega_1 g,$$

то функция

$$z_+ = -\Lambda_{\Psi_0}(\omega_2 y - g)$$

принадлежит $L_2(\mathbb{R}_+, \rho)$, и функция z

$$z(x) = z_+(x) \quad (x > 0) \quad \text{и} \quad z(x) = -(\omega_5 z_+)(x) \quad (x < 0)$$

является решением уравнения $Kz = g_0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{z}_+ = -\tilde{\omega}_4^{-1} \tilde{\omega}_2 y$ и $\tilde{z}_- = -\tilde{\omega}_5 \tilde{z}_+$. Из предложения 1 следует, что функция $\tilde{z}$, равная $\tilde{z}_+$ на $\mathbb{R}_+$ и равная $\tilde{z}_-$ на $\mathbb{R}_-$, удовлетворяет равенству $\tilde{K}\tilde{z} = (-\tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_1 g, -\tilde{\omega}_3 g, 0)$. Подставляя в это равенство $\tilde{z}_+ = z_+ - \tilde{\omega}_4^{-1} g$ и $\tilde{z}_- = z_- + \tilde{\omega}_5 \tilde{\omega}_4^{-1} g$ получим, что $\tilde{K}z = (g, 0, 0)$. Применяя лемму 1, получим доказательство теоремы.

4. СЛУЧАЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

4.1. Рассмотрим теперь случай, когда функции A_i ($i = 1, 2$) являются полиномами, т.е. когда $A(x, D)$ является дифференциальным оператором. Заметим, что условие (4) выполняется автоматически для

$$r = n = \max \{ \deg A_1, \deg A_2 \}.$$

Определим полиномы

$$Q_i = 1 + A_1 - (-1)^i A_2 \quad (i = 1, 2).$$

Ясно, что полином Q_2 совпадает с функцией A_0 . Ниже мы будем требовать, чтобы $\deg Q_i = n$ ($i = 1, 2$). Это условие обеспечивает выполнение условия (5).

4.2. Пусть ξ и η — комплексные числа такие, что $\alpha(\xi - \eta)/(2\pi i)$ не является неотрицательным целым числом. Функцию G определим по формуле

$$G(z, \xi, \eta) = z^{-1/2} (z + i) \left(\frac{\ln z}{\alpha} - \eta \right) B \left[\frac{\alpha}{2\pi i} \left(\frac{\ln z}{\alpha} - \xi \right), -\frac{\alpha}{2\pi i} \left(\frac{\ln z}{\alpha} - \eta \right) \right],$$

где B — хорошо известная бета-функция. Приведем некоторые оценки, необходимые нам в дальнейшем.

Лемма 2. *Существуют числа $c, c' \in \mathbb{R}_+$ и $\delta, \delta' \in \mathbb{R}$ такие, что для достаточно больших $|\ln |z||$ справедлива следующая оценка*

$$c |\ln |z||^\delta < |G(z, \xi, \eta)| < c' |\ln |z||^{\delta'}.$$

Доказательство. Пусть $f(z) = \frac{\alpha}{2\pi i} \left(\frac{\ln z}{\alpha} - \xi \right)$. Поскольку

$$\operatorname{Re} f = -\frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{Im} \xi + \frac{1}{2\pi} \arg z, \quad \operatorname{Im} f = -\frac{\ln |z|}{2\pi} + \frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{Re} \xi,$$

то очевидно, что если $|\ln |z|| \rightarrow +\infty$, то $f(z) \rightarrow \infty$, оставаясь в полосе

$$-\frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{Im} \xi - \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} f \leq -\frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{Im} \xi + \frac{1}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что для достаточно больших $|z|$ имеет место

$$\left| \arg f + \frac{\pi}{2} \right| < \operatorname{tg} \left| \arg f + \frac{\pi}{2} \right| = O \left((\ln |z|)^{-1} \right).$$

Отсюда следует, что при достаточно больших $|z|$ справедливо равенство

$$(9) \quad |z|^{\frac{1}{2\pi} \arg(\frac{\alpha}{2\pi i}(\frac{\ln z}{\alpha} - \xi))} = \tilde{O}\left(|z|^{-1/4}\right),$$

где под записью $f_1 = \tilde{O}(f_2)$ мы подразумеваем одновременное выполнение условий $f_1 = O(f_2)$ и $f_2 = O(f_1)$.

Аналогичным образом, нетрудно убедиться, что для достаточно малых $|z|$ справедливо равенство

$$(10) \quad |z|^{\frac{1}{2\pi} \arg(\frac{\alpha}{2\pi i}(\frac{\ln z}{\alpha} - \xi))} = \tilde{O}\left(|z|^{1/4}\right).$$

Пользуясь известным асимптотическим разложением гамма-функции (см. [13])

$$\Gamma(z) = \frac{e^{(z-1/2)\ln z}}{e^z} [1 + O(z^{-1})], \quad |\arg z| < \pi,$$

при достаточно больших $|\ln |z||$ мы получим следующее равенство

$$|\Gamma(f(z))| = \tilde{O}\left(e^{\operatorname{Re} f - \frac{\alpha \operatorname{Re} \xi}{2\pi} \arg f} |z|^{\frac{1}{2\pi} \arg f} |f|^{\operatorname{Re} f - \frac{1}{2}}\right).$$

Учитывая равенства (9), (10) и соотношение $|f| = \tilde{O}(|\ln |z||)$, а также ограниченность функции $e^{\operatorname{Re} f - \frac{\alpha \operatorname{Re} \xi}{2\pi} \arg f}$, нетрудно убедиться в существовании положительных чисел c_1, c_2 и действительных чисел δ_1, δ_2 таких, что при достаточно больших значениях $|z|$ имеем место оценка

$$(11) \quad c_1 |z|^{-1/4} (\ln |z|)^{\delta_1} < |\Gamma(f)| < c_2 |z|^{-1/4} (\ln |z|)^{\delta_2},$$

а при достаточно малых значениях $|z|$ имеет место оценка

$$(12) \quad c_1 |z|^{1/4} |\ln |z||^{\delta_1} < |\Gamma(f)| < c_2 |z|^{1/4} |\ln |z||^{\delta_2}.$$

Взяв в (11) и (12) $1/z$ вместо z получим оценки для $\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2\pi i}\left(\frac{\ln z}{\alpha} - \eta\right)\right)$. Справедливость утверждения леммы вытекает из вышеуказанных оценок.

4.3. Обозначим через l_i количество нулей многочлена Q_i ($i = 1, 2$) в верхней полуплоскости. Пусть $\lambda_1^+ \dots \lambda_{l_1}^+, \lambda_1^- \dots \lambda_{n-l_1}^-$ — нули Q_1 , а $\mu_1^+ \dots \mu_{l_2}^+, \mu_1^- \dots \mu_{n-l_2}^-$ — нули Q_2 , удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{Im}(\lambda_k^+) > 0, \quad \operatorname{Im}(\mu_s^+) > 0 \quad (k = 1 \dots l_1, s = 1 \dots l_2),$$

$$\operatorname{Im}(\lambda_k^-) < 0, \quad \operatorname{Im}(\mu_s^-) < 0 \quad (k = 1 \dots n - l_1, s = 1 \dots n - l_2).$$

Напомним, что

$$\Psi(x) = Q_1(\alpha^{-1} \ln x) Q_2^{-1}(\alpha^{-1} \ln x) \quad \text{при } x > 0$$

и $\Psi(x) = 1$ при $x < 0$. Обозначим

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi(x).$$

Лемма 3. Для факторизуемости функции Ψ в $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$ необходимы и достаточны условия

$$(13) \quad Q_i(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2,$$

$$(14) \quad \left| \frac{1}{\pi} \arg q + \beta \right| \neq 1.$$

Если эти условия выполнены, то индекс функции Ψ вычисляется по формуле $\kappa = l_1 - l_2$. Кроме того, если m — целое число, определяемое из условия

$$\left| \frac{1}{\pi} \arg q + \beta + 2m \right| < 1$$

и

$$\Psi_+(z) = z^{-m} z^{-\frac{\ln q}{2\pi i}} \frac{\prod_{k=1}^{l_1} G(z, -i, \lambda_k^+) \prod_{k=1}^{n-l_2} G(z, \mu_k^-, i)}{\prod_{k=1}^{l_2} G(z, -i, \mu_k^+) \prod_{k=1}^{n-l_1} G(z, \lambda_k^-, i) [G(z, -i, i)]^{l_1-l_2}},$$

$$\Psi_-(t) = \Psi(t) \Psi_+^{-1}(t) \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{-\kappa},$$

то представление (2) является факторизацией Ψ в $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$.

Доказательство. Пусть выполнены условия (13), (14) и пусть

$$\nu = \frac{1}{\pi} \arg q + \beta + 2m.$$

Пользуясь монотонностью действительной функции $x^{-k} \ln^\delta(x)$ ($k > 1$) при достаточно больших x и леммой 2 нетрудно убедиться, что существуют положительные числа c и M такие, что для $z = x + iy$,

$$\left| \frac{z^{-\beta/2} \Psi_+(z)}{z+i} \right|^2 \leq c \frac{\ln^\delta |x|}{|x|^{2+\nu}}, \quad \text{при } |x| \geq M, \ y \geq 0,$$

$$\left| \frac{z^{-\beta/2} \Psi_+(z)}{z+i} \right|^2 \leq c \frac{\ln^\delta \sqrt{x^2 + M^2}}{\sqrt{x^2 + M^2}^{2+\nu}}, \quad \text{при } |x| \leq M, \ |y| \geq M.$$

Поскольку функция $\partial_y(|z|^{-\nu} |\ln |z||^\delta)$ знакопостоянна в интервале $(0, \Delta)$ при достаточно малых Δ , то либо

$$|z|^{-\nu} |\ln |z||^\delta \leq |x|^{-\nu} |\ln |x||^\delta,$$

либо

$$|z|^{-\nu} |\ln |z||^\delta \leq \sqrt{x^2 + \Delta^2}^{-\nu} \left| \ln \sqrt{x^2 + \Delta^2} \right|^\delta,$$

как только $x \in (-\Delta, \Delta)$, а $y \in (0, \Delta)$. Из этих оценок и аналитичности $\Psi_+(z)$ в верхней полуплоскости следует, что

$$\frac{z^{-\beta/2} \Psi_+(z)}{z+i} \in L_2^+(\mathbb{R}).$$

Аналогичным образом доказываются остальные включения (3).

Пусть

$$\tilde{\Psi}(\zeta) = \Psi(\tau(\zeta)) \quad \text{и} \quad \tilde{\Psi}_\pm(\zeta) = \Psi_\pm(\tau(\zeta)).$$

Как мы уже отмечали, условия (3) эквивалентны условиям

$$(15) \quad \tilde{\Psi}_-^{\pm 1} \in L_2^-(\mathbb{T}, |\tau|^{\pm \beta}), \quad \tilde{\Psi}_+^{\pm 1} \in L_2^+(\mathbb{T}, |\tau|^{\mp \beta}).$$

Функция $\tilde{\Psi}$ непрерывна и отлична от нуля на множестве $\mathbb{T} \setminus \{-1, 1\}$. Кроме того, существуют конечные пределы

$$\tilde{\Psi}(-1-0) = \lim_{\zeta \rightarrow -1} \tilde{\Psi}(\zeta) = 1, \quad \text{Im } \zeta > 0, \quad \zeta \in \mathbb{T},$$

$$\tilde{\Psi}(-1+0) = \lim_{\zeta \rightarrow -1} \tilde{\Psi}(\zeta) = q, \quad \text{Im } \zeta < 0, \quad \zeta \in \mathbb{T},$$

$$\tilde{\Psi}(1-0) = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \tilde{\Psi}(\zeta) = q, \quad \text{Im } \zeta < 0, \quad \zeta \in \mathbb{T},$$

$$\tilde{\Psi}(1+0) = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \tilde{\Psi}(\zeta) = 1, \quad \operatorname{Im} \zeta > 0, \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Отсюда, в силу условия $|\frac{1}{\pi} \arg q + \beta| \neq 1$ следует, что функция $\tilde{\Psi}$ допускает обобщенную факторизацию в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$ (см. [6], гл. 9). Из существования обобщенной факторизации и условий (15) следует, что

$$\tilde{\Psi}(\zeta) = \tilde{\Psi}_-(\zeta) \zeta^\kappa \tilde{\Psi}_+(\zeta)$$

также является обобщенной факторизацией $\tilde{\Psi}$ в пространстве $L_2(\mathbb{T}, |\tau|^\beta)$. Это означает, что представление (2) является факторизацией Ψ в $L_2(\mathbb{R}, \rho(|t|))$.

Выполнение условий (13) и (14) необходимо для существования обобщенной факторизации $\tilde{\Psi}$ (см. [6], гл. 9) и потому необходимо и для факторизации Ψ . Это завершает доказательство.

Следующее утверждение непосредственно следует из леммы 3 и теорем 1, 2.

Теорема 4. Пусть $Q_i(x) \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$), $|\frac{1}{\pi} \arg q + \beta| \neq 1$ и $\kappa = l_1 - l_2$. Тогда: (A) При $\kappa < 0$, функции

$$y_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} e^{st} A_0^{-1}(t) \frac{\Psi_+^{-1}(e^{\alpha t})}{e^{\alpha t} + i} \left(\frac{e^{\alpha t} - i}{e^{\alpha t} + i} \right)^{j-1} dt, \quad j = 1, \dots, -\kappa,$$

составляют базис в $\operatorname{Ker} A(x, D)$, а при $\kappa \geq 0$ однородное уравнение $A(x, D)y = 0$ имеет лишь тривиальное решение.

(B) При $\kappa \leq 0$, $f \in L_2(\mathbb{R})$,

$$g_0 = (\omega_1^{-1} f, 0) \in L_2(\mathbb{R}_+, \rho) \oplus L_2(\mathbb{R}_-, \rho(|t|)),$$

$$z = \left(\Lambda_{\Psi_-^{-1}} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^+ \Lambda_{\Psi_+^{-1}} + \Lambda_{\Psi_-^{-1}} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^- \Lambda_{\Psi_+^{-1}} \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^\kappa \Lambda_{\Psi} \right) \left(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^+ \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^\kappa I + \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^- \right) g_0,$$

функция

$$(16) \quad y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} e^{st} A_0^{-1}(t) z(e^{\alpha t}) dt$$

является решением уравнения $A(x, D)y = f$. При $\kappa > 0$ неоднородное уравнение $A(x, D)y = f$ разрешимо лишь при выполнении условий

$$\int_0^{\infty} (\omega_1^{-1} f)(t) \left[\Psi_-^{-1}(t) - \Psi_+(t) \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^\kappa \right] \left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{-j} \frac{dt}{t+i} = 0,$$

$j = 1, 2, \dots, \kappa$. В случае выполнения этих условий единственное решение неоднородного уравнения задается формулой (16).

В заключение авторы выражают благодарность профессору А. О. Оганесяну за внимание и полезное обсуждение.

Abstract. The paper suggests an approach to one-dimensional pseudodifferential equations of nonnegative order, whose symbols are of the form $A_1(\xi) + \text{th}(kx + \omega)A_2(\xi)$. The method is based on reduction of the considered pseudodifferential equation to an integral equation. Some integral representations of solutions are found.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. И. Черский, "Нормально разложимое уравнение плавного перехода" ДАН СССР **190** (1), 57-60 (1970).
- [2] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, *Уравнения типа свертки* (Наука, Москва, 1978).
- [3] Фан Танг Да, "Об одном интегральном уравнении типа плавного перехода," Диф. уравнения **8** (6), 1058-1067 (1972).
- [4] Фан Танг Да, "Об одной краевой задаче Газемана для полуплоскости и интегральных уравнениях типа свертки с аналитическими ядрами," Изв. ВУЗов, мат. (10), 73-82 (1973).
- [5] А. Г. Камальян, А. Б. Нерсесян, "Интегральные уравнения типа свертки," АН СССР, Функ. анализ и прим. **23** (2) 32-39 (1989).
- [6] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов* (Кишинев, Штиница, 1992).
- [7] З. Престдорф, "Линейные интегральные уравнения," Итоги науки и техники **27**, 5-130 (ВИНИТИ, Москва, 1988).
- [8] H. Bart, I. Ts. Gohberg, M. Kaashoek, *The Coupling Method for Solving Integral Equations. Advances and Applications* (Birkhauser Verlag, Basel, 1984).
- [9] К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций* (ИЛ, Москва, 1975).
- [10] G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovskii, *Factorization of Measurable Matrix Functions* (Akademie Verlag, Berlin, 1987).
- [11] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций* (ГИТЛ, Москва, 1950).
- [12] Г. И. Эскин, *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений* (Наука, Москва, 1973).
- [13] H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions* **1,2** (Wiley, NY, London, 1953).

Поступила 28 декабря 2007