

## ОЦЕНКИ ОШИБОК ПРИ АППРОКСИМАЦИЯХ СЛЕДОВ ПРОИЗВЕДЕНИЙ УСЕЧЕННЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. С. ГИНОВЯН, А. А. СААКЯН

*Бостонский Университет, Институт математики НАН Армении*

*E-mail: tamgin.55@gmail.com*

*Ереванский Государственный Университет*

*E-mail: sart@ysu.am*

Аннотация. В статье устанавливаются порядки ошибок при интегральных предельных аппроксимациях следов произведений усеченных операторов Теплица, порожденных интегрируемыми вещественными четными функциями, определенными на вещественной прямой. Эти аппроксимации и оценки соответствующих ошибок имеют большое значение в статистическом анализе стационарных процессов с непрерывным временем (асимптотические распределения и большие отклонения квадратичных Теплицевых функционалов, оценка спектра, и т.д.). Результаты улучшают оценки, полученные авторами в предыдущих статьях.

Найдено асимптотическое разложение второго порядка в явном виде для следа произведения двух усеченных Теплицевых операторов, порожденных спектральными плотностями стационарных дробных движений Рисса-Бесселя с непрерывным временем. Показано, что порядок величины второго члена в этом разложении зависит от параметров долговременной памяти этих процессов. Показано также, что особенность первого члена компенсируется вторым членом разложения, что гарантирует существенно лучшее приближение исходного функционала.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Усеченные Теплицевы операторы (соотв. матрицы) обычно возникают в статистическом анализе стационарных процессов с непрерывным (соотв. дискретным) временем: асимптотические распределения и большие отклонения Теплицевых квадратичных функционалов, оценка спектральных функционалов и прогнозирование проверки гипотезы, основанное на прошлых наблюдениях за процессом и т.д., (см., например, [4, 8, 10] - [16], [18] - [23], и библиографии там же).

Настоящая статья посвящена задаче аппроксимации следов произведений усеченных Теплицевых операторов и оцениванию соответствующих ошибок. Эта задача представляет интерес, в частности, в случаях, когда основной моделью

является стационарный процесс с непрерывным временем с возможно неограниченной или обращающейся в нуль спектральной плотностью. Такие случаи возникают при изучении стационарных процессов с непрерывным временем долговременной памяти (спектральная плотность не ограничена) а также противостойчивых (спектральная плотность имеет нули).

Пусть  $f(\lambda)$  и  $g(\lambda)$  – интегрируемые вещественные четные функции на  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ . Пусть  $B_T(f)$  и  $B_T(g)$  – усеченные Теплицевы операторы, порожденные функциями  $f(\lambda)$  и  $g(\lambda)$  соответственно (см. [15, 18, 20]): при  $u(\lambda) \in L^2[0, T]$

$$(1.1) \quad [B_T(f)u](\lambda) = \int_0^T \hat{f}(\lambda - \mu)u(\mu)d\mu,$$

$$(1.2) \quad [B_T(g)u](\lambda) = \int_0^T \hat{g}(\lambda - \mu)u(\mu)d\mu,$$

где

$$(1.3) \quad \hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda \quad \text{и} \quad \hat{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} g(\lambda) d\lambda$$

являются преобразованиями Фурье функций  $f(\lambda)$  и  $g(\lambda)$  соответственно.

Пусть  $\nu$  – произвольное фиксированное натуральное число. Определим

$$(1.4) \quad S_{T,\nu} := S_{T,\nu}(f, g) = \frac{1}{T} \text{tr}[B_T(f)B_T(g)]^\nu,$$

$$(1.5) \quad M_\nu := M_\nu(f, g) = (2\pi)^{2\nu-1} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)g(\lambda)]^\nu d\lambda$$

и положим

$$(1.6) \quad \Delta_{T,\nu} := \Delta_{T,\nu}(f, g) = |S_{T,\nu} - M_\nu|.$$

Задача аппроксимации  $S_{T,\nu}$  величиной  $M_\nu$  и оценки порядка ошибки  $\Delta_{T,\nu}$  для Теплицевых матриц рассматривалась еще в классической монографии Гренадера и Сеге [18], и была широко изучена в литературе (см., например, Ибрагимов [20], Розенблатт [23], Аврам [4], Фокс и Такку [8], Гиратис и Сургалис [16], Гиновян [10], Гиновян и Саакян [14], Либерман и Филипс [22], и библиографии там же).

Для Теплицевых операторов вышеупомянутая задача частично исследована Ибрагимовым [20], Гиновяном [11, 13], а также Гиновяном и Саакяном в работе [15]. В этих работах получены достаточные условия (в терминах порождающих

функций  $f(\lambda)$  и  $g(\lambda)$  для

$$(1.7) \quad \Delta_{T,2} = |S_{T,2} - M_2| = o(1) \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty.$$

В частности, в работе Гиновяна и Саакяна [15] доказаны следующие результаты.

**Теорема 1.** *Если функция*

$$(1.8) \quad \varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u_1, u_2, u_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)g(\lambda - u_1)f(\lambda - u_2)g(\lambda - u_3) d\lambda$$

*принадлежит  $L^2(\mathbb{R}^3)$  и непрерывна в  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ , тогда имеет место (1.7).*

**Теорема 2.** *Пусть  $f(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$  ( $p \geq 1$ ) и  $g(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$  ( $q \geq 1$ ),  $1/p + 1/q = 1/2$ . Тогда имеет место (1.7).*

**Теорема 3.** *Пусть  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ,  $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ,  $fg \in L^2(\mathbb{R})$  и*

$$(1.9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda)g^2(\lambda - \mu) d\lambda \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda)g^2(\lambda) d\lambda \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0.$$

*Тогда имеет место (1.7).*

Пусть  $SV(\mathbb{R})$  – класс медленно изменяющихся в нуле функций  $u(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющих условиям

$$u(\lambda) \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} u(\lambda) = 0$$

и

$$u(\lambda) = u(-\lambda), \quad 0 < u(\lambda) < u(\mu) \quad \text{при} \quad 0 < \lambda < \mu.$$

**Теорема 4.** *Пусть функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $\mathbb{R}$  и ограничены на  $\mathbb{R} \setminus (-\pi, \pi)$  и*

$$(1.10) \quad f(\lambda) \leq |\lambda|^{-\alpha} L_1(\lambda), \quad |g(\lambda)| \leq |\lambda|^{-\beta} L_2(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

*где  $L_1(\lambda)$  и  $L_2(\lambda)$  – медленно изменяющиеся в нуле функции, а*

$$(1.11) \quad \alpha < 1, \quad \beta < 1, \quad \alpha + \beta \leq 1/2 \quad \text{и} \quad L_i \in SV, \quad \lambda^{-(\alpha+\beta)} L_i(\lambda) \in L^2(\mathbb{T}), \quad i = 1, 2.$$

*Тогда выполняется (1.7).*

Ниже мы получим условия в терминах порождающих функций  $f(\lambda)$  и  $g(\lambda)$ , обеспечивающие асимптотическое соотношение

$$(1.12) \quad \Delta_T = \Delta_{T,2} = |S_{T,2} - M_2| = O(T^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty.$$

Результаты улучшают порядок  $o(1)$ , полученный в теоремах 1 и 2. Мы получаем также точное асимптотическое разложение второго порядка в явном виде для

$S_{T,1}(f, g)$ , в случае, когда функции  $f$  и  $g$  являются спектральными плотностями стационарных дробных движений Риса-Бесселя с непрерывным временем.

Статья построена следующим образом. В параграфе 2 устанавливаются оценки для ошибок  $\Delta_{T,2}$ , в параграфе 3 содержатся некоторые предварительные результаты, параграф 4 посвящен доказательствам результатов, установленных в параграфе 2, а параграф 5 содержит разложение второго порядка для  $S_{T,1}$ .

## 2. ОЦЕНКИ ДЛЯ $\Delta_{T,2}$

Для  $\psi \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  обозначим через  $\omega_p(\psi, \delta)$   $L^p$ -модуль непрерывности  $\psi$ :

$$\omega_p(\psi, \delta) := \sup_{0 < h \leq \delta} \|\psi(x+h) - \psi(x)\|_p, \quad \delta > 0.$$

Для заданного  $0 < \alpha \leq 1$  и  $1 \leq p \leq \infty$ , обозначим через  $\text{Lip}(p, \alpha) = \text{Lip}(\mathbb{R}; p, \alpha)$   $L^p$ -класс Липшица функций, определенных на  $\mathbb{R}$  (см., например, [1], [6]):

$$\text{Lip}(p, \alpha) = \{\psi(\lambda) \in L^p(\mathbb{R}); \quad \omega_p(\psi; \delta) = O(\delta^\alpha), \quad \delta \rightarrow 0\}.$$

Заметим, что если  $\psi \in \text{Lip}(p, \alpha)$ , тогда существует постоянная  $C$  такая, что  $\omega_p(\psi; \delta) \leq C \delta^\alpha$  для всех  $\delta > 0$ .

**Теорема 5.** Пусть функция  $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u_1, u_2, u_3) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$  такая, как в (1.8). Предположим, что для некоторых постоянных  $L > 0$  и  $\alpha \in (0, 1]$  имеем

$$(2.1) \quad |\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{0})| \leq L|\mathbf{u}|^\alpha, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3,$$

где  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$  и  $|\mathbf{u}| = |u_1| + |u_2| + |u_3|$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  имеет место

$$(2.2) \quad \Delta_T = O\left(\frac{1}{T^{\alpha-\varepsilon}}\right) \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty.$$

**Теорема 6.** Пусть  $f(\lambda) \in \text{Lip}(p, \alpha)$  и  $g(\lambda) \in \text{Lip}(q, \alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 1]$  и  $p, q \geq 1$  так, что  $1/p + 1/q = 1/2$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  имеет место (2.2).

## 3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Докажем следующие леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $D_T(u)$  – ядро Дирихле:

$$(3.1) \quad D_T(u) = \frac{\sigma n(Tu/2)}{u/2}.$$

Тогда для любого  $\delta \in (0, 1)$  существует постоянная  $C_\delta > 0$  такая, что имеет место

$$(3.2) \quad |D_T(u)| \leq 2 \frac{T^\delta}{|u|^{1-\delta}}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

*Доказательство.* Для фиксированного  $T > 0$  и  $u \in \mathbb{R}$  из (3.1) имеем

$$|D_T(u)| \leq \min \left\{ T, \frac{2}{|u|} \right\}.$$

С другой стороны, так как функция

$$I(\delta) := \frac{T^\delta}{|u|^{1-\delta}} = \frac{1}{|u|} (T|u|)^\delta$$

монотонна относительно  $\delta$ , то

$$I(\delta) \geq \min\{I(0), I(1)\} = \min \left\{ T, \frac{1}{|u|} \right\} \geq \frac{1}{2} |D_T(u)|,$$

откуда получаем (3.2).

**Лемма 2.** Пусть  $0 < \beta < 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ , причем  $\alpha + \beta > 1$ . Тогда для любого  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y \neq 0$ ,

$$(3.3) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha |x+y|^\beta} dx \leq \frac{M}{|y|^{\alpha+\beta-1}},$$

где  $M$  – постоянная, зависящая от  $\alpha$  и  $\beta$ .

*Доказательство.* Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha |x+y|^\beta} dx &\leq \int_{|x| \leq \frac{|y|}{2}} \frac{2}{|x|^\alpha |y|^\beta} dx + \int_{\frac{|y|}{2} < |x| < 2|y|} \frac{2}{|y|^\alpha |x+y|^\beta} dx \\ &\quad + \int_{|x| \geq 2|y|} \frac{2}{|x|^{\alpha+\beta}} dx \leq \frac{M_1}{|y|^{\alpha+\beta-1}} \\ &\quad + \frac{M_1}{|y|^\alpha} \int_{0 < t < 3|y|} \frac{1}{t^\beta} dt + \frac{M_1}{|y|^{\alpha+\beta-1}} \leq \frac{M}{|y|^{\alpha+\beta-1}}, \end{aligned}$$

откуда следует (3.3).

Обозначим  $E = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : |u_i| \leq 1, i = 1, 2, 3\}$  и  $E^C = \mathbb{R}^3 \setminus E$ .

**Лемма 3.** Пусть  $0 < \alpha \leq 1$  и  $\frac{3}{4} < \beta < \frac{\alpha+3}{4}$ . Тогда имеет место оценка

$$(3.4) \quad B_i := \int_E \frac{|u_i|^\alpha}{|u_1 u_2 u_3 (u_1 + u_2 + u_3)|^\beta} du_1 du_2 du_3 < \infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

*Доказательство.* Используя лемму 2, можем записать

$$\begin{aligned} B_1 &\leq \int_{\{|u_1| \leq 1\}} \frac{1}{|u_1|^{\beta-\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u_2|^\beta} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u_3(u_1 + u_2 + u_3)|^\beta} du_3 du_2 du_1 \\ &\leq M \int_{\{|u_1| \leq 1\}} \frac{1}{|u_1|^{\beta-\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u_2|^\beta |(u_1 + u_2)|^{2\beta-1}} du_2 du_1 \\ &\leq M^2 \int_{\{|u_1| \leq 1\}} \frac{1}{|u_1|^{4\beta-\alpha-2}} du_1 < \infty, \end{aligned}$$

откуда получаем формулу (3.4) при  $i = 1$ . Величины  $B_2$  и  $B_3$  можно оценить аналогично.

**Лемма 4.** Пусть  $\frac{3}{4} < \beta < 1$ . Тогда имеет место оценка

$$(3.5) \quad I := \int_{E^C} \frac{1}{|u_1 u_2 u_3 (u_1 + u_2 + u_3)|^\beta} du_1 du_2 du_3 < \infty.$$

*Доказательство.* Имеем

$$(3.6) \quad I \leq \int_{|u_1| > 1} + \int_{|u_2| > 1} + \int_{|u_3| > 1} \frac{1}{|u_1 u_2 u_3 (u_1 + u_2 + u_3)|^\beta} du_1 du_2 du_3 =: I_1 + I_2 + I_3.$$

Используя лемму 2, получим

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{|u_1| > 1} \frac{1}{|u_1|^\beta} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u_2|^\beta} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u_3(u_1 + u_2 + u_3)|^\beta} du_3 du_2 du_1 \\ &\leq M \int_{|u_1| > 1} \frac{1}{|u_1|^\beta} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u_2|^\beta |u_1 + u_2|^{2\beta-1}} du_2 du_1 \\ &\leq M^2 \int_{|u_1| > 1} \frac{1}{|u_1|^{4\beta-2}} du_1 < \infty. \end{aligned}$$

Величины  $I_2$  и  $I_3$  можно оценить тем же способом, и в силу (3.6) получим требуемый результат.

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

*Доказательство теоремы 5:* Обозначим

$$(4.1) \quad \Phi(\mathbf{u}) := \Phi_T(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{8\pi^3 T} \cdot D_T(u_1) D_T(u_2) D_T(u_3) D_T(u_1 + u_2 + u_3),$$

и

$$(4.2) \quad \Psi(\mathbf{u}) := \Psi(u_1, u_2, u_3) = \varphi(u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3),$$

где  $D_T(u)$  определена как в (3.1), а  $\varphi(u_1, u_2, u_3)$  – как в (1.8). В работе [15] доказано следующее представление для  $\Delta_T = \Delta_{T,2}$ :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \Delta_T &:= \frac{1}{T} \operatorname{tr}[B_T(f)B_T(g)]^2 - 8\pi^3 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda)g^2(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} [\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})]\Phi_T(\mathbf{u})d\mathbf{u}, \quad \mathbf{0} = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Из (2.1) и (4.2) следует, что

$$(4.4) \quad |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})| \leq 3L|u_1|^\alpha + 2L|u_2|^\alpha + L|u_3|^\alpha, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Пусть  $\varepsilon \in (0, \alpha)$ . Тогда, применяя лемму 1 при  $\delta = \frac{1+\varepsilon-\alpha}{4}$  и используя (4.3) и (4.4), получим

$$\begin{aligned} |\Delta_T| &\leq \int_E |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})|\Phi_T(\mathbf{u})d\mathbf{u} + \int_{E^c} |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})|\Phi_T(\mathbf{u})d\mathbf{u} \\ &\leq \frac{C_\delta}{T^{1-4\delta}} \sum_{i=1}^3 C_i \int_E \frac{|u_i|}{|u_1 u_2 u_3 (u_1 + u_2 + u_3)|^{1-\delta}} du_1 du_2 du_3 \\ &\quad + 2\|\varphi\|_\infty \frac{C_\delta}{T^{1-4\delta}} \int_{E^c} \frac{1}{|u_1 u_2 u_3 (u_1 + u_2 + u_3)|^{1-\delta}} du_1 du_2 du_3. \end{aligned}$$

Отсюда и из лемм 3 и 4 следует утверждение теоремы 5.

*Доказательство теоремы 6:* Согласно теореме 5 достаточно доказать, что функция

$$(4.5) \quad \varphi(\mathbf{t}) := \int_{\mathbb{R}} f_0(u)f_1(u-t_1)f_2(u-t_2)f_3(u-t_3)du, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$$

принадлежит  $L^\infty(\mathbb{R}^3)$  и для некоторых положительных постоянных  $L$  и  $\alpha \in (0, 1]$  удовлетворяет оценке

$$(4.6) \quad |\varphi(\mathbf{t}) - \varphi(\mathbf{0})| \leq L|\mathbf{t}|^\alpha, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3,$$

при условиях

$$(4.7) \quad f_i \in \operatorname{Lip}(p_i, \alpha), \quad 1 \leq p_i \leq \infty, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^3 \frac{1}{p_i} \leq 1.$$

Из неравенства Гелдера и условий (4.7) следует, что

$$|\varphi(\mathbf{t})| \leq \prod_{i=0}^3 \|f_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R})} < \infty, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Следовательно,  $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Докажем (4.6). Зафиксируем  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$  и обозначим

$$(4.8) \quad \bar{f}_i(u) = f_i(u - t_i) - f_i(u), \quad i = 1, 2, 3.$$

Так как  $f_i \in \text{Lip}(p_i, \alpha)$ , то имеем

$$(4.9) \quad \|\bar{f}_i\|_{p_i} \leq L_i |\mathbf{t}|^\alpha, \quad i = 1, 2, 3.$$

В силу (4.5) и (4.8)

$$\varphi(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}} f_0(u) \prod_{i=1}^3 (\bar{f}_i(u) + f_i(u)) du = \varphi(\mathbf{0}) + W.$$

Каждый из пяти интегралов, составляющих  $W$  содержит по крайней мере одну функцию  $\bar{f}_i$ , и ввиду (4.9)

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_0(u) \bar{f}_1(u) f_2(u) f_3(u) du \right| \leq \|f_0\|_{L^{p_0}} \|\bar{f}_1\|_{L^{p_1}} \|f_2(u)\|_{L^{p_2}} \|f_3\|_{L^{p_3}} \leq L |\mathbf{t}|^\alpha$$

что и завершает доказательство теоремы 6.

## 5. РАЗЛОЖЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ $S_{T,1}$ .

В этом параграфе приводится разложение второго порядка в явном виде для  $S_{T,p}$  при  $p = 1$ , распространяющее результат, полученный О. Либерманом и А. Филипом [22] на стационарные дробные движения Рисса-Бесселя с непрерывным временем.

Напомним, что дробное движение Рисса-Бесселя (ддРБ), введенное в работе Ана и др. [2], и затем интенсивно обсужденное в ряде работ (см., например, [3], [9] и библиографии там же), определено как Гауссовский процесс с непрерывным временем  $X(t)$  со спектральной плотностью вида

$$(5.1) \quad f(\lambda) = \frac{C}{|\lambda|^{2\alpha}(1 + \lambda^2)^\beta}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где  $C$  – положительная постоянная,  $0 < \alpha < 1$  и  $\beta > 1/2$ .

Заметим, что процесс  $X(t)$  – стационарный, если  $0 < \alpha < 1/2$  и нестационарный со стационарными приращениями, если  $1/2 < \alpha < 1$ . Тогда параметр  $\alpha$  определяет долгосрочную зависимость (ДСЗ), или самоподобие (СП) ддРБ, а  $\beta$  показывает прерывистость процесса второго порядка (см., например, [3], [9]).

Таким образом, вид (5.1) означает, что ддРБ может проявлять как ДСЗ/СП, так и прерывистость.

Мы рассматриваем стационарный случай и предполагаем, что  $0 < \alpha < 1/2$  и  $\beta > 1/2$ .

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

**Теорема 7.** Пусть  $f_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$ , – функции спектральной плотности двух дробных движений Рисса-Бесселя, определенные следующим образом

$$(5.2) \quad f_i(\lambda) = \frac{C_i}{|\lambda|^{2\alpha_i}(1+\lambda^2)^{\beta_i}}, \quad 0 < \alpha_i < 1/2, \quad \beta_i > 1/2, \quad i = 1, 2.$$

Если  $\alpha_1 + \alpha_2 < 1/2$ , то при  $T \rightarrow \infty$ ,

$$(5.3) \quad \begin{aligned} S_{T,1} &= \frac{1}{T} \text{tr}[B_T(f_1)B_T(f_2)] \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda)f_2(\lambda) d\lambda - \frac{C(\alpha_1, \alpha_2)}{T^{1-2(\alpha_1+\alpha_2)}} + o\left(\frac{1}{T^{1-2(\alpha_1+\alpha_2)}}\right), \end{aligned}$$

где

$$(5.4) \quad C(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{2C_1C_2\pi^2}{\cos(\pi\alpha_1)\cos(\pi\alpha_2)\Gamma(2\alpha_1)\Gamma(2\alpha_2)} \cdot \left[ \frac{1}{1-2(\alpha_1+\alpha_2)} + \frac{1}{2(\alpha_1+\alpha_2)} \right].$$

Во-первых, докажем две леммы. В первой лемме дается асимптотическая формула ковариационной функции процесса ддРБ.

**Лемма 5.** Пусть функция  $f(\lambda)$  определена как в (5.1), где  $0 < \alpha < 1/2$  и  $\beta > 1/2$ , и пусть  $r(t)$  – преобразование Фурье функции  $f(\lambda)$ . Тогда при  $t \rightarrow \infty$  имеет место

$$(5.5) \quad r(t) = t^{2\alpha-1} \frac{\pi C}{\cos(\pi\alpha)\Gamma(2\alpha)} (1 + o(1)).$$

*Доказательство.* Мы используем технику [21], где (5.5) доказано при  $\beta = 1$ . Так как базовый процесс  $X(t)$  является действительным, то мы имеем для  $t > 0$

$$(5.6) \quad r(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda = 2 \int_0^{+\infty} \frac{C}{\lambda^{2\alpha}(1+\lambda^2)^\beta} \cos(t\lambda) d\lambda.$$

Используя замену переменной  $t\lambda = 1/u$ ,  $\lambda = 1/(tu)$ ,  $d\lambda = -du/(tu^2)$ , из (5.6) получим

$$(5.7) \quad \begin{aligned} r(t) &= 2C \int_0^{+\infty} \frac{1}{((1/(tu))^{2\alpha}(1+(tu)^2))^\beta} \cos(1/u) \frac{du}{tu^2} \\ &= 2Ct^{2\alpha-1} \int_0^{+\infty} \left( \frac{(tu)^2}{1+(tu)^2} \right)^\beta u^{2\alpha-2} \cos(1/u) du \\ &= 2Ct^{2\alpha-1} \int_0^{+\infty} L(tu)k(u) du, \end{aligned}$$

где

$$L(u) = \left( \frac{u^2}{1+u^2} \right)^\beta, \quad k(u) = u^{2\alpha-2} \cos(1/u).$$

Выберем  $\delta > 0$  так, чтобы  $\delta < \min(1 - 2\alpha, 2\alpha)$ . Тогда существуют несобственные интегралы

$$\int_{0+}^1 u^{-\delta} k(u) du, \quad \int_1^{\infty-} u^{\delta} k(u) du.$$

Следовательно, по теореме Боянич-Караматы (см. [5], теорема 4.1.5) имеем

$$(5.8) \quad \int_0^{+\infty} k(u) L(tu) du \longrightarrow \int_{0+}^{\infty-} k(u) du \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Далее, используя замену переменной  $1/u = v$  и формулу (см., например, [7], #858.813)

$$\int_0^{\infty-} x^{-p} \cos(mx) dx = \frac{\pi m^{p-1}}{2 \cos(p\pi/2) \Gamma(p)}, \quad 0 < p < 1, \quad m > 0,$$

при  $p = 2\alpha$  и  $m = 1$ , получаем

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \int_{0+}^{\infty-} k(u) du &= \int_0^{\infty-} u^{2\alpha-2} \cos(1/u) du = \int_0^{\infty-} v^{-2\alpha} \cos(v) dv \\ &= \frac{\pi}{2 \cos(\pi\alpha) \Gamma(2\alpha)}. \end{aligned}$$

Из формул (5.6)-(5.9) получаем (5.5).

**Замечание 1.** Из формулы

$$\Gamma(2\alpha) \Gamma(1 - 2\alpha) = \frac{\pi}{\sigma n(2\pi\alpha)},$$

и выражения (5.5) мы получаем следующее асимптотическое соотношение для ковариационной функции  $r(t)$ :

$$(5.10) \quad r(t) = Ct^{2\alpha-1} \sigma n(\pi\alpha) \Gamma(1 - 2\alpha) (1 + o(1)) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

В следующей лемме получена явная формула для  $S_{T,1}$  в общем случае.

**Лемма 6.** Пусть  $f_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$ , — интегрируемые действительные четные функции на  $\mathbb{R}$  такие, что  $f_1 f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $r_i(t)$  — преобразования Фурье функции  $f_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$ , и  $B_T(f_i)$  — усеченные Теплицевы операторы, порожденные функцией  $f_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда имеет место

$$(5.11) \quad S_{T,1} := \frac{1}{T} \text{tr}[B_T(f_1) B_T(f_2)] = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_T(\lambda - \mu) f_1(\lambda) f_2(\mu) d\lambda d\mu$$

$$(5.12) \quad = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) r_1(t) r_2(t) dt,$$

где

$$(5.13) \quad F_T(t) = \frac{1}{2\pi T} \left[ \frac{\sigma n(Tt/2)}{t/2} \right]^2$$

- ядро Фейера.

*Доказательство.* Операторы  $B_T(f_i)$   $i = 1, 2$ , действуют как интегральные операторы в  $L^2(\mathbb{R})$  с ядрами

$$\Gamma_T(f_i; \lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_T(\lambda, t) G_T(t, \mu) f_i(t) dt, \quad i = 1, 2,$$

где

$$(5.14) \quad G_T(\lambda, \mu) = e^{iT(\lambda-\mu)/2} \cdot \frac{\sigma n [T(\lambda-\mu)/2]}{(\lambda-\mu)/2}.$$

Учитывая равенство

$$(5.15) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G_T(u, t) G_T(t, v) dt = G_T(u, v),$$

заметим, что оператор  $B_T(f_1)B_T(f_2)$  действует как интегральный оператор в  $L^2(\mathbb{R})$  с ядром

$$(5.16) \quad \begin{aligned} \Gamma(f_1, f_2; \lambda, \mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_T(f_1; \lambda, t) \Gamma_T(f_2; t, \mu) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_T(\lambda, u) G_T(u, v) G_T(v, \mu) f_1(u) f_2(v) du dv. \end{aligned}$$

Используя формулу для следов интегральных операторов (см. [17]), получим

$$(5.17) \quad \begin{aligned} S_{T,1} &= \frac{1}{T} \text{tr}[B_T(f_1)B_T(f_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(f_1, f_2; \lambda, \lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_T(\lambda, u) G_T(u, v) G_T(v, \lambda) f_1(u) f_2(v) du dv d\lambda \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_T(u, v) G_T(v, u) f_1(u) f_2(v) du dv \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_T(u, v)|^2 f_1(u) f_2(v) du dv \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_T(u-v) f_1(u) f_2(v) dudv, \end{aligned}$$

откуда следует (5.11). Равенство (5.12) следует из теоремы Персеваля-Планшереля.

*Доказательство теоремы 7.* По лемме 6

$$(5.18) \quad S_{T,1} = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) r_1(t) r_2(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda) d\lambda - I_1 - I_2,$$

где

$$(5.19) \quad I_1 = \int_{|t|>T} r_1(t) r_2(t) dt$$

и

$$(5.20) \quad I_2 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T |t| r_1(t) r_2(t) dt.$$

Следовательно, для  $\alpha_1 + \alpha_2 < 1/2$  из леммы 5 и (5.19) при  $T \rightarrow \infty$  получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|t|>T} r_1(t) r_2(t) dt = 2 \int_{t>T} r_1(t) r_2(t) dt \\ &= \frac{2C_1 C_2 \pi^2}{\cos(\pi\alpha_1) \cos(\pi\alpha_2) \Gamma(2\alpha_1) \Gamma(2\alpha_2)} \int_{t>T} t^{2(\alpha_1+\alpha_2-1)} (1+o(1)) \\ &= \frac{2C_1 C_2 \pi^2}{\cos(\pi\alpha_1) \cos(\pi\alpha_2) \Gamma(2\alpha_1) \Gamma(2\alpha_2)} \\ (5.21) \quad &\times \frac{1}{1-2(\alpha_1+\alpha_2)} T^{2(\alpha_1+\alpha_2)-1} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Из леммы 5 и формулы (5.20) при  $T \rightarrow \infty$  имеем для  $\alpha_1 + \alpha_2 < 1/2$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T |t| r_1(t) r_2(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T t r_1(t) r_2(t) dt \\ &= \frac{2}{T} \frac{C_1 C_2 \pi^2}{\cos(\pi\alpha_1) \cos(\pi\alpha_2) \Gamma(2\alpha_1) \Gamma(2\alpha_2)} \int_0^T t^{2(\alpha_1+\alpha_2)-1} dt (1+o(1)) \\ &= \frac{2C_1 C_2 \pi^2}{\cos(\pi\alpha_1) \cos(\pi\alpha_2) \Gamma(2\alpha_1) \Gamma(2\alpha_2)} \\ (5.22) \quad &\times \frac{1}{2(\alpha_1+\alpha_2)} T^{2(\alpha_1+\alpha_2)-1} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Из формул (5.18), (5.21) и (5.22) получаем требуемый результат.

**Замечания.** (а) Мы анализируем поведение аппроксимации при  $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 1/4$ .

Во-первых, заметим, что асимптотическая формула первого порядка имеет полюс в точке  $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2 = 1/2$ . В частности, обозначая  $\beta := \beta_1 + \beta_2$ , и подставляя переменную  $\lambda^2 = u$ , имеем

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda) d\lambda &= 2\pi C_1 C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|^{2(\alpha_1+\alpha_2)} (1+\lambda^2)^{\beta_1+\beta_2}} d\lambda \\ &= 4\pi C_1 C_2 \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{-2\alpha}}{(1+\lambda^2)^\beta} d\lambda \\ (5.23) \quad &= 2\pi C_1 C_2 \int_0^{+\infty} \frac{u^{-1/2-\alpha}}{(1+u)^\beta} du. \end{aligned}$$

Применяя формулу (см., например, [7], #856.11)

$$(5.24) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(1+\lambda)^{m+n}} d\lambda = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad m > 0, \quad n > 0,$$

при  $m = 1/2 - \alpha$  и  $n = \beta - m = \alpha + \beta - 1/2$ , из формулы (5.23) получим

$$(5.25) \quad 2\pi C_1 C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda) d\lambda = 2\pi C_1 C_2 \frac{\Gamma(1/2 - \alpha) \Gamma(\alpha + \beta - 1/2)}{\Gamma(\beta)}.$$

Тогда, используя разложение Лорана гамма функции  $\Gamma(1/2 - \alpha)$  вокруг полюса  $\alpha = 1/2$ , из формулы (5.25) получаем

$$(5.26) \quad \pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda) d\lambda = \frac{4\pi C_1 C_2}{1 - 2\alpha} + O(1) \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow 1/2.$$

Однако, легко видеть, что асимптотическое поведение члена второго порядка  $C(\alpha_1, \alpha_2)$  (см. (5.4)) при  $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 1/4$  проявляется следующим образом

$$\begin{aligned} C(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{2\pi^2 C_1 C_2}{\cos(\pi\alpha_1) \cos(\pi\alpha_2) \Gamma(2\alpha_1) \Gamma(2\alpha_2)} \left[ \frac{1}{1 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{1}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} \right] \\ &= \frac{2\pi^2 C_1 C_2}{\cos^2(\pi/4) [\Gamma(1/2)]^2} \left[ \frac{1}{1 - 2\alpha} + O(1) \right] \\ (5.27) \quad &= \frac{4\pi C_1 C_2}{1 - 2\alpha} + O(1). \end{aligned}$$

Таким образом, полюс аппроксимации первого порядка исчезает, так что

$$(5.28) \quad 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda) d\lambda - \frac{C(\alpha_1, \alpha_2)}{T^{1-2(\alpha_1+\alpha_2)}}$$

ограничена при  $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 1/4$ .

Это поведение объясняет почему аппроксимация второго порядка производит аппроксимацию равномерно хорошую по  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1/4]$ , включая границы области.

(b) Эквивалентность второго порядка имеет место вдоль произвольного луча, для которого  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow 1/2$ .

Действительно, пусть  $\alpha_1^0 \in [0, 1/2]$  – любое фиксированное число такое, что  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_1^0$  и  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow 1/2$ , тогда представление (5.26) для асимптотического члена первого порядка продолжает выполняться.

С другой стороны, используя формулу  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sigma n(\pi z)$  при  $z = 2\alpha_1^0$ , имеем из формулы (5.4) при  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_1^0$  и  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \rightarrow 1/2$

$$C(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{2\pi^2 C_1 C_2}{\cos(\alpha_1 \pi) \cos(\alpha_2 \pi) \Gamma(2\alpha_1) \Gamma(2\alpha_2)} \left[ \frac{1}{1 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{1}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi^2 C_1 C_2}{\cos(\alpha_1^0 \pi) \cos[(1 - 2\alpha_1^0)\pi/2] \Gamma(2\alpha_1^0) \Gamma(1 - 2\alpha_1^0)} \frac{1}{1 - 2\alpha} + O(1) \\
&= \frac{2\pi^2 C_1 C_2}{\cos(\alpha_1^0 \pi) \sigma n(\alpha_1^0 \pi)} \frac{\sigma n(2\alpha_1^0 \pi)}{\pi} \frac{1}{1 - 2\alpha} + O(1) \\
&= \frac{4\pi C_1 C_2}{1 - 2\alpha} + O(1),
\end{aligned}$$

и имеет место эквивалентность второго порядка.

Таким образом, в этом специальном случае, асимптотическое разложение второго порядка удаляет особенность и обеспечивает существенно лучшую аппроксимацию к исходному функционалу.

**Abstract.** The paper establishes error orders for integral limit approximations to the traces of products of truncated Toeplitz operators generated by integrable real symmetric functions defined on the real line. These approximations and the corresponding error bounds are of importance in the statistical analysis of continuous-time stationary processes (asymptotic distributions and large deviations of Toeplitz type quadratic functionals, estimation of the spectrum, etc.). The results improve the rates obtained by the authors (in an earlier paper). An explicit second-order asymptotic expansion is found for the trace of a product of two truncated Toeplitz operators generated by the spectral densities of continuous-time stationary fractional Riesz-Bessel motions. The order of magnitude of the second term in this expansion is shown to depend on the long-memory parameters of the processes. Also, it is shown that the pole in the first-order approximation is removed by the second-order term, which provides a substantially improved approximation to the original functional.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. I. Akhiezer, *Theory of Approximation* (Frederick Ungar, New York, 1956).
- [2] V.V. Anh, J. M. Angulo, M. D. Ruiz-Medina, "Possible long-range dependence in fractional random fields". *Journal of Statistical Planning and Inference*, **80**, 95-110 (1999).
- [3] V. V. Anh, N. N. Leonenko, R. McVinish, "Models for Fractional Riesz-Besses Motion and Related Processes". *Fractals*, **9**, 329-346 (2001).
- [4] F. Avram, "On Bilinear Forms in Gaussian Random Variables and Toeplitz Matrices". *Probab. Th. Rel. Fields*, **79**, 37-45, 1988.
- [5] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, *Regular Variation* (Cambridge University Press, New York, 1989).
- [6] P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation I*, (Academic Press, New York, 1971).
- [7] H. B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, (The Macmillan Company, New York, 1961).
- [8] R. Fox, M. S. Taqqu, "Central Limit Theorem for Quadratic Forms in Random Variables Having Long-Range Dependence", *Probab. Th. Rel. Fields*, **74**, 213-240 (1987).

- [9] J. Gao, V. Anh, C. Heyde, Q. Tieng, "Parameter Estimation of Stochastic Processes with Long-range Dependence and Intermittency". Journal of Time Series Analysis, **22**, 517-535 (2001).
- [10] M. S. Ginovian, "Asymptotically Efficient Nonparametric Estimation of Functionals on Spectral Density with Zeros", Theory Probab. Appl., **33**, 315-322 (1988).
- [11] M. S. Ginovian, "On Estimate of the Value of the Linear Functional in a Spectral Density of Stationary Gaussian Process", Theory Probab. Appl., **33**, 777-781 (1988).
- [12] M. S. Ginovian, "A Note on Central Limit Theorem for Toeplitz Type Quadratic Forms in Stationary Gaussian Variables", Izv. NAN Armenii, Matematika [Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)] **28**, 78-81 (1993).
- [13] M. S. Ginovian, "On Toeplitz Type Quadratic Functionals in Gaussian Stationary Process", Probab. Th. Rel. Fields, **100**, 395-406 (1994).
- [14] M. S. Ginovyan, A. A. Sahakyan, "On the Central Limit Theorem for Toeplitz Quadratic Forms of Stationary Sequences". Theory Probab. and Appl. **49**, 612-628 (2004).
- [15] M. S. Ginovyan, A. A. Sahakyan, "Limit Theorems for Toeplitz Quadratic Functionals of Continuous-Time Stationary Process". Probab. Theory Rel. Fields, **138**, 551-579 (2007).
- [16] L. Giraitis, D. Surgailis, "A Central Limit Theorem for Quadratic Forms in Strongly Dependent Linear Variables and its Application to Asymptotical Normality of Whittle's Estimate", Probab. Th. Rel. Fields, **86**, 87-104 (1990).
- [17] И. З. Гоберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в Гильбертовом пространстве* (Наука, Москва, 1965).
- [18] U. Grenander, G. Szegő, *Toeplitz Forms and Their Applications* (University of California Press, 1958).
- [19] R. Z. Hasminskii, I. A. Ibragimov, "Asymptotically Efficient Nonparametric Estimation of Functionals of a Spectral Density Function", Probab. Th. Rel. Fields, **73**, 447-461 (1986).
- [20] I. A. Ibragimov, "On Estimation of the Spectral Function of a Stationary Gaussian Process", Theory Probab. and Appl., **8** (4), 391-430 (1963).
- [21] A. Inoue, Y. Kasahara, "On the Asymptotic Behavior of the Prediction Error of a Stationary Process", in: *Trends in Probability and Related Analysis*, 207-218, N. Kono and N.R. Shieh, Ed. (World Scientific, River Edge, NJ, 1999).
- [22] O. Lieberman, A. Philips, "Error Bounds and Asymptotic Expansions for Toeplitz Product Functionals of Unbounded Spectra". Journal of Time Series Analysis, **25**, 733-753 (2004).
- [23] M. Rosenblatt, "Asymptotic Behavior of Eigenvalues of Toeplitz Forms", Journal of Math. and Mech., **11** (6), 941-950 (1962).

Поступила 13 мая 2008