Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 4, 2007, стр. 38-54

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП ПОДМНОЖЕСТВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Э. А. МИРЗАХАНЯН И Н. Э. МИРЗАХАНЯН

Ереванский Государственный Университет

Аннотация. В статье приведены эквивалентные способы построения бесконечномерных гомотопических групп подмножеств и пар подмножеств вещественного гильбертова пространства. В допустимом классе K_0 -непрерывных отображений доказаны гомотопическая инвариантность этих групп и их изоморфизм, когда базисные точки принадлежат одной и той же компоненте K_0 -линейной связности.

1. ДОПУСТИМЫЙ КЛАСС K_0 -НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Для построения содержательной теории бесконечномерной алгебраической топологии гильбертова пространства H класс всех непрерывных отображений между подмножествами гильбертова пространства является слишком широким. Например, многие основные теоремы классической топологии, в частности, теоремы Брауэра о неподвижной точке, инвариантности области, перестают быть справедливыми в гильбертовом пространстве.

Выход из этого положения заключаетя в том, что следует ограничить этот класс, т.е. рассматривать не все непрерывные отображения, а лишь более узкий класс непрерывных отображений. В частности, этот более узкий класс допустимых отображений должен обладать тем свойством, что, оставаясь в этом классе , невозможно сферу S стянуть в точку. Кажется естественным, принять в качестве такого класса отображений совокупность Q всех отображений вида $\lambda I + A$, где λ – действительное число, I – тождественное отображение гильбертова H пространства на себя, а A – вполне непрерывное отображение. Все же, класс Q не является удобным для построения бесконечномерной алгебраической топологии, поскольку этот класс является слишком узким. В самом деле, для того чтобы некоторый класс отображений был применим для построения бесконечномерной алгебраической топологии, нужно, чтобы он позволил перенести на случай гильбертова пространства стандартную гомотопическую технику, применяемую в конечномерных пространствах.

Следуя идеям Лере и Шаудера, в 1970 В. Г. Болтанский построил допустимый класс K_0 непрерывных отображений подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства, применимый для построения бесконечномерной алгебраической топологии в гильбертовом пространстве. Отображения класса K_0 , называемые K_0 -отображениями, локально (т.е. в окрестности каждой точки) напоминают по своим свойствам отображения вида $\lambda I + A$, где, однако, λ зависит от точки x, следовательно, класс K_0 значительно шире класса Q. В дальнейшем, класс K_0 был естественно расширен до класса K непрерывных отображений в гильбертовом пространстве H, необязательно сепарабельном [1, 2].

Приведем теперь определения K_0 -отображения и некоторых других понятий. Пусть H – произвольное, необязательно сепарабельное, вещественное гильбертово пространство.

Определение 1. *Непрерывное отображение $f : G \to H$ открытого подмножества $G \subset H$ в H будем называть K_0 -отображением относительно H, если выполнено следующее условие*

(K_0) : *Для любой точки $x_0 \in G$ и любого вещественного числа $\varepsilon > 0$, существует окрестность $U \subset G$ точки x_0, конечномерное линейное подпространство $L \subset H$ и вещественные числа λ и $\delta \in (0, \pi/2)$ такие, что если для точек $x, y \in U$ угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\pi/2 - \delta$, то выполнено соотношение*

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|. \tag{1}$$

Условие (1) равносильно одновременному выполнению следующих двух условий [1]:

K **-условие:** для любой точки $x_0 \in G$ и любого $\varepsilon > 0$, существует окрестность $U \subset H$ точки x_0, конечномерное подпространство $L \subset H$ и вещественное число λ такие, что, если $x, y \in U$ и вектор $x - y$ ортогонален подпространству L, то выполнено соотношение (1).

Локальное условие Липшица: для каждой точки $x_0 \in G$ существуют числа $r = r(x_0) > 0$ и $c = c(x_0) > 0$ такие, что если точки $x, y \in G$, $\|x - x_0\| < r$ и

$\|y - x_0\| < r$, то

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Пусть теперь подмножество $X \subset H$ – произвольное, необязательно открытое, непрерывное отображение $f : X \to H$ будем называть K_0 *-отображением*, если существуют открытое подмножество $G \subset H$ и K_0 -отображение $g : G \to H$ такие, что $X \subseteq G$ и $f(x) = g(x)$ для любого $x \in X$. Пусть даны произвольные подмножества $X, Y \subset H$, непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется K_0 *-отображением*, если композиция $i \circ f : X \to H$, где $i : Y \to H$ есть вложение, является K_0 -отображением. Композиция двух K_0 -отображений есть K_0 -отображение [1]. Гомеоморфизм $f : X \cong Y$ называется K_0 *-гомеоморфизмом* и пишется $f : X \overset{K_0}{\cong} Y$, если f и f^{-1} суть K_0 -отображения.

Определение 2. *Семейство (f_t) $(0 \leq t \leq 1)$ отображений $f_t : X \to Y$ называется K_0 -гомотопией, и пишется*

$$(f_t) : X \overset{K_0}{\simeq} Y,$$

если отображение $F : I \times X \to Y$, определяемое формулой

$$F(t, x) = f_t(x), \quad x \in X, \quad t \in I = [0, 1],$$

является K_0 -отображением.

Два K_0 -отображения $f, g : X \to Y$ называются K_0 -гомотопными и записываюся в виде $f \overset{K_0}{\simeq} g$, если существует связывающая их K_0 -гомотопия (f_t), т.е. такая, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Равносильным образом, отображения $f, g : X \to Y$ называются K_0 -гомотопными, если существует K_0 -отображение $F : I \times X \to Y$ такое, что

$$F(0, x) = f(x), \quad F(1, x) = g(x), \quad x \in X.$$

Определение 3. *K_0 -гомотопия называется связной или неподвижной на подмножестве $A \subset X$ или относительно A, и пишется*

$$(f_t) : X \overset{K_0}{\square} Y (\mathrm{rel}\ A),$$

если $f_t(x) = f_0(x)$ для всех $x \in A$ и $t \in I$. Два K_0 -отображения $f, g : X \to Y$ называются K_0 -гомотопными относительно A и пишется

$$f \overset{K_0}{\simeq} g (\mathrm{rel}\ A).$$

Отношение гомотопности между K_0 -отображениями есть отношение эквивалентности. Классы эквивалентности, в этом случае называются гомотопическими классами и гомотопический класс отображения f принято обозначать через $[f]$. Множество всех K_0 -отображений $f : X \to Y$ обозначается через $K_0(X, Y)$, а множество всех гомотопических классов таких отображений через $K_0[X, Y]$. Приведенные выше понятия аналогичным образом определяются и для K_0 -отображений $f(X, A) \to (Y, B)$ для пар подмножеств из H.

2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП

Описание основных бесконечномерных абсолютных и относительных гомотопических групп $\Pi_q(X, x_0)$ и $\Pi_q(X, A, x_0)$ пунктированых подмножеств (X, x_0) и пунктированых пар (X, A, x_0) подмножеств вещественного гильбертова пространства H, а также определения приведенных в дальнейшем понятий подробно изложены в [3].

Напомним, что линейное подпространство M пространства H называется *подпространством конечного дефекта* или *конечной коразмерности* $q \geq 0$, $q \in \mathbb{Z}$, если ортогональное дополнение подпространства M относительно H имеет размерность q. Если q – отрицательное целое число, то гильбертово пространство M будем называть подпространством *дефекта q относительно* H, если M содержит H в качестве подпространства дефекта $-q$. Условимся через $B(M)$, $B^*(M)$ и $S(M)$ обозначать соответственно единичные замкнутый, открытый шары и единичную сферу подпространства или надпространства $M \subset H$.

Обозначим через $K_0\big(B(M), S(M); X, x_0\big)$ множество всех отображений

$$f : (B(M), S(M)) \to (X, x_0),$$

принадлежащих к классу K_0 относительно гильбертова пространства $M \cup H$. Введем в множестве $K_0\big(B(M), S(M); X, x_0\big)$ отношение K_0 -гомотопности $\operatorname{rel}(S(M))$. Полученное фактор-множество, обычно называемое гомотопическим множеством обозначим через $K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big]$.

Предложение 1. *Существует биективное соответствие между элементами группы $\Pi_q(X, x_0)$ и элементами множества (K_0 -гомотопическими классами)*

$$K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big].$$

Доказательство. Каждому $f \in K_0\big(M, M \setminus B(M); X, x_0\big)$ сопоставляя ограничение $f' = f\big|B(M)$, получим инъективное отображение множества $K_0\big(M, M \setminus B(M); X, x_0\big)$ в множество $K_0\big(B(M), S(M); X, x_0\big)$. Это отображение сюръективно, ибо каждое $g' \in K_0\big(B(M), S(M); X, x_0\big)$ есть ограничение на $B(M)$ отображения $g = g'r\,\mathrm{in}$, где $r : M \to B(M)$ есть K_0 -ретракция, определенная формулой

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \in B(M), \\ \dfrac{x}{\|x\|} & \text{при} \quad x \in M \setminus B(M). \end{cases}$$

Далее, если f и g суть K_0 -гомотопны и

$$h_t : f \overset{K_0}{\simeq} g\big(\mathrm{rel}\ M \setminus B(M)\big),$$

то гомотопия $h'_t = h_t\big|B(M)$ будет K_0 -гомотопией между f' и g'. С другой стороны, если

$$h'_t : f' \overset{K_0}{\simeq} g'\mathrm{rel}\,(S(M), x_0),$$

то $h_t = h'_t r$ будет K_0 -гомотопией между f и g относительно $\big\{M \setminus B(M), x_0\big\}$. Таким образом, существует биективное соответствие между элементами множества $\Pi_q(X, x_0)$ и элементами множества $K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big]$.

Следствие 1. ***Перенося посредством этого сответствия групповую операцию из*** $\Pi_q(X, x_0)$ ***в*** $K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big]$, ***получим изоморфизм группы*** $\Pi_q(X, x_0)$ ***на группу*** $K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big]$.

Таким образом, согласно предложению 1, мы можем символом $\Pi_q(X, x_0)$ обозначать также построенную группу $K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big]$, т.е. положить

$$\Pi_q X, x_0) = K_0\big[B(M), S(M); X, x_0\big]$$

и элементы группы $\Pi_q(X, x_0)$ определять так же, как K_0 -гомотопические классы относительно сферы $S(M)$ K_0 -отображений $f(B(M), S(M)) \to (X, x_0)$.

Выберем единичный вектор $e \in M$ и обозначим через M_e векторное подпространство всех векторов из M, ортогональных к e. Рассмотрим единичную сферу $S(M)$, единичный замнутый шар $B(M_e)$ и единичную сферу $S(M_e)$. Ясно, что их дефекты соответственно равны $q+1$, $q+1$ и $q+2$. Нижнюю замкнутую полусферу (т.е. содержащую точку $-e$) сферы $S(M)$ обозначим через E и рассмотрим пару $(S(M), E)$. Далее, обозначим через $K_0\big(S(M), E; X, x_0\big)$ множество всех отображений $f : (S(M), E) \to (X, x_0)$, принадлежащих классу K_0 относительно гильбертова пространства $M \cup H$. Введем в этом множестве отношение

K_0 -гомотопности $\operatorname{rel}(E)$ и получающееся фактор-множество обозанчим через $K_0\big[S(M), E; X, x_0\big]$.

Предложение 2. *Существует биективное соответствие между элементами группы*

$$\Pi_{q+1}(X, x_0) = K_0\big[B(M_e), S(M_e), X, x_0\big]$$

и элементами гомотопического множества $K_0\big[S(M), E; X, x_0\big]$.

Доказательство. Обозначая через E_+ верхнюю полусферу (содержащую точку e) сферы $S(M)$, каждому $f \in K_0\big(B(M_e), S(M_e); X, x_0\big)$ сопоставим отображение $f' : S(M) \to X$, задаваемое следующим образом

$$f'(E) = x_0, \quad f'(E_+) = \big(f_{P_{M_e}}\big)(E_+),$$

где $P_{M_e} : M \to M_e$ – ортогональное проектирование, т.е. K_0 -отображение. f' является K_0 -отображением [4], и $f' \in K_0\big(S(M), E; X, x_0\big)$. Соответствие $f \to f'$ инъективно, покажем, что оно сюръективно. Пусть $g' \in K_0\big(S(M), E; X, x_0\big)$. Рассмотрим отображение $g : (B(M_e), S(M_e)) \to (X, x_0)$, определяемое формулой $g = g' \circ h$, где $h : (B(M_e), S(M_e)) \to (E_+, S(M_e))$ – отображение, определяемое формулой

$$h(x) = x + \sqrt{1 - \|x\|^2}\, e, \quad x \in B(M_e),$$

g является K_0 -отображением [4] и $g \in K_0\big(B(M_e), S(M_e); X, x_0\big)$. Ясно, что g' есть образ отображения g при рассматриваемом соответствии.

Отметим, что h есть K_0 -гомеоморфизм, а $P_{M_e}|E_+$ является обратным к h. Посредством отображения h построенное биективное соответствие распространяется до биективного соответствия между K_0 -гомотопическими множествами

$$K_0\big[B(M_e), S(M_e); X, x_0\big] \quad \text{и} \quad K_0\big[S(M), E; X, x_0\big].$$

Действительно, $f, g \in K_0\big(B(M_e), S(M_e); X, x_0\big)$ будут K_0 -гомотопными относительно $S(M_e)$ тогда и только тогда, когда $f', g' \in K_0\big(S(M), E; X, x_0\big)$ будут K_0 -гомотопными относительно E.

Следствие 2. *Как и в следствии 1, перенося групповую структуру в* $\Pi_{q+1}(X, x_0)$ *посредством указанного биективного соответствия в* $K_0\big[S(M), E; X, x_0\big]$ *мы можем его превратить в группу, изоморфную группе* $\Pi_{q+1}(X, x_0)$. *Таким образом, мы и в данном случае можем писать*

$$\Pi_{q+1}(X, x_0) = K_0\big[S(M), E; X, x_0\big]$$

и элементы группы $\Pi_{q+1}(X, x_0)$ *определять так же как и* K_0 *-гомотопические классы относительно* E K_0 *-отображений* $f : (S(M), E) \to (X, x_0)$.

Опишем еще одно альтернативное определение абсолютных гомотопических групп. Сохраняя обозначения предыдущего случая, обозначим через s_0 точку $-e$ полусферы E и рассмотрим пару $(S(M), s_0)$. Пусть $K_0\big(S(M), s_0; X, x_0\big)$ – множество всех отображений $f : (S(M), s_0) \to (X, x_0)$, принадлежащих классу K_0 , относительно гильбертова пространства $M \cup H$. Введем отношение $\mathrm{rel}\,\{x_0\}$ K_0 -гомотопности в $K_0\big(S(M), s_0; X, x_0\big)$ и рассмотрим фактор-множество

$$K_0\big[S(M), s_0; X, x_0\big].$$

Предложение 3. *Существует биективное соответствие между гомотопическими множествами*

$$K_0\big[S(M), E; X, x_0\big] \quad \text{и} \quad K_0\big[S(M), s_0; X, x_0\big].$$

Доказательство. Поскольку полусфера E в классе K_0 стягиваема по себе в точку s_0 и пара $(S(M), E)$ есть K_0 -пара Борсука, то стянув E в точку s_0, мы получим пару $(S(M), s_0)$, K_0 -гомотопически эквивалентную паре $(S(M), E)$ [5].

Пусть

$$\varphi : (S(M), E) \to (S(M), s_0), \quad \psi : (S(M), s_0) \to (S(M), E)$$

– K_0 -гомотопически взаимно обратные K_0 -гомотопические эквивалентности, т.е.

$$\psi \circ \varphi \overset{K_0}{\simeq} id\,\mathrm{rel}(E), \quad \varphi \circ \psi \overset{K_0}{\simeq} id\,\mathrm{rel}\{s_0\}.$$

Посредством отображений φ и ψ, обычным способом, строится соответствие между множествами

$$K_0\big[S(M), E; X, x_0\big] \quad \text{и} \quad K_0\big[S(M), s_0; X, x_0\big].$$

Следствие 3. *Согласно следствию 2, множество* $K_0\big[S(M), s_0; X, x_0\big]$ *можно превратить в группу, изоморфную группе* $\Pi_{q+1}(X, x_0)$.

Таким образом, элементы группы $\Pi_{q+1}(X, x_0)$ *можно определить как* K_0 *-гомотопические классы* $\mathrm{rel}\,\{s_0\}$ K_0 *-отображений* $f : (S(M), s_0) \to (X, x_0)$.

Подытоживая результаты предложений 1, 2 и 3, можем при рассмотрении K_0 *-абсолютных бесконечномерных гомотопических групп, кроме основного определения, пользоваться любым из трех описанных альтернативных определений этих групп.*

Рассмотрим множество

$$K_0\big(B(M), S(M), E; X, A, x_0\big)$$

всех отображений $f : \big(B(M), S(M), E\big) \to (X, A, x_0)$, принадлежащих классу K_0 относильно гильбертова пространства $M \cup H$, и в нем отношение K_0 -гомотопности относительно семейства $\big\{S(M), E; A, x_0\big\}$. Полученное фактор-множество обозначим через $K_0\big(B(M), S(M), E; X, A, x_0\big)$.

Предложение 4. *Существует биективное соответствие между элементами группы*

$$\Pi_q(X, A, x_0) = K_0\big[M, M \setminus B^*(M), J^e(M); X, A, x_0\big]$$

и элементами гомотопического множества $K_0\big[B(M), S(M), E; X, A, x_0\big]$.

Доказательство. Каждому $f \in K_0\big[M, M \setminus B^*(M), J^e(M); X, A, x_0\big]$ сопоставим ограничение $f' = f \setminus B(M)$, где f' есть K_0 -отображение [4]. Следовательно,

$$f' \in K_0\big(B(M), S(M), E; X, A, x_0\big).$$

Соответствие $f \to f'$ инъективно, покажем его сюръективность. Пусть

$$g' \in K_0\big(B(M), S(M), E; X, A, x_0\big).$$

Построим отображение $g : M \to X$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &g(x) = g'(x), \quad x \in B(M), \\ &g\left(J^e(M)\right) = x_0, \\ &g(L_x) = g'(x), \quad x \in S(M), \quad (x, e) \geq 0, \end{aligned}$$

где полупрямая L_x с началом в точке x параллельна прямой L_e, проходящей через вектор e. Отображение g есть K_0 -отображение [4, 5], следовательно, $g \in K_0\big(M, M \setminus B^*(M), J^e(M); X, A, x_0\big)$ и его ограничение на $B(M)$ есть g'.

Построенное биективное соответствие можно распространить до биективного соответствия между гомотопическими множествами

$$K_0\big[M, M \setminus B^*(M), J^e(M); X, A, x_0\big] \quad \text{и} \quad K_0\big[B(M), S(M), E; X, A, x_0\big],$$

ибо в приведенных обозначениях имеют место отношения

$$h_t : f \overset{K_0}{\simeq} g \operatorname{rel} \big\{M \setminus B^*(M), J^e(M); A, x_0\big\}$$

тогда и только тогда, когда

$$h'_t : f' \overset{K_0}{\simeq} g' \operatorname{rel} \big\{S(M), E; A, x_0\big\}.$$

Следствие 4. *Предложение 4 позволяет* $K_0\big[B(M), S(M), E; X, A, x_0\big]$ *превратить в группу, изоморфную группе* $\Pi_q(X, A, x_0)$. *Таким образом, мы можем писать*

$$\Pi_q(X, A, x_0) = K_0\big[B(M), S(M), E; X, A, x_0\big],$$

т.е. элементы группы $\Pi_q(X, A, x_0)$ *определять как* K_0 *-гомотопические классы относительно семейства* $\big\{S(M), E; A, x_0\big\}$ K_0 *-отображений*

$$f : \big(B(M), S(M), E\big) \to (X, A, x_0).$$

Рассмотрим теперь тройку $\big(B(M), S(M), s_0\big)$ и множество $K_0\big(B(M), S(M), s_0; X, A, x_0\big)$ всех отображений $f : \big(B(M), S(M), s_0\big) \to (X, A, x_0)$, принадлежащих классу K_0 в гильбертовом пространстве $M \cup H$. Введем в этом множестве отношение K_0 -гомотопности относительно семейства $\big\{S(M), s_0; A, x_0\big\}$ и полученное фактор-множество обозначим через $K_0\big[B(M), S(M), s_0; X, A, x_0\big]$.

Предложение 5. *Существует биективное сответствие между элементами гомотопических множеств*

$$K_0\big[B(M), S(M), E; X, A, x_0\big] \quad \text{и} \quad K_0\big[B(M), S(M), s_0; X, A, x_0\big].$$

Доказательство. Рассуждения аналогичны рассуждениям, приведенным при доказательстве предложения 3. Полусферу E K_0-стянув в точку s_0, получим $\big(B(M), S(M), s_0\big)$, K_0-гомотопически эквивалентную тройке $\big(B(M), S(M), E\big)$. Пусть

$$\varphi : \big(B(M), S(M), E\big) \to \big(B(M), S(M), s_0\big)$$

$$\psi : \big(B(M), S(M), s_0\big) \to \big(B(M), S(M), E\big)$$

суть взаимно обратные K_0 -гомотопические эквивалентности, т.е.

$$\varphi\psi \overset{K_0}{\simeq} id\,\mathrm{rel}\,(S(M), E) \quad \text{и} \quad \psi\varphi \overset{K_0}{\simeq} id\,\mathrm{rel}\,(S(M), s_0).$$

Обычным образом посредством φ и ψ строится биективное соответствие между элементами множеств

$$K_0\big[B(M), S(M), E; X, A, x_0\big] \quad \text{и} \quad K_0\big[B(M), S(M), s_0; X, A, x_0\big].$$

Следствие 5. *В силу предложения 5 множество* $K_0\big[B(M), S(M), E; X, A, x_0\big]$ *можно наделить структурой группы, изоморфной группе* $\Pi_q(X, A, x_0)$.

Таким образом, мы можем группу $\Pi_q(X, A, x_0)$ *отождествлять с группой* $K_0\big[B(M), S(M), s_0; X, A, x_0\big]$, *и, следовательно, элементы группы* $\Pi_q(X, A, x_0)$

можно определять как K_0 -гомотопические классы относительно семейства $\{S(M), s_0; A, x_0\}$ отображений $f : \big(B(M), S(M), s_0\big) \to (X, A, x_0)$, принадлежащих классу K_0 относительно гильбертова пространства $M \cup H$.

Итак, в относительном случае наряду с основным определением существуют альтернативные, эквивалентные основному, определения K_0 -бесконечномерных относительных гомотопических групп.

3. K_0 -ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП

В этом пункте снова под M будем понимать подпространство или надпространство дефекта $q \in \mathbb{Z}$ вещественного гильбертова пространства H, а под $B(M)$, $S(M)$ – единичные замкнутый шар и сферу в M.

Построим в H следующие категории:

I. $\mathbf{P}K_0(H)$ – категория, объектами которой являются пунктированные подмножества (X, x_0) из H, а морфизмами – K_0 -отображения относительно H $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, сохраняющие отмеченные точки.

II. $\mathbf{P}K_{02}(H)$ – категория, объектами которой служат пары (X, A, x_0) с отмеченной точкой $x_0 \in A$ подмножеств из H, а морфизмами – K_0-отображения относительно H $\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$.

Предложение 6. (i) *Каждый морфизм $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ категории $\mathbf{P}K_0(H)$ индуцирует гомоморфизм $\varphi_* : \Pi_q(X, x_0) \to \Pi_q(Y, y_0)$ для каждого $q \in \mathbb{Z}$,*

(ii) *для любых морфизмов $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ и $\psi : (Y, y_0) \to (\mathbb{Z}, z_0)$ имеет место $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$,*

(iii) *при любом $q \in \mathbb{Z}$ гомоморфизм id_*, индуцированный тождественным отображением $id : (X, x_0) \to (X, x_0)$ есть тождественный автоморфизм группы $\Pi_q(X, x_0)$.*

Доказательство. (i) Согласно следствию 1 K_0 -сфероидом дефекта q множества X в точке x_0 можно считать всякое K_0 -отображение $f : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_0)$. Соответствие $f \to \varphi \circ f$ порождает отображение

$$\varphi_\# : K_0\big(B(M), S(M); X, x_0\big) \to K_0\big(B(M), S(M); Y, y_0\big).$$

При этом, имеет место $\varphi\circ(f+g)=\varphi\circ f+\varphi\circ g$. Далее, если $f\overset{K_0}{\simeq}g$ и $h_t: f\overset{K_0}{\simeq}g$ есть K_0 -гомотопия относительно $S(M)$, то $\varphi\circ h_t$ будет K_0 -гомотопией относительно $S(M)$, соединяющей K_0 -сфероиды $\varphi\circ f$ и $\varphi\circ g$. Отсюда следует, что можно корректно определить отображение

$$\varphi_*: K_0\big[B(M),S(M);X,x_0\big]\to K_0\big[B(M),S(M);Y,y_0\big].$$

Наконец, если $f\overset{K_0}{\simeq}f'$ и $g\overset{K_0}{\simeq}g'$, то $(f+g)\overset{K_0}{\simeq}(f'+g')$, откуда следует, что φ_* будет гомоморфизмом группы $\Pi_q(X,x_0)$ в группу $\Pi_q(Y,y_0)$, называемым *гомоморфизмом, индуцированным морфизмом* φ.

(ii) Для любого элемента $[f]\in\Pi_q(X,x_0)$ будем иметь

$$(\psi\circ\varphi)_*([f])=[\psi\circ\varphi\circ f]=\psi_*([\varphi f])=\psi_*(\varphi_*([f])).$$

(iii) Справедливость очевидна.

Следствие 6. *Соответствие $(X,x_0)\to\Pi_q(X,x_0)$, $\varphi\to\varphi_*$ является ковариантным функтором из категории $\mathbf{P}K_0(H)$ в категорию A абелевых групп.*

Предложение 7. *K_0 -гомотопные морфизмы $\varphi,\psi:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ категории $\mathbf{P}K_0(H)$ индуцируют одинаковые гомоморфизмы $\varphi_*,\psi_*:\Pi_q(X,x_0)\to\Pi_q(Y,y_0)$.*

Доказательство. Пусть $h_t:\varphi\overset{K_0}{\simeq}\psi(\mathrm{rel}\,S(M))$. Тогда для любого K_0 -сфероида $f:\big(B(M),S(M)\big)\to(X,x_0)$ семейство (h_tf), $0\le t\le1$, будет K_0 -гомотопией между φf и ψf. Откуда для любого элемента $[f]\in\Pi_q(X,x_0)$ будем иметь $\varphi([f])=[\varphi f]=[\psi f]=\psi_*([f])$.

Определение 4. *Морфизм $\varphi:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ категории $\mathbf{P}\,K_0(H)$ будем называть K_0 -гомотопической эквивалентностью, если существует морфизм $\psi:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ категории $\mathbf{P}K_0(H)$ такой, что*

$$\psi\varphi\overset{K_0}{\simeq}id_x(\mathrm{rel}\,\{x_0\})\quad \text{и}\quad \varphi\psi\overset{K_0}{\simeq}id_y(\mathrm{rel}\,\{\nu_0\}).$$

Теорема 1. (О K_0 -гомотопической инвариантности.) *K_0 -гомотопическая эквивалентность $\varphi:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ категории $\mathbf{P}K_0(H)$ индуцирует изоморфизм*

$$\varphi_*:\Pi_q(X,x_0)\cong\Pi_q(Y,y_0)$$

для любого $q\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $\psi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ – морфизм категории $\mathbf{P}K_0(H)$, удовлетворяющий условиям из определения 4. Переходя в них к индуцированным гомоморфизмам, в силу предложения 6 будем иметь: $\psi_*\varphi_* = id$ и $\varphi_*\psi_* = id$. Откуда следует, что φ_* есть изоморфозм и $(\varphi_*)^{-1} = \psi_*$.

Переходя теперь к относительному слеучаю, отметим, что все доказанные утверждения относительно абсолютного случая остаются справедливыми и в относительном случае, мы их сформулируем без доказательства, так как эти доказательства аналогичны.

Пусть (X, A, x_0) и (Y, B, y_0) – произвольные пунктированные пары подмножеств из H и $\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ – морфизм категории $\mathbf{P}K_{02}(H)$. Тогда согласно следствию 4 K_0 -сфероиды пары (X, A, x_0) можно определять как K_0 -отображения

$$f : \big(B(M), S(M), E\big) \to (X, A, x_0).$$

Поэтому композиция $\varphi \circ f$ будет K_0 -сфероидом дефекта $q \in \mathbb{Z}$ пары (Y, B, y_0), при этом, если f и g будут K_0-гомотопными относительно семейства $\big\{S(M), E, A, x_0\big\}$, то K_0-сфероиды $\varphi \circ f$, $\varphi \circ g$ будут K_0-гомотопными относительно $\big\{S(M), E, B, y_0\big\}$. Следовательно, φ индуцирует отображение $\varphi_* : \Pi_q(X, A, x_0) \to \Pi_q(Y, B, y_0)$.

Предложение 8. (i) *Всякий морфизм $\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ категории $\mathbf{P}K_{02}(H)$ индуцирует гомоморфизм $\varphi_* : \Pi_q(X, A, x_0) \to \Pi_q(Y, B, y_0)$ для каждого $q \in \mathbb{Z}$,*

(ii) *Имеет место $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$,*

(iii) *Тождественное отображение $id : (X, A, x_0) \to (X, A, x_0)$ индуцирует тождественный автоморфизм $id_* : \Pi_q(X, A, x_0) \cong \Pi_q(X, A, x_0)$.*

Следствие 7. Соответствие $(X, A, x_0) \to \Pi_q(X, A, x_0)$, $\varphi \to \varphi_*$ есть ковариантный фактор из категории $\mathbf{P}K_{02}(H)$ в категорию A абелевых групп.

Предложение 9. *K_0 -гомотопные морфизмы*

$$\varphi, \psi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$$

категории $\mathbf{P}K_{02}(H)$ индуцируют одинаковые морфизмы

$$\varphi_*, \psi_* : \Pi_q(X, A, x_0) \to \Pi_q(Y, B, y_0).$$

Определение 5. *Морфизм $\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ категории $\mathbf{P}K_{02}(H)$ называется K_0 -гомотопической эквивалентностью, если существует морфизм*

$\psi : (Y, B, y_0) \to (X, A, x_0)$ *из этой же категории, такой что выполнены условия*

$$\psi\varphi \overset{K_0}{\simeq} id \operatorname{rel}\{S(M), E, A, x_0\}, \quad \varphi\psi \overset{K_0}{\simeq} id \operatorname{rel}\{S(M), E, B, y_0\}.$$

Теорема 2. (О K_0 -гомотопической инвариантности) *K_0 -гомотопическая эквивалентность $\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ категории $\mathbf{P}K_{02}(H)$ индуцирует изоморфизм*

$$\varphi_* : \Pi_q(X, x_0) \cong \Pi_q(Y, B, y_0)$$

при любом $q \in \mathbb{Z}$.

4. ЗАВИСИМОСТЬ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП ОТ ВЫБОРА БАЗИСНОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим вопрос о зависимости групп $\Pi_q(X, x_0)$ и $\Pi_q(X, A, x_0)$ от выбора базисной точки x_0. Мы продолжаем под M понимать произвольное зафиксированное подпространство или надпространство дефекта $q \in \mathbb{Z}$ пространства H. Напомним, что через $B(M)$ и $S(M)$ обозначаются единичные замкнутый шар и сфера в M. Положим $M' = \mathbb{R} \times M$ и пусть $[0, 1]$ – отрезок числовой прямой $\mathbb{R}$. Введем следующую модификацию обычного понятия непрерывного пути.

Определение 6. *K_0 -путем в множестве $X \subset H$ будем называть всякое отображение $\sigma : [0, 1] \to X$, принадлежащее классу K_0 относительно гильбертова пространства $M' \cup H$.*

Путь, обратный к K_0 -пути и постоянный путь суть K_0 -пути, произведение двух K_0 -путей снова есть K_0 -путь. Естественным образом определяются понятия K_0 -гомотопности K_0 -путей K_0 -линейно связанного множества X и компоненты K_0 -линейной связности точки $x_0 \in X$.

Определение 7. *Пусть $f_0 : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_0)$ и $f_1 : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1)$ – K_0 -сфероиды и $\sigma : I \to X$ есть K_0 -путь в X такой, что $\sigma(0) = x_0$, $\sigma(1) = x_1$. Будем говорить, что f_0 и f_1 σ-гомотопны, если существует такая K_0 -гомотопия $f_t : B(M) \to X$, соединяющая f_0 с f_1 и $f_t(S(M)) = \sigma(1 - t)$ при $t \in I$. Такую гомотопию называют также гомотопией вдоль пути σ.*

Лемма 1. *Пусть $\sigma : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1)$ – произвольный K_0-путь в X и*

$$f : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1)$$

есть K_0 -сфероид, тогда существует K_0 -сфероид

$$f' : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1)$$

, σ-гомотопный сфероиду f.

Доказательство. Определим отображение $\varphi_t(S(M)) \to X$, приняв $\varphi_t(S(M)) = \sigma(1-t)$. Гомотопия φ_t есть частичная гомотопия f. Покажем, что φ_t есть K_0 -гомотопия, т.е. отображение $\Phi : I \times S(M) \to X$, задаваемое формулой $\Phi(t,x) = \varphi_t(x)$ есть K_0 -отображение, но это следует из того, что Φ есть композиция трех K_0 -отображений $(t,x) \to t \to (1-t) \to \sigma(1-t)$. Поскольку $(B(m), S(M))$ есть K_0 -пара Борсука [5], то существует K_0 -гомотопия $f_t : B(M) \to X$, продолжающая гомотопию φ_t. Приняв $f_1 = f'$, получим K_0 -сфероид

$$f' : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1),$$

σ-гомотопный f.

Лемма 2. *Пусть f, g : $\big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1)$ есть K_0 -сфероиды, K_0 -гомотопные* $\operatorname{rel}(S(M))$ *и*

$$\sigma, \tau : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1) - -$$

K_0 -гомотопные K_0 -пути относительно концов отрезка I. Пусть $f_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия f вдоль σ и $g_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия g вдоль пути σ. Тогда, приняв $f_1 = f'$ и $g_1 = g'$, получим K_0 -сфероиды

$$f', g' : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_0),$$

K_0 -гомотопные $\operatorname{rel}(S(M))$.

Доказательство. Рассмотрим K_0 -отображения $F, G : I \times B(M) \to X$, порожденные гомотопиями f_t и g_t соответственно, т.е. $F(t,x) = f_t(x)$ и $G(t,x) = g_t(x)$. Положим

$$\widetilde{S(M)} = \{0\} \times B(M) \cup I \times S(M)$$

и обозначим через $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$ ограничения на $\widetilde{S(M)}$ отображений соответственно F и G . Из отношений

$$f \overset{K_0}{\simeq} g \operatorname{rel}(S(M)) \quad \text{и} \quad \sigma \overset{K_0}{\simeq} \tau \operatorname{rel}(\partial I)$$

следует, что отображения $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$ K_0 -гомотопны относительно подпространств $\{0\} \times S(M)$ и $\{1\} \times S(M)$ соответственно. Поскольку $\big(B(M), S(M)\big)$ есть K_0 -пара Борсука [5], то $\widetilde{S(M)}$ есть K_0 -ретракт для $I \times B(M)$, и поэтому $\big(I \times B(M), \widetilde{S(M)}\big)$

есть K_0 -пара Борсука [5], так как $I \times B(M)$ есть $K_0 N\mathbb{R}$. Отсюда следует, что существует K_0 -гомотопия $F_t : I \times B(M) \to X$ такая что

$$F_0 = f, \quad F_1|\widetilde{S(M)} = G|\widetilde{S(M)}, \quad F_t(1 \times S(M)) = x_0, \quad t \in I.$$

Пусть $\psi_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия, порожденная F_1, т.е. $\psi_t(x) = F_1(t, x)$. Гомотопия ψ_t есть K_0 -гомотопия g вдоль пути τ. Так как

$$F_t\big(\{1\} \times S(M)\big) = x_0, \quad t \in I,$$

то $f_1 \overset{K_0}{\simeq} \psi \operatorname{rel}(S(M))$, т.е. K_0 -сфероиды $f_1, \psi_1 : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_0)$ гомотопны $\operatorname{rel}(S(M))$. Докажем теперь, что K_0 -сфероиды ψ_1 и g_1 K_0 -гомотопны $\operatorname{rel}(S(M))$. Построим отображение $P : I \times B(M) \to X$ следующим образом:

$$P(t, x) = \begin{cases} g_{1-2t}(x) & \text{при} \quad 0 \le t \le 1/2, \\ \psi_{2t-1}(x) & \text{при} \quad 1/2 \le t \le 1, \end{cases} \qquad x \in B(M).$$

Так как $P(t, x) = P(1 - t, x)$, $x \in S(M)$, то, положив

$$Q_t(s, x) = \begin{cases} P(s, x) & \text{при} \quad x \in B(M), \quad s \in \partial I, \\ P(s - ts, x) & \text{при} \quad x \in S(M), \quad 0 \le s \le 1/2, \\ Q_t(1 - s, x) & \text{при} \quad x \in S(M), \quad 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

получим K_0 -частичную гомотопию $Q_t : \partial\big(I \times B(M)\big) \to X$ отображения P на $\partial\big(I \times B(M)\big) = I \times S(M) \cup \partial I \times B(M)$. Множество $\partial\big(I \times B(M)\big)$ есть K_0 -окрестностный ретракт для $I \times B(M)$, поэтому $\big(I \times B(M), \partial\big(I \times B(M)\big)\big)$ есть K_0 -пара Борсука [5]. Следовательно, существует K_0 -гомотопия $P_t : I \times B(M) \to X$ отображения P, продолжающая Q_t. Пусть $\mu_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия, порождающая K_0 -отображение P_1, т.е.

$$P_1(t, x) = \mu_t(x), \quad x \in B(M), \quad t \in I,$$

тогда $\mu_0 = g_1$, $\mu_1 = \psi_1$. Поскольку $\mu_t(S(M)) = P_1\big(\{t\} \times S(M)\big)$ для всех $t \in I$, то K_0 -сфероиды

$$g_1, \psi_1 : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_0)$$

K_0 -гомотопны $\operatorname{rel}(S(M))$. Таким образом, $f_1 = f'$ и $g_1 = g'$ K_0 -гомотопны $\operatorname{rel}(S(M))$.

Следствие 8. *Пусть* $\alpha = [f]$ *– произвольный элемент группы* $\Pi_q(X, x_1)$,

$$f : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1) \quad \text{\emph{и}} \quad \sigma : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1).$$

Тогда согласно лемме 1 существует K_0 *-сфероид* $f' : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_0)$ σ*-гомотопный* f. *Далее, согласно лемме 2 класс* $\beta[f']$ *зависит только от класса*

$[f]$, и получаем однозначно определенное отображение

$$\sigma_q : \Pi_q(X, x_1) \to \Pi_q(X, x_0).$$

Причем, в силу леммы 2, если $\sigma \overset{K_0}{\simeq} \tau \operatorname{rel}(\partial I)$, то $\sigma_q = \tau_q$.

Лемма 3. (i) *если K_0 -пути $\sigma, \tau : I \to X$ таковы, что $\sigma(1) = \tau(0)$, то*

$$(\sigma\tau)_q = \sigma_q \tau_q,$$

(ii) *отображение $\sigma_q : \Pi_q(X, x_0) \to \Pi_q(X, x_0)$, порожденное постоянным путем $\sigma(I) = x_0$, есть тождественное отображение группы $\Pi_q(X, x_0)$.*

Доказательство. (i) Пусть

$$\sigma : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1), \quad \tau : (I, 0, 1) \to (X, x_1, x_2), \quad f : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_2),$$

пусть далее $f_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия вдоль пути τ сфероида f, а $g_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия вдоль пути σ сфероида $f_1 : \big(B(M), S(M)\big) \to (X, x_1)$. Тогда произведение этих гомотопий будет K_0 -гомотопией вдоль пути $\sigma\tau$ сфероида f.

Справедливость (ii) очевидна.

Теорема 3. *Для всякого K_0 -пути $\sigma : I \to X$ в множестве X из H с $\sigma(0) = x_0$ и $\sigma(1) = x_1$, порожденное σ отображение*

$$\sigma_q : \Pi_q(X, x_1) \to \Pi_q(X, x_0)$$

является изоморфизмом между этими группами для всякого $q \in \mathbb{Z}$, зависящим только от K_0 -гомотопического класса пути σ относительно концов 0 и 1 отрезка I.

Доказательство. Покажем сначала, что σ_q есть гомоморфизм, т.е.

$$\sigma_q(\alpha + \beta) = \sigma_q(\alpha) + \sigma_q(\beta), \quad \alpha, \beta \in \Pi_q(X, x_1).$$

Пусть $\alpha = [f]$, $\beta = [g]$ и $f_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия вдоль σ-сфероида f, а $g_t : B(M) \to X$ – K_0 -гомотопия вдоль σ-сфероида g. По определению σ_q будем иметь $\sigma_q(\alpha) = [f_1]$ и $\sigma_q(\beta) = [g_1]$. Рассмотрим K_0 -гомотопию $h_t : B(M) \to X$, полагая

$$h_t = f_t + g_t.$$

Ясно, что $\alpha + \beta = [h_0] = [f + g]$ и h_t есть K_0 -гомотопия вдоль пути σ и $[h_1] = [f_1] + [g_1]$. Следовательно,

$$\sigma_q(\alpha + \beta) = [h_1] = \sigma_q(\alpha) + \sigma_q(\beta).$$

Покажем, что σ_q есть изоморфизм. Рассмотрим K_0 -путь $\tau(t) = \sigma(1-t)$, $t \in I$, обратный к σ. По соображениям симметрии

$$\tau_q : \Pi_q(X, x_0) \cong \Pi_q(X, x_1).$$

Поскольку пути $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$ K_0 -гомотопны постоянному пути точки x_0, то согласно изложенному выше будем иметь $\sigma_q \circ \tau_q = id$ и $\tau_q \circ \sigma_q = id$, откуда следует, что σ_q есть изоморфизм и $\tau_q = (\sigma_q)^{-1}$.

Аналогичная теорема имеет место и для групп $\Pi_q(X, A, x_0)$.

Теорема 4. *K_0 -путь $\sigma : (I, 0, 1) \to (A, 0, x_1)$ порождает изоморфизм*

$$\sigma_q : \Pi_q(X, A, x_1) \cong \Pi_q(X, A, x_0),$$

зависящий толко от K_0 -гомотопического класса пути $\sigma \operatorname{rel}(\partial i)$.

Abstract. The paper discusses some equivalent ways of construction of infinite-dimensional homotopic groups of subsets and pairs of subsets in real Hilbert spaces. In the admissible class of K_0 -continuous mappings, the homotopic invariance of the mentioned groups and their isomorphism are demonstrated in the case where the basic points belong to the same component of K_0 -linear connectivity.

Список литературы

[1] Э. А. Мирзаханян, “О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства, I”, Уч. записи ЕГУ, (3), 21-28 (1990).

[2] Э. А. Мирзаханян, “О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства, II”, Уч. записи ЕГУ, (1), 3-10 (1991).

[3] Э. А. Мирзаханян, “Построение бесконечномерных относительных гомотопических групп в гильбертовом пространстве”, Изв. ВУЗов, Математика, Казань, (8), 43-52 (2002).

[4] Э. А. Мирзаханян, “Классы подпростанств гильбертова пространства”, Изв. НАН Армении, Математика **37** (4), 31-44 (2002).

[5] Э. А. Мирзаханян, Н. Э. Мирзаханян, “Модифицированные пары Борсука в гильбертовом пространстве”, Изв. НАН Армении, Математика **39** (6), 56-76 (2004).

[6] Ху Сы-Цзян, *Теория гомотопий*, (Мир, Москва, 1964).

Поступила 16 июля 2007