Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 4, 2008, стр. 18-28

О СХОДИМОСТИ ГРИДИ АЛГОРИТМА ПО СИСТЕМЕ УОЛША В ПРОСТРАНСТВЕ $C(0,1)$

Г. АМИРХАНЯН

Институт математики НАН Армении
E-mail: *a_gagik@mail.ru*

Аннотация. В работе изучаются вопросы сходимости гриди алгоритма по системе Уолша в пространстве $C(0,1)$. Приведены достаточные условия для равномерной сходимости гриди алгоритма по системе Уолша. Доказано существование функции, удовлетворяющей более сильным условиям, для которой последовательность частных сумм ряда Фурье-Уолша расходится в точке 0.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $F = \{f_n\}$ – полная, минимальная, нормированная система в Банаховом пространстве X и $G = \{g_n\}$ – ее сопряженная система. Слабый гриди алгоритм по системе F определяется следующим образом. Пусть $t \in (0,1]$ фиксировано и функция $f \in X$. Обозначим через $\Lambda_m(t)$ множество из m индексов, для которого справедливо неравенство:

$$\min_{k\in\Lambda_m(t)} |c_k(f)| \geq t \max_{k\notin\Lambda_m(t)} |c_k(f)|,$$

где $c_k(f) = \langle g_k, f\rangle$, и определим

$$G_m^t(f) := G_m^t(f,F) := \sum_{k\in\Lambda_m(t)} c_k(f) w_k,$$

которое называется слабым гриди аппроксимантом функции f по системе F. В случае $t = 1$

$$G_m(f) = G_m(f,F) := G_m^1(f,F)$$

называется гриди аппроксимантом функции f. Вопросы сходимости гриди алгоритма по тригонометрической системе изучались Корнером [1, 2], Темляковым и Конягином [3, 4, 5]. В работе автора [6] эти вопросы рассмотрены для системы Уолша $\mathcal{W} = \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ в пространствах $L_p(0,1)$.

В настоящей работе мы приводим аналоги некоторых результатов Конягина и Темлякова [5] для системы Уолша в пространстве непрерывных функций $C(0,1)$. Для любой функции $f \in L_1(0,1)$ обозначим через $\{a_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ убывающую перестановку последовательности $\{|c_k(f)|\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $c_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f по системе Уолша.

Теорема 1. *Пусть убывающая последовательность $\{A_n\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{M<n\le e^M} A_n = o(1) \quad \textit{при} \quad M \to \infty.$$

Тогда для каждой функции $f \in C(0,1)$ такой, что $a_n(f) \le A_n$, $n = 1,2,\ldots$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f - G_m^t(f,\mathcal{W}) \right\|_{\infty} = 0.$$

Ясно, что последовательность $\{A_n\}$ может удовлетворять условию теоремы 1 и не быть суммируемой. Из следующей теоремы, в частности, следует, что существует непрерывная функция, гриди алгоритм которой по системе Уолша равномерно сходится, а ряд Фурье-Уолша расходится в некоторой точке.

Теорема 2. *Пусть убывающая последовательность положительных чисел A_n, $n = 1,2,\ldots$ не суммируема. Тогда существует непрерывная функция f такая, что $a_n(f) \le A_n$, для которой последовательность частных сумм ряда Фурье-Уолша расходится в точке* 0.

Теорема 1 доказывается аналогично случаю тригонометрической системы (см. [5]), в обосновании нуждается только доказанная в следующем параграфе лемма 2.

Ниже мы докажем теорему 2.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним, что система Уолша $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли определяется равенствами

$$w_0(x) \equiv 1, \quad w_n(x) = \prod_{i=0}^{k} \big(r_i(x)\big)^{\varepsilon_i} \quad \text{если} \quad n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i \quad (\varepsilon_i = 0 \,\text{или}\, 1),$$

где $\{r_i(x)\}$ – система Радемахера. Ядро Дирихле для системы Уолша определяется следующим образом:

$$D_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x).$$

Для функции $f(x)$ определим $\omega(f)$ следующим образом:

$$\omega(f,x) = \lim_{\delta\to 0+} \sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)|,$$
$$\omega(f) = \sup_x \omega(f,x).$$

Рассмотрим поле $F_2 := \{0;1\}$, где сложение и умножение определяются по модулю 2.

Лемма 1. *Пусть* $\epsilon_i^j \in F_2$ $(i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m)$, $n \geq m$ *и* $b_j \in F_2$ $(j = 1,\ldots,m)$. *Тогда, если система линейных уравнений*

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^j x_i = b_j, \quad j = 1,\ldots,m,$$

имеет хотя бы одно решение в поле F_2, *то она имеет как минимум* 2^{n-m} *разных решений.*

Доказательство. Так как система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то из переменных $x_1, x_1, \ldots, x_n$, как минимум, $n-m$ независимы. Следовательно, задавая каждому из них значения 0 или 1, получим разные решения системы линейных уравнений. Таким образом, будем иметь 2^{n-m} разных решений.

Лемма 2. *Пусть функция* f, $\|f\|_\infty = 1$ *имеет вид*

$$f = \sum_{k\in\Lambda} c_k w_k(x), \quad |\Lambda| \leq m.$$

Тогда для всякой функции g *такой, что* $\|g\|_2 \leq 2^{-m/2-1}$ *справедливо неравенство*

$$\|f+g\|_\infty \geq 1/2.$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in [0,1]$ и $y_0 = f(x_0)$, докажем, что

$$m\{x : f(x) = y_0\} \geq 2^{-m}.$$

Пусть $\{x_i\}$ – последовательность коэффициентов двоичного разложения числа x (конечная в случае двоично-рационального x), т.е.

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i 2^{-i-1}, \quad x_i = 0 \text{ или } 1.$$

Воспользуемся следующим представлением функции Уолша (см. [7], 1.2.12):

$$w_n(x) = (-1)^{\sum_{i=0}^{k} \epsilon_i x_i},$$

где $n = \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i 2^i$ и $\epsilon_i = 0$ или 1.

Пусть

$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j w_{n_j}(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j (-1)^{\sum_{i=0}^{k} \epsilon_i^j x_i}.$$

Значение f в точке x зависит от четности числа $\sum_{i=0}^{k} \epsilon_i^j x_i$. Положим

$$b_j(x) := \sum_{i=0}^{k} \epsilon_i^j x_i \mod 2, \quad b_j(x) = 0 \text{ или } 1, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Так как $y_0 = f(x_0)$, то равенство $f(x) = y_0$ будет выполняеться во всех точках x, для которых

$$\sum_{i=0}^{k} \epsilon_i^j x_i = b_j(x_0) \mod 2, \quad j = 1, 2, \dots, m. \tag{2.1}$$

Можно считать, что $k \geq m$, в противном случае можно добавить нулевые коэффициенты: $\epsilon_i^j = 0$, $i > k$. Систему уравнений (2.1) можно рассмотреть в поле F_2. Согласно лемме 1 имеем 2^{k+1-m} разных решений уравнений (2.1), а каждому решению $x_0, x_1, \dots, x_k$ соответствует множество

$$\left[\sum_{i=0}^{k} x_i 2^{-i-1}, \sum_{i=0}^{k} x_i 2^{-i-1} + 2^{-k-1} \right)$$

меры 2^{-k-1}, для которого $f(x) = y_0$. Заметим, что эти множества попарно не пересекаются. Таким образом, имеем множество меры $2^{k+1-m} 2^{-k-1} = 2^{-m}$, на котором $f(x) = y_0$. Пусть $y_0 = 1 = \|f\|_\infty$ и $A = \{x : f(x) = 1\}$. Тогда

$$mA \geq 2^{-m},$$

где mA – Лебегова мера множества A. Предположим, что

$$\|f + g\|_\infty < 1/2.$$

Тогда на множестве A будем иметь, что $g(x) < -1/2$. Следовательно,

$$\|g\|_2 \geq \left(\int_A |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} > \left(\int_A \frac{1}{4} dx \right)^{1/2} \geq 2^{-m/2-1}.$$

Что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Через

$$S_N(f, x) = \sum_{n=0}^{N} c_n(f) w_n(x)$$

обозначим частную сумму ряда Фурье-Уолша интегрируемой функции f.

Лемма 3. *Пусть убывающая последовательность* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \searrow 0$ *не суммируема. Тогда для произвольного* $k \in \mathbb{N}$ *существует полином Уолша* q *и натуральное число* N *такие, что*

$$a_n(q) \leq A_n, \quad n \geq 1, \tag{2.2}$$

$$\|q\|_{\infty} \to 0 \quad \textit{при} \quad k \to \infty, \tag{2.3}$$

$$S_N(q,0) \to \infty \quad \textit{при} \quad k \to \infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. Константы Лебега для системы Уолша

$$L_n := \int_0^1 |D_n(t)|dt$$

удовлетворяют неравенству

$$L_{n_k} > C \ln n_k$$

для некоторой последовательности n_k (см. [7], 2.2.5). Пусть

$$p_k(x) := sgn(D_{n_k}(x)).$$

Тогда

$$|p_k(x)| \leq 1 \quad \text{и} \quad p_k(x)D_{n_k}(x) = |D_{n_k}(x)|, \quad x \in [0,1]. \tag{2.5}$$

Очевидно, что p_k есть полином по системе Уолша степени не больше $2n_k$. Далее, имеем

$$S_{n_k}(p_k,0) = \int_0^1 p_k(t)D_{n_k}(t)dt = \int_0^1 \big|D_{n_k}(t)\big|dt = L_{n_k}. \tag{2.6}$$

Откуда получим

$$|c_n(p_k)| \leq 1. \tag{2.7}$$

Можно считать, что $A_n \to 0$. Имеем

$$\sum_n A_{2ln} = \infty, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Поэтому для $l = n_k$ можно найти числа $m_2 > m_1$ такие что

$$(\ln l)^{-1/2} \leq \sum_{m_1 < n \leq m_2} A_{2ln} \leq 2(\ln l)^{-1/2}. \tag{2.8}$$

Пусть $p_k = \sum_{j=0}^{k_0} a_j w_j$, где $k_0 < 2l$. Положим

$$p_k^s(x) := \sum_{j=0}^{k_0} a_j w_{2^s j}(x). \tag{2.9}$$

Если рассматривать функции Уолша на всей числовой оси как периодические функции с периодом 1, то справедливы равенства (см. [7], 1.1.9)

$$w_{2^s j}(x) = w_j(2^s x)$$

$$p_k^s(x) = p_k(2^s x). \tag{2.10}$$

Определим

$$q_n(x) := A_{2ln} w_n(x) p_k^s(x), \tag{2.11}$$

где $2^s > m_2$. Возьмем

$$q(x) := \sum_{m_1 < n \le m_2} q_n(x)$$

Заметим, что спектры полиномов q_n не пересекаются. Действительно, поскольку $n < 2^s$, слагаемые в q_n будут иметь вид

$$w_n w_{2^s j} = w_{n \oplus 2^s j} = w_{n + 2^s j}.$$

Поэтому для коэффициентов Фурье-Уолша функции q справедливо

$$|c_{n+2^s j}(q)| = |c_j(p_k) A_{2ln}| \le A_{2ln} \le A_{2ln-j}, \quad 0 \le j \le k_0,$$

Заметим, что индексы $2ln - j$ при $m_1 < n \le m_2$ и $0 \le j \le k_0$ различны и больше $2m_1$. Это доказывает (2.2). Из (2.5), (2.8), (2.10) и (2.11) получим

$$\|q\|_\infty \le \sum_{m_1 < n \le m_2} \|q_n\|_\infty \le \sum_{m_1 < n \le m_2} A_{2ln} \le 2(\ln l)^{-1/2},$$

откуда следует (2.3). Пусть $N = 2^s n_k + m_2$. Тогда

$$S_N(q_n, 0) = A_{2ln} S_N(w_n(x) p_k^s(x), 0) = A_{2ln} S_N(p_k^s(x), 0).$$

Используя (2.9) получим, что

$$S_N(q_n, 0) = A_{2ln} \sum_{j=0}^{n_k} a_j = A_{2ln} S_{n_k}(p_k, 0) = A_{2ln} L_{n_k} > C A_{2ln} \ln l.$$

Следовательно,

$$S_N(q, 0) = \sum_{m_1 < n \le m_2} S_N(q, 0) > C \sum_{m_1 < n \le m_2} A_{2ln} \ln l > C(\ln l)^{1/2}$$

(см. (2.8)), откуда следует (2.4).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \searrow$ не суммируемая последовательность. По индукции построим последовательности полиномов Уолша $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$. Возьмем последовательности $\{\alpha_i\}$ и $\{\epsilon_i\}$:

$$\frac{1}{2} = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha < 1 \quad \text{и} \quad \epsilon_i = 2^{-i}.$$

Используя лемму 3, построим полином q_1 так, чтобы выполнялись соотношения:

$$a_n(q_1) < \frac{1}{2} A_n, \quad n \geq 1, \tag{3.1}$$

$$\|q_1\|_\infty < \epsilon_0, \tag{3.2}$$

$$S_{N_1}(q_1, 0) > 1. \tag{3.3}$$

Функция q_1 кусочно постоянна и имеет разрывы в двоично рациональных точках. Пусть c одна из таких точек разрыва, тогда q_1 постоянна на некоторых двоичных интервалах $[a, c)$ и $[c, b)$. Рассмотрим последовательность вложенных двоичных интервалов

$$I_j = [a_j, c), \quad j = 0, 1, \ldots, l, \quad a = a_0 < a_1 < \ldots < c,$$

таких, что

$$|I_j| = \frac{1}{2} |I_{j-1}|, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

Тогда для некоторого $k > 0$

$$|I_j| = \frac{1}{2^{k+j}}, \quad j = 1, \ldots \tag{3.4}$$

Обозначим через X_I – характеристическую функцию интервала I и построим функцию вида

$$p_1 = \sum_{j=1}^{l} b_j X_{I_j}$$

так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\omega(q_1 + p_1, x)_{[a,b)} < \epsilon_1. \tag{3.5}$$

$$\|p_1\|_\infty \leq \omega(q_1), \tag{3.6}$$

$$a_n(q_1 + p_1) < \alpha_1 A_n, \tag{3.7}$$

$$S_{N_1}(q_1 + p_1, 0) > 1. \tag{3.8}$$

Для выполнения (3.5) и (3.6) достаточно, чтобы $\{b_j\}_{j=1}^{l}$ удовлетворяли условиям:

(i) b_j имеет тот же знак, что и $q_1(c+0) - q_1(c-0)$,

(ii) $|b_j| < \epsilon_1$, $j = 1, \ldots, l$,

(iii) $\omega(q_1, c) - \epsilon_1 < \sum_{j=1}^{l} |b_j| < \omega(q_1, c)$.

А условия (3.7) и (3.8) будут выполнены, если при достаточно маленьком β ($0 < \beta < \alpha_1 - \alpha_0$) мы будем иметь, что

$$a_n(p_1) < \beta A_{n_1+n}, \quad n > 0, \tag{3.9}$$

где

$$n_1 = \max\{n : a_n(q_1) \neq 0\}.$$

Действительно, тогда (3.8) будет следовать из (3.3), а (3.7) из (3.1), так как в силу определения n_1

$$a_n(q_1 + p_1) \leq a_n(q_1) + a_1(p_1) \quad \text{при} \quad n \leq n_1$$

и

$$a_n(q_1 + p_1) \leq a_{n-n_1}(p_1) \quad \text{при} \quad n > n_1.$$

Определим коэффициенты b_j

$$|b_j| = \frac{\beta}{2} A_{n_1+2^{k+j}}, \quad j = 1, 2, \ldots, l \tag{3.10}$$

(см. также (i)), и проверим выполнение условий (ii), (iii) и (3.9).

Условие (ii) очевидно выполняется, если число β достаточно мало. Возможность выбора числа l такого, чтобы имело место (iii) следует из (ii) и из того, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} A_{n_1+2^{k+j}}$ расходится. Действительно, в силу монотонности A_n

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{n_1+2^{k+j}} > \frac{1}{2^k} \sum_{j=n_1+2^k}^{\infty} A_j = \infty.$$

Для коэффициентов Фурье-Уолша функции p_1 имеем

$$c_n(p_1) = \int_0^1 w_n(x) p_1(x) dx = \int_{I_1} w_n(x) p_1(x) dx. \tag{3.11}$$

Если $n < 2^k$, то (см. (3.10), (3.11))

$$\left|c_n(p_1)\right| = \left|\int_{I_1} p_1(x) dx\right| = \sum_{j=1}^{l} |b_j||I_j| < \beta A_{n_1+2^{k+1}} < \beta A_{n_1+n+1}.$$

Пусть $a_i(p_1) = |c_{k_i}(p_1)|$. Так как k_i при $0 < i \leq n$ неотрицательны и различны, то для некоторого $j \leq n$ справедливо $k_j \geq n - 1$. Учитывая монотонность $a_i(p_1)$ имеем

$$a_n(p_1) \leq a_j(p_1) = |c_{k_j}(p_1)| \leq \beta A_{n_1+n}.$$

Пусть теперь $2^{k_1} \le n < 2^{k_1+1}$. Тогда

$$c_n(p_1) = \int_0^1 w_n(x)p_1(x)dx = \int_0^1 w_n(x)\sum_{j=1}^{l} b_j X_{I_j}(x)dx = \sum_{j=k_1}^{l} b_j \int_{I_j} w_n(x)dx$$

при $1 \le k_1 < l$. Следовательно,

$$\left|c_n(p_1)\right| \le \left|\int_{I_{k_1}} p_1(x)dx\right| = \sum_{j=k_1}^{l} |b_j||I_j| < \beta A_{n_1+2^{k_1+1}} \le \beta A_{n_1+n+1}$$

откуда, как и в случае $n < 2^k$ следует (3.9). Таким образам, мы построили полином p_1, удовлетворяющий условиям (3.5)-(3.8).

Если повторить этот процесс для кождой точки разрыва функции q_1, то можно получить

$$\omega(q_1 + p_1, x)_{[0,1]} < \epsilon_1 \tag{3.12}$$

вместе с условиями (3.6)-(3.8).

Допустим полиномы p_k и q_k построены. Применив лемму 3 для последовательности $A_{n+m_{k+1}}$, $n = 1, 2, \ldots$, найдем полином q_{k+1} такой, что:

(a) любой коэффициент полинома q_{k+1} по модулю меньше, чем коэффициенты полинома

$$f_k := \sum_{i=1}^{k}(q_i + p_i),$$

(b) спектры у q_{k+1} и f_k не пересекаются, т.е.

$$\min\{n : c_n(q_{k+1}) \ne 0\} > \max\{n : c_n(f_k) \ne 0\},$$

(c) выполняются условия:

$$a_n(q_{k+1}) < \alpha_k A_{n+m_{k+1}}, \quad n > 0, \tag{3.13}$$

$$\|q_{k+1}\|_\infty < \epsilon_k, \tag{3.14}$$

$$S_{N_{k+1}}(q_{k+1}, 0) > 2^k, \tag{3.15}$$

где

$$m_{k+1} = \max\{n : a_n(f_k) \ne 0\}.$$

Затем, аналогично случаю $k = 1$, построим полином p_{k+1} так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\omega(f_{k+1}, x)_{[0,1]} < \epsilon_{k+1}, \tag{3.16}$$

$$\|p_{k+1}\|_\infty \leq \omega(f_k + q_{k+1}) \leq 2\epsilon_k, \tag{3.17}$$

$$a_n(f_{k+1}) < \alpha_{k+1} A_n, \tag{3.18}$$

$$S_{N_{k+1}}(q_{k+1} + p_{k+1}, 0) > 2^k. \tag{3.19}$$

Последовательности $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ построены. Положим

$$f := \sum_{i=1}^{\infty}(q_i + p_i) = \lim_{i\to\infty} f_i. \tag{3.20}$$

Равномерная сходимость этого ряда следует из (3.14) и (3.17). Докажем непрерывность функции f. Пусть $x_0 \in [0, 1]$. Из (3.16) следует, что существует число $\delta > 0$ такое, что

$$|f_k(x) - f_k(x_0)| < \epsilon_k \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Следовательно (см. (3.14) и (3.17))

$$|f(x) - f(x_0)| < |f_k(x) - f_k(x_0)| + 2^{-k+3} < \epsilon_k + 2^{-k+3}, \quad |x - x_0| < \delta.$$

Непрерывность доказана.

Из ((3.18) и (3.20) следует, что $a_n(f) < A_n$. Остается увидеть, что последовательность частных сумм ряда Фурье-Уолша функции f расходятся в точке 0. Это следует из (3.19), если учесть, что

$$\min(n : c_n(q_{k+1} + p_{k+1}) \neq 0) > \max(n : c_n(f_k) \neq 0).$$

Abstract. The paper studies convergence of the greedy algorithm by the Walsh system in the space $C(0, 1)$. Some sufficient conditions for uniform convergence are given. It is proved that there exists a function satisfying more restrictive conditions, for which the sequence of the partial sums of the Fourier-Walsh series diverges at the point 0.

Список литературы

[1] T. W. Körner, "Divergence of Decreasing Rearranged Fourier Series", Ann. of Math., **144**, 167-180 (1996).

[2] T. W. Körner, "Decreasing Rearranged Fourier Series", J. Fourier Analysis and Applications, **5**, 1-19 (1999).

[3] V. N. Temlyakov, "Nonlinear Methods of Approximation", Foundations of Computational Mathematics, **3** (1), 33-107 (2003).

[4] V. N. Temlyakov, "Greedy Algorithm and m-Term Trigonometric Approximation", Constructive Approximation, **107**, 569-587 (1998).

[5] V. N. Temlyakov and S.V. Konyagin, "Convergence of Greedy Approximation II, The trigonometric system", Studia Math., **159** (2), 161-184 (2003).

[6] Г. Амирханян, "О сходимости гриди алгоритма по системе Уолша в пространствах L_p", Изв. НАН Армении, Математика. **43** (3), 127-134 (2008).

[7] Б. И. Голубов, *Ряды и преобразования Уолша* (Наука, Москва, 1987).

Поступила 18 июня 2008