Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 3, 2008, стр. 39-64

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Н. МАРГАРЯН И Г. Г. КАЗАРЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *mar_tiko@yahoo.com*

Аннотация. Двумерный линейный дифференциальный оператор $P(D) = P(D_1, D_2)$ называется *почти гипоэллиптическим*, если производные $D^\alpha P$ характеристического многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$ оцениваются через $P(\xi)$. Пусть $\{\Omega_\kappa = (x_1, x_2) \in E^2 : |x_1| < \kappa,\ x_2 \in R^1\}$. В работе доказывается, что, если ширина κ полосы Ω_κ больше некоторого числа $C = C(P) > 0$, то все решения $\{u\}$ почти гипоэллиптического уравнения $P(D)u = 0$ из определенного Соболевского пространства являются бесконечно гладкими по x_1 функциями.

1. ВВЕДЕНИЕ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Будем пользоваться следующими стандартными обозначения: N – множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times \ldots \times N_0$ – множество n-мерных мультииндексов, E^n и R^n – n-мерные вещественные пространства точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ соответственно. Для $\xi \in R^n$, $x \in E^n$ и $\alpha \in N_0^n$, обозначим

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad \text{где} \quad D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad \text{либо} \quad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots n).$$

Кроме того, обозначим $C^n = R^n \times iR^n$. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$P(D) = P(D_1, \ldots, D_n) = \sum_{(P)} \gamma_\alpha D^\alpha,$$

где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in N_0^n : \gamma_\alpha \neq 0\}$, а

$$P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{(P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$$

отвечающий ему символ $P(D)$, т.е. характеристический многочлен.

Оператор $P(D)$ и многочлен $P(\xi)$ называются гипоэллиптическими (см. [1]), если все решения $u \in D'$ (где $D' = D'(E^n)$ – множество распределений E^n) уравнения

$$P(D)u = f$$

являются бесконечно дифференцируемыми функциями, т.е. принадлежат $C^\infty = C^\infty(E^n)$, когда функция f бесконечно дифференцируема. Или, что то же самое, все решения $u \in D'$ уравнения $P(D)u = 0$ бесконечно дифференцируемы.

Л. Хермандером доказано (см. [1], теоремы 11.1.1 и 11.1.3), что оператор $P(D)$ является гипоэллиптическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) Для всякого открытого множества $\Omega \subset E^n$ и $u \in D$ имеем
$$\text{Sing Supp } u = \text{Sing Supp } P(D)u,$$
2) Если $\Omega \subset E^n$, $u \in D'(\Omega)$ и $P(D)u = 0$, то $u \in C^\infty(\Omega)$,
3) $P^{(\nu)}(\xi)/P(\xi) \equiv D^\nu P(\xi)/P(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$, $0 \neq \nu \in N_0^n$,
4) Если $d_P(\xi)$ – расстояние от точки $\xi \in R^n$ до поверхности
$$D(P) = \big\{\zeta \in C^n : P(\zeta) = 0\big\},$$
то $d_P(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$.

Возникает естественный вопрос: *пусть вместо условия 3)символ $P(\xi)$ оператора $P(D)$ удовлетворяет более слабому условию*

$$\frac{\big|D^{(\nu)}P(\xi)\big|}{1 + |P(\xi)|} \leq C < \infty, \quad \xi \in R^n, \quad \nu \in N_0^n, \tag{1.1}$$

или вместо условия 4) условию: для достаточно больших $\xi \in R^n$

$$d_P(\xi) \geq \varepsilon > 0, \tag{1.2}$$

каким минимальным априорным условиям должны удовлетворять решения $u \in D'(\Omega)$ уравнения $P(D)u = 0$, чтобы они являлись бесконечно дифференцируемыми по одной из переменных функциями?

В настоящей работе для одного класса двумерных операторов, удовлетворяющих условию (1.1) или эквивалентному условию (1.2), мы даем ответ на этот вопрос. При этом, если оператор $P(D)$ удовлетворяет условию (1.1) или (1.2), то его мы назовем *почти гипоэллиптическим.*

Пусть $n = 2$, m_1, m_2 – четные числа, $d > 1$. Легко убедиться в том, что если символ $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$ оператора $P(D) = P(D_1, D_2)$ удовлетворяет условию

$$d^{-1}(1 + |\xi_1|^{m_1})(1 + |\xi_2|^{m_2}) \leq 1 + |P(\xi)| \leq d(1 + |\xi_1|^{m_1})(1 + |\xi_2|^{m_2}) \tag{1.3}$$

для всех $\xi \in R^2$, то оператор $P(D)$ является почти гипоэллиптическим, т.е. удовлетворяет условию (1.1). Таковым является, например, негипоэллиптический оператор

$$P(D_1, D_2) = D_1^2 + D_2^2 + D_1^4 D_2^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 x_2^2},$$

символ $P(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_2^2$ которого удовлетворяет условию (1.3) при $m_1 = m_2 = 2$ и $d = 1$.

Поставленному выше вопросу посвящены работы многих авторов. В работах [2, 3] Л. Эренпрайса и Ф. Джона доказано, что для частично гипоэллиптического оператора $P(D)$ условие $u \in C^\infty$, $P(D)u \in C^\infty$ вне некоторой выпуклой поверхности Γ влечет условие $u \in C^\infty$ в окрестности Γ. В работе Л. Гординга и Б. Малгранжа [4] доказана бесконечная дифференцируемость решений частично-гипоэллиптических уравнений, если априори предполагать их бесконечную дифференцируемость по определенным переменным. Я. С. Бугровым в работе [5] построен пример негипоэллиптического уравнения, решения которого в полупространстве являются бесконечно гладкими, как только они суммируемы с квадратом вместе с некоторыми производными.

В. И. Буренков в работе [6] нашел критерий гладкости тех решений так называемых глобально гипоэллиптических уравнений $P(D)u = 0$, которые определенным образом стремятся к нулю в бесконечности. Эти условия носят алгебраический характер и, если оператор P гипоэллиптичен, то они совпадают с условиями 3) или 4) Л. Хермандера.

Общие результаты о гладкости решений гипоэллиптических уравнений принадлежат Л. Хермандеру (см., например, [7] или [1]).

В работе [8] авторов настоящей статьи поставленный выше вопрос для почти гипоэллиптических уравнений решен, когда $\Omega = E^n$. В работах [9, 10] введено понятие почти гипоэллиптического многочлена и найдены достаточные условия почти гипоэллиптичности в терминах порядков однородности и кратности нулей подмногочленов изучаемых многочленов. В работе [11] О. Р. Габриеляна найдены необходимые и достаточные условия гипоэллиптичности двумерных многочленов.

1.2. Введем некоторые обозначения и определения, которыми будем пользоваться в течение работы. Пусть оператор $P(D)$ удовлетворяет условию (1.3)

$$\Re = \Re(m_1, m_2) = \{\alpha \in N_0^2 : \alpha_i \leq m_i, \ \ i = 1, 2\}.$$

Для $\kappa > 0$ обозначим полосу

$$\Omega_\kappa = \{x \in E^2 : |x_1| \leq \kappa, \ x_2 \in (-\infty, \infty)\}$$

и введем следующие пространства Соболева

$$W_2^{\Re}(\Omega_\kappa) = W_2^{\Re(m_1,m_2)}(\Omega_\kappa) = \left\{u : \|u\|_{W_2^{\Re}(\Omega_\kappa)} = \sum_{\beta\in\Re} \left\|D^\beta u\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} < \infty\right\},$$

$$W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa) = \left\{u : \|u\|_{W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa)} = \sum_{\beta\in\Re} \left\|D^\beta u \cdot g_\kappa^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} < \infty\right\},$$

где $g(t) = 1 - t^2$ при $|t| < 1$, $g(t) = 0$ при $|t| \geq 1$ и $g_\kappa = g_\kappa(x_1) = g(x_1/\kappa)$.

Пусть $N(P, \kappa)$ – множество решений $u \in D'(\Omega_\kappa)$ уравнения $P(D)u = 0$, удовлетворяющих условию $\|D_2^j u\|_{L_2(\Omega_\kappa)} < \infty$ $(j = 0, 1, \ldots, m_2)$. В работе доказывается, что если оператор $P(D)$ удовлетворяет условию (1.3) и число κ достаточно велико, то

$$N(P, \kappa) \subset W_{2,g}^{\Re(k,m_2)}(\Omega_\kappa), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Пусть G – произвольная область, удовлетворяющая условию прямоугольника (см. [12] или [14]), $m_1 \in N$ и

$$W_2^{m_1,m_2}(G) = \left\{f : \sum_{\frac{\alpha_1}{m_1}+\frac{\alpha_2}{m_2}\leq 1} \|D^\alpha f\|_{L_2}(G) < \infty\right\}.$$

Тогда, очевидно, область Ω_κ удовлетворяет условию прямоугольника и для любого κ_1 такого, что $0 < \kappa_1 < \kappa$

$$W_{2,g}^{\Re(m_1,m_2)}(\Omega_\kappa) \subset W_2^{\Re(m_1,m_2)}(\Omega_{\kappa_1}) \subset W_2^{(m_1,m_2)}(\Omega_{\kappa_1}).$$

С другой стороны, так как $1 - \frac{1}{m_2} > 0$, то (см. [14], теорема 6.7) для функции $f \in W_{2,g}^{\Re(m_1,m_2)}(\Omega_\kappa)$ существует след по $x \in (-\kappa_1, \kappa_1)$ при любом $y \in R$, для которого с некоторой постоянной $C > 0$ $(j \leq m_1/(1 - 1/m_2))$

$$\left\|\frac{d^j}{dx^j} f(x, \cdot)\right\|_{L_2(-\kappa_1,\kappa_1)} \leq C\left[\|f^{(m_1,0)}\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})} + \|f^{(0,m_2)}\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})} + \|f\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})}\right].$$

Так как

$$N(P,\kappa)\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}W_{2,g}^{\Re(k,m_2)}(\Omega_\kappa),$$

и $\kappa_1<\kappa$ – произвольное число, то отсюда имеем, что при любом $y\in R$ существует след функции $f(x,y)$ по x, который является бесконечно дифференцируемой функцией.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В этом пункте мы докажем ряд вспомогательных предложений, необходимых для дальнейшего.

Лемма 1. *Пусть* $2\le m\in N$, $h\ge 4m$, $\sigma=\sigma(h,m)=1/[4h^2(m+1)]$ *и* $a_j(t)$ $(j=0,1,\ldots,m)$ *– некоторые неотрицательные в* $(0,\sigma)$ *функции, удовлетворяющие в* $(0,\sigma)$ *условиям:*

$$a_j(t)\le(1+2ht)\frac{a_{j-1}(t)+a_{j+1}(t)}{2},\quad j=1,\ldots,m-1. \tag{2.1}$$

Тогда для всех $t\in(0,\sigma)$ *и* $k=1,\ldots,m-1$

$$a_k(t)\le\frac{k}{k+1}\big[1+(4k-2)ht\big]a_{k+1}(t)+a_0(t). \tag{2.2}$$

Доказательство проведем по индукции по k. Так как очевидно, что $\frac12+ht<1$ при $t\in(0,\sigma)$, то неравенство (2.2) при $k=1$ следует из (2.1) при $j=1$. Пусть неравенства (2.2) доказаны для любого $k\le r\le m-1$, докажем их для $k=r+1$. По предположению индукции и из (2.1)имеем при $t\in(0,\sigma)$

$$a_{r+1}(t)\le\left(\frac12+ht\right)\left[a_{r+2}(t)+\frac{r}{r+1}\big(1+(4r-2)ht\big)a_{r+1}(t)+a_0(t)\right]$$

или, что то же самое,

$$a_{r+1}(t)\left[1-\frac{r}{r+1}\left(\frac12+ht\right)\big(1+(4r-2)ht\big)\right]$$

$$\le\left(\frac12+ht\right)\big[a_{r+2}(t)+a_0(t)\big]. \tag{2.3}$$

Так как при $r\le m-1$ и $t\in(0,\sigma)$

$$A_r(t)\equiv1-\frac{r}{r+1}\left(\frac12+ht\right)\big(1+(4r-2)ht\big)$$

$$=\frac12+\frac{1}{2(r+1)}-\frac12(4r-2)\frac{r}{r+1}ht-\frac{r}{r+1}ht\big[1+(4r-2)ht\big]$$

$$=\frac12+\frac{1}{2(r+1)}-\frac{2r^2}{r+1}ht-\frac{r}{r+1}(4r-2)(ht)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{r+1}\left[\frac{1}{2} - 2r^2(ht) - r(4r-2)(ht)^2\right]$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{r+1}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right] = \frac{2r+3}{4(r+1)} > \frac{1}{2} + ht, \tag{2.4}$$

то из (2.3) и (2.4) имеем

$$a_{r+1}(t) \le \frac{\frac{1}{2}+ht}{A_r(t)} a_{r+2}(t) + a_0(t), \quad t \in (0,\sigma). \tag{2.5}$$

С другой стороны, так как по (2.4)

$$A_r(t) > \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + ht < \frac{(2r+3)}{4(r+1)}, \quad t \in (0,\sigma),$$

при $t \in (0,\sigma)$, то имеем при $t \in (0,\sigma)$

$$\left(\frac{1}{2}+ht\right)\frac{r+2}{r+1}\frac{1}{A_r(t)} - 1 < 2\left[\left(\frac{1}{2}+ht\right)\frac{r+2}{r+1} - 1\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}+ht\right)\frac{r}{r+1}\big(1+(4r-2)ht\big)\right] = 2\left[\frac{r+2}{2(r+1)} + \frac{r+2}{r+1}ht - 1\right.$$

$$\left. + \frac{r}{2(r+1)} + \frac{1}{2}\frac{r}{(r+1)}(4r-2)ht + \frac{r}{r+1}ht + \frac{r}{r+1}ht(4r-2)ht\right]$$

$$= ht\left[4 + \frac{2r}{r+1}(4r-2)(\frac{1}{2}+ht)\right] \le (4r+2)ht = \big[4(r+1)-2\big]ht.$$

Отсюда и из (2.5) следует неравенство (2.2) при $k = r+1$.

Следствие 1. *При условиях леммы 1,*

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k(t) \le \frac{4}{3} m a_m(t) + \frac{8}{3}(m-1)^2 a_0(t), \quad t \in (0,\sigma). \tag{2.6}$$

Доказательство: Из (2.2) следует, что для всех $t \in (0,\sigma)$

$$a_k(t) \le \frac{k}{k+1}\left[1 + \frac{4k-2}{16m(m+1)}\right] a_{k+1}(t) + a_0(t)$$

$$\le \frac{k}{k+1}\left[1 + \frac{1}{4m}\right] a_{k+1}(t) + a_0(t), \quad k = 1,\dots,m-1.$$

Умножив k-ое неравенство на $(k+1)/k$ и суммировав, получим

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{k+1}{k} a_k(t) \le \left(1+\frac{1}{4m}\right)\sum_{k=1}^{m-1} a_{k+1}(t) + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{k+1}{k} a_0(t)$$

$$\le \left(1+\frac{1}{4m}\right)\sum_{k=1}^{m-1} a_{k+1}(t) + 2(m-1)a_0(t), \quad t \in (0,\sigma),$$

или, что то же самое,

$$2a_1(t) + \sum_{k=1}^{m-2} \left[\frac{k+2}{k+1} - \left(1 + \frac{1}{4m}\right)\right] a_{k+1}(t) \leq \left(1 + \frac{1}{4m}\right) a_m(t) + 2(m-1)a_0(t).$$

Так как при $m \geq 2$, $h \geq 4m$ и $1 \leq k \leq m-2$

$$\frac{k+2}{k+1} - \left(1 - \frac{1}{4m}\right) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{4m} > \frac{3}{4(m-1)},$$

то отсюда имеем при $t \in (0, \sigma)$

$$\frac{3}{4(m-1)} \left[\frac{8}{3}(m-1)a_1(t) + \sum_{k=1}^{m-2} a_{k+1}(t)\right] \leq \left(1 + \frac{1}{4m}\right) a_m(t) + 2(m-1)a_0(t).$$

Следовательно, при $t \in (0, \sigma)$ и $m \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k(t) \leq \frac{4}{3}(m-1)a_1(t) + \sum_{k=1}^{m-2} a_{k+1}(t) \leq \frac{4}{3}(m-1)\left(1 + \frac{1}{4m}\right) a_m(t)$$

$$+\frac{8}{3}(m-1)^2 a_0(t) \leq \frac{4}{3} m a_m(t) + \frac{8}{3}(m-1)^2 a_0(t),$$

что доказывает неравенство (2.6).

Замечание 1. *Из* (2.6) *непосредственно следует, что*

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(t) \leq \frac{4}{3}(m+1)a_m(t) + \frac{8}{3}m^2 a_0(t), \quad t \in (0, \sigma). \tag{2.7}$$

Следствие 2. *При условиях леммы 1 и для произвольных натуральных чисел k и r таких, что $k < r \leq m$, справедливо неравенство*

$$a_k(t) \leq \frac{k}{r} \left(\frac{13}{12}\right)^{r-k} a_r(t) + 12 \left(\frac{13}{12}\right)^{r-k} a_0(t), \quad t \in (0, \sigma). \tag{2.8}$$

Доказательство. Так как при $k \leq m-1$ и $t \in (0, \sigma)$

$$1 + (4k-2)ht < 1 + 4(m-1)ht < 1 + \frac{4(m-1)}{16m(m+1)} < 1 + \frac{1}{4(m+1)} \leq \frac{13}{12},$$

то из (2.2) следует, что для всех $t \in (0, \sigma)$

$$a_k(t) \leq \frac{k}{k+1} \frac{13}{12} a_{k+1}(t) + a_0(t), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.9}$$

т.е. при $k = r-1$ неравенство (2.8) следует из (2.9). Поэтому будем считать, что $k \leq r-2$, $r \leq m$. Применяя неравенство (2.9) $l = r-k$ раза, имеем для $t \in (0, \sigma)$

$$a_k(t) \leq \frac{k}{k+1} \frac{13}{12} a_{k+1}(t) + a_0(t)$$

$$\leq \frac{k}{k+1} \frac{13}{12} \left[\frac{k+1}{k+2} \frac{13}{12} a_{k+2}(t) + a_0(t)\right] + a_0(t)$$

$$= \frac{k}{k+2}\left(\frac{13}{12}\right)^2 a_{k+2}(t) + \left(1+\frac{13}{12}\frac{k}{k+1}\right)a_0(t)$$

$$\le \frac{k}{k+2}\left(\frac{13}{12}\right)^2\left[\frac{k+2}{k+3}\frac{13}{12}a_{k+3}(t)+a_0(t)\right] + \left[1+\frac{13}{12}\frac{k}{k+1}\right]a_0(t)$$

$$= \frac{k}{k+3}\left(\frac{13}{12}\right)^3 a_{k+3}(t) + \left[1+\frac{13}{12}\frac{k}{k+1}+\left(\frac{13}{12}\right)^2\frac{k}{k+2}\right]a_0(t)$$

$$\le \quad \dots \quad \le \frac{k}{k+l}\left(\frac{13}{12}\right)^l a_{k+l}(t) + \left[\sum_{j=0}^{l-1}(\frac{13}{12})^j\right]\frac{k}{k+j}a_0(t)$$

$$\le \frac{k}{r}\left(\frac{13}{12}\right)^{r-k} a_r(t) + 12\left[\left(\frac{13}{12}\right)^{r-k}\right]a_0(t),$$

что доказывает неравенство (2.8).

Лемма 2. *Пусть числа h, m и σ те же , что и в лемме 1, $0 < h_1 < h^2$, функции $\{a_j(t)\}$ удовлетворяют условию* (2.1) *и $\{b_j(t)\}$ – неотрицательные в $(0,\sigma)$ функции, при этом $a_0(t) = b_0(t)$ при $t \in (0,\sigma)$.*

(a) Если для всех $t \in (0,\sigma)$

$$b_j(t) \le (m+1)\left[a_j(t) + \sum_{i=0}^{j-1}(h_1 t)^{j-i}a_i(t)\right], \quad j = 1,2,\dots m, \tag{2.10}$$

то

$$\sum_{j=0}^{m} b_j(t) \le \frac{4}{3}(m+1)^2 a_m(t) + \frac{8}{3}m^3 a_0(t), \tag{2.11}$$

(b) Если для всех $t \in (0,\sigma)$

$$a_j(t) \le (m+1)\left[b_j(t) + \sum_{i=0}^{j-1}(h_1 t)^{j-i}a_i(t)\right], \quad j = 1,2,\dots m, \tag{2.12}$$

то

$$a_j(t) \le \frac{3}{2}(m+1)b_j(t) + 6(m+1)b_0(t), \quad j = 1,2,\dots m, \tag{2.13}$$

$$\sum_{j=0}^{m} a_j(t) \le 2(m+1)^2 b_m(t) + \frac{32}{3}(m+1)^2 b_0(t). \tag{2.14}$$

Доказательство. Докажем неравенство (2.11). Суммировав неравенства (2.10) по $j = 1, \dots m$, с учетом условий леммы и следствия 1, получим для $t \in (0, \sigma)$

$$b_0(t) + \sum_{j=1}^{m} b_j(t) \le a_0(t) + (m+1)\left[\sum_{j=1}^{m} a_j(t) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{j=0}^{j-1}(h_1t)^{j-i}a_i(t)\right]$$

$$\le (m+1)\sum_{j=0}^{m} a_j(t) + (m+1)\sum_{i=0}^{m-1} a_i(t) \sum_{j=i+1}^{m}(h_1t)^{j-i}$$

$$\le (m+1)\sum_{j=0}^{m} a_j(t) + (m+1)\frac{h_1t}{1-h_1t}\sum_{i=0}^{m-1} a_i(t)$$

$$= (m+1)a_m(t) + \frac{m+1}{1-h_1t}\sum_{i=0}^{m-1} a_i(t)$$

$$\le (m+1)\cdot a_m(t) + \frac{m+1}{1-h_1t}\left[a_0(t) + \frac{4}{3}ma_m(t) + \frac{8}{3}(m-1)^2a_0(t)\right]$$

$$= (m+1)\left[1 + \frac{4m}{3(1-h_1t)}\right]a_m(t) + \frac{m+1}{1-h_1t}\left[1 + \frac{8}{3}(m-1)^2\right]a_0(t)$$

$$\le (m+1)\left\{1 + 4m\left[3\left(1 - \frac{1}{4(m+1)}\right)\right]^{-1}\right\}a_m(t)$$

$$+(m+1)\left[1 - \frac{1}{4(m+1)}\right]^{-1}\left[1 + \frac{8}{3}(m-1)^2\right]a_0(t)$$

$$\le \frac{4}{3}(m+1)^2a_m(t) + \frac{8}{3}m^3a_0(t),$$

что доказывает неравенство (2.11).

Докажем неравенства (2.13). Умножим неравенства (2.8) на $(h_1t)^{j-k}$ и просуммируем их по $k = 0, 1, \dots, j-1$, получим для $j = 1, \dots, m$

$$\sum_{k=0}^{j-1}(h_1t)^{j-k}a_k(t) \le \sum_{k=0}^{j-1}(h_1t)^{j-k}\left[\frac{k}{j}\left(\frac{13}{12}\right)^{j-k}a_j(t) + 12\left(\frac{13}{12}\right)^{j-k}a_0(t)\right]$$

$$\le \sum_{k=0}^{j-1}\left(\frac{13}{12}h_1t\right)^{j-k}a_j(t) + 12\sum_{k=0}^{j-1}\left(\frac{13}{12}h_1t\right)^{j-k}a_0(t)$$

$$\le \frac{\frac{13}{12}(h_1t)}{1-\frac{13}{12}(h_1t)}a_j(t) + 12\frac{\frac{13}{12}(h_1t)}{1-\frac{13}{12}(h_1t)}a_0(t).$$

Из оценки (2.12) и условия $a_0(t) = b_0(t)$ отсюда имеем для всех $t \in (0, \sigma)$

$$\left[1-\frac{13(h_1t)(m+1)}{12-13(h_1t)}\right]a_j(t)\le(m+1)\left[b_j(t)+12\frac{13(h_1t)}{12-13(h_1t)}b_0(t)\right]$$

$j=1,\dots m$. Так как $(h_1t)<1/4(m+1)$ при $t\in(0,\sigma)$, отсюда непосредственно получаем неравенства (2.13).

Из оценок (2.7) и (2.13) при $j=m$ имеем

$$\sum_{k=0}^{m}a_k(t)\le\frac{4}{3}(m+1)a_m(t)+\frac{8}{3}m^2a_0(t)$$

$$\le\frac{4}{3}(m+1)\left[\frac{3}{2}(m+1)b_m(t)+6(m+1)b_0(t)\right]+\frac{8}{3}m^2b_0(t)$$

$$\le2(m+1)^2b_m(t)+\frac{32}{3}(m+1)^2b_0(t),\quad t\in(0,\sigma),$$

что доказывает неравенство (2.14). Лемма доказана.

Пусть числа m_1,m_2 определяют порядок оператора $P(D_1,D_2)$ (см. (1.3)), прямоугольник $\Re=\Re(m_1,m_2)\subset N_0^2$, область Ω_κ, функция $g(t)$ и пространства $W_2^{\Re}(\Omega_\kappa)$, $W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa)$ определены как в пункте 1. Обозначим

$$W_{2,loc}^{\Re}(\Omega_\kappa)=W_{2,loc}^{\Re(m_1,m_2)}(\Omega_\kappa)=\left\{u:u\in W_2^{\Re}(\Omega_{\kappa_1}),\quad\kappa_1\in(0,\kappa)\right\}.$$

Лемма 3. *Пусть $\kappa>4m_1$, $\sigma_1=1+1/(2m_1)$, $\beta\in\Re$, $0<\beta_1<m_1$ и $u\in W_{2,loc}^{\Re}(\Omega)$, тогда для $\delta\in(1,\sigma_1)$*

$$\left\|\left(D^\beta u\right)g_{\kappa/\delta}^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2\le A\left\|\left(D_1^{\beta_1+1}D_2^{\beta_2}u\right)g_{\kappa/\delta}^{\beta_1+1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2$$

$$+A\left\|\left(D_1^{\beta_1-1}D_2^{\beta_2}u\right)g_{\kappa/\delta}^{\beta_1-1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2,\tag{2.15}$$

где

$$A=\frac{1}{2}+\frac{3(m_1-1)(2m_1+1)}{2mk-2(m_1-1)(2m_1+1)}.$$

Доказательство. Так как $u\in W_2^{\Re}(\Omega_{\kappa/\delta})$ при $\delta\in(1,\sigma_1)$ и $g_{\kappa/\delta}=0$ при $|x_1|>\kappa/\delta$, то интегрированием по частям имеем

$$\left\|\left(D^\beta u\right)g_{\kappa/\delta}^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2=\iint_{\Omega_{\kappa/\delta}}\left(D^\beta u(x)\right)\left(\overline{D^\beta u(x)}\right)g_{\kappa/\delta}^{2\beta_1}(x_1)dx$$

$$=\left|\iint_{\Omega_{\kappa/\delta}}\left(D_1^{\beta_1-1}D_2^{\beta_2}u(x)\right)D_1\left(\overline{D^\beta u(x)}\,g_{\kappa/\delta}^{2\beta_1}(x_1)\right)dx\right|$$

$$\leq \left| \iint_{\Omega_{\kappa/\delta}} \left(D_1^{\beta_1-1} D_2^{\beta_2} u(x) \right) \overline{\left(D_1^{\beta_1+1} D_2^{\beta_2} u(x) \right)} g_{\kappa/\delta}^{(\beta_1-1)+(\beta_1+1)}(x_1) dx \right|$$

$$+ \left| \iint_{\Omega_{\kappa/\delta}} \left(D_1^{\beta_1-1} D_2^{\beta_2} u(x) \right) \left(\overline{D^\beta u(x)} \right) \frac{2\beta_1 \delta}{\kappa} \frac{2\delta x_1}{\kappa} g_{\kappa/\delta}^{(\beta_1-1)+\beta_1}(x_1) dx \right|.$$

Так как $\delta|x_1| < \kappa$ $(x \in \Omega_{\kappa/\delta})$, то отсюда в силу арифметического неравенства $2ab \leq a^2 + b^2$ получаем

$$\left\| \left(D^\beta u \right) g_{\kappa/\delta}^{\beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left\| \left(D_1^{\beta_1-1} D_2^{\beta_2} u \right) g_{\kappa/\delta}^{\beta_1-1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \left(D_1^{\beta_1+1} D_2^{\beta_2} u \right) g_{\kappa/\delta}^{\beta_1+1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2$$

$$+ \frac{2\beta_1 \delta}{\kappa} \left[\left\| \left(D_1^{\beta_1-1} D_2^{\beta_2} u \right) g_{\kappa/\delta}^{\beta_1-1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2 + \left\| \left(D^\beta u \right) g_{\kappa/\delta}^{\beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2 \right]$$

или, что то же самое,

$$\left(1 - \frac{2\beta_1 \delta}{\kappa} \right) \left\| \left(D^\beta u \right) g_{\kappa/\delta}^{\beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2 \leq \frac{1}{2} \left\| \left(D_1^{\beta_1+1} D_2^{\beta_2} u \right) g_{\kappa/\delta}^{\beta_1+1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{2\beta_1 \delta}{\kappa} \right) \left\| \left(D_1^{\beta_1-1} D_2^{\beta_2} u \right) g_{\kappa/\delta}^{\beta_1-1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2.$$

По определению числа κ имеем $1 - \frac{2\beta_1 \delta}{\kappa} > 0$. Так как при условиях леммы $\frac{1}{2}/[1 - (2\beta_1\delta)/\kappa] \leq A$ и

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2\beta_1 \delta}{\kappa} \right) \left(1 - \frac{2\beta_1 \delta}{\kappa} \right)^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{3\beta_1 \delta}{\kappa - 2\beta_1 \delta} \leq \frac{1}{2} + \frac{3(m_1 - 1)\delta}{\kappa - 2(m_1 - 1)\delta} \leq A,$$

то это непосредственно влечет (2.15).

Следствие 3. *Пусть* $\kappa > 4m_1$, $\beta \in \Re$ *и* $0 < \beta_1 < m_1$, *тогда*

$$\left\| \left(D^\beta u \right) g_\kappa^{\beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2 \leq A \left\| \left(D_1^{\beta_1+1} D_2^{\beta_2} u \right) g_\kappa^{\beta_1+1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2$$

$$+ A \left\| \left(D_1^{\beta_1-1} D_2^{\beta_2} u \right) g_\kappa^{\beta_1-1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}^2, \quad u \in W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa).$$

Доказательство. Сначала докажем, что для любых $u \in W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa)$ и $\alpha \in \Re$

$$\left\| \left(D^\alpha u \right) g_\kappa^{\alpha_1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} = \lim_{\delta \to 1+0} \left\| \left(D^\alpha u \right) g_{\kappa/\delta}^{\alpha_1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}. \tag{2.16}$$

Из условия $u \in W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa)$ и свойства интеграла Лебега следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\kappa_1 = \kappa_1(\varepsilon, u) \in (0, \kappa)$ такое, что

$$\sum_{\alpha\in\Re}\|(D^\alpha u)\,g_\kappa^{\alpha_1}\|_{L_2(\Omega_\kappa\setminus\Omega_{\kappa_1})}<\varepsilon. \tag{2.17}$$

Так как $g_{\kappa/\delta}(x_1)\le g_\kappa(x_1)$ при $\delta>1$ и $|x_1|<\kappa$, то отсюда непосредственно следует

$$\sum_{\alpha\in\Re}\left\|(D^\alpha u)\,g_{\kappa/\delta}^{\alpha_1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa\setminus\Omega_{\kappa_1})}<\varepsilon. \tag{2.18}$$

Применяя неравенство треугольника, имеем для любого $\beta\in\Re$

$$\left\|(D^\beta u)\,g_{\kappa_1}^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})}-\left\|(D^\beta u)\left(g_\kappa^{\beta_1}-g_{\kappa/\delta}^{\beta_1}\right)\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})}\le\left\|(D^\beta u)\,g_{\kappa/\delta}^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})}$$

$$\le\left\|(D^\beta u)\,g_{\kappa_1}^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})}+\left\|(D^\beta u)\left(g_\kappa^{\beta_1}-g_{\kappa/\delta}^{\beta_1}\right)\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})}.$$

Отсюда в силу (2.17) и (2.18) имеем

$$\left\|(D^\beta u)\,g_{\kappa_1}^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}-\varepsilon-\left\|(D^\beta u)\left(g_\kappa^{\beta_1}-g_{\kappa/\delta}^{\beta_1}\right)\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})}$$

$$\le\left\|(D^\beta u)\,g_{\kappa/\delta}^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})}\le\left\|(D^\beta u)\,g_{\kappa/\delta}^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}$$

$$\le\left\|(D^\beta u)\,g_\kappa^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}+\varepsilon+\left\|(D^\beta u)\left(g_\kappa^{\beta_1}-g_{\kappa/\delta}^{\beta_1}\right)\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})}.$$

Для завершения доказательства (2.16) достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta\to1+0}\left\|(D^\beta u)\left(g_\kappa^{\beta_1}-g_{\kappa/\delta}^{\beta_1}\right)\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})}=0. \tag{2.19}$$

Так как $\delta\to1+0$, то можно считать, что $\kappa/\delta>\kappa_1$. Тогда простой подсчет показывает, что для $u\in W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa)$,

$$\left\|\left(D^\beta u\right)\left(g_\kappa^{\beta_1}-g_{\kappa/\delta}^{\beta_1}\right)\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})}$$

$$\le\sup_{x\in\Omega_{\kappa_1}}\left|\left(g_\kappa^{\beta_1}(x_1)-g_{\kappa/\delta}^{\beta_1}(x_1)\right)\left(g_\kappa^{\beta_1}(x_1)\right)^{-1}\right|\left\|(D^\beta u)\,g_\kappa^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa_1})}$$

$$\le\frac{\beta_1(\delta^2-1)}{1-(\kappa_1/\kappa)^2}\left\|(D^\beta u)\,g_\kappa^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}.$$

Откуда непосредственно следует (2.19) и, следовательно, (2.16). Теперь утверждение следствия непосредственно следует из оценки (2.15) с переходом к пределу при $\delta \to 1+0$ и с применением (2.16).

Следствие 4. *Пусть* $\kappa > 64m_1^2(m_1+1)$, *тогда для всех* $\beta_2 \le m_2$ *и* $u \in W^{\Re}_{2,g}(\Omega_\kappa)$

$$\sum_{j=0}^{m_1} \left\| D_1^j D_2^{\beta_2}\left(u\, g_\kappa^j\right)\right\|^2_{L_2(\Omega_\kappa)}$$

$$\le \frac{4}{3}(m_1+1)^2 \left\| \left(D_1^{m_1} D_2^{\beta_2} u\right) g_\kappa^{m_1}\right\|^2_{L_2(\Omega_\kappa)} + \frac{8}{3} m_1^3 \left\| D_2^{\beta_2} u\right\|^2_{L_2(\Omega_\kappa)} \tag{2.20}$$

и

$$\sum_{j=0}^{m_1} \left\| \left(D_1^j D_2^{\beta_2} u\right) g_\kappa^j\right\|^2_{L_2(\Omega_\kappa)}$$

$$\le 2(m_1+1)^2 \left\| D_1^{m_1} D^{\beta_2}\left(u g_\kappa^{m_1}\right)\right\|^2_{L_2(\Omega_\kappa)} + \frac{32}{3}(m_1+1)^2 \left\| D_2^{\beta_2} u\right\|^2_{L_2(\Omega_\kappa)}. \tag{2.21}$$

Доказательство. Пусть $h = 4m_1$, $h_1 = 2m_1^2$, $\sigma = 1/[64(m_1+1)m_1^2]$, $\beta_2 \le m_2$. Положим для $j = 0, 1, \ldots, m_1$

$$a_j(t) = \left\| \left(D_1^j D_2^{\beta_2} u\right) g_{1/t}^j\right\|^2_{L_2(\Omega_{1/t})},$$

$$b_j(t) = \left\| D_1^j D_2^{\beta_2}\left(u g_{1/t}^j\right)\right\|^2_{L_2(\Omega_{1/t})}.$$

Простые вычисления показывают, что в силу формул Лейбница и Фаа де Бруно (см., например, [13]) и определения функции g имеем для $t \in (0,\sigma)$ и $j = 1, \ldots, m_1$:

$$b_j(t) = \left\| D_1^j D_2^{\beta_2}\left(u g_{1/t}^j\right)\right\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^{j} C_j^i \left(D_1^i D_2^{\beta_2} u\right) D_1^{j-i} g_{1/t}^j\right\|^2$$

$$\le \left\| \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!(j-i)!} \left(D_1^i D^{\beta_2} u\right) \left[\sum_{l=1}^{j-i} \frac{j! g_{1/t}^{j-l}}{l!(j-l)!} \left(\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_l = j-l} \frac{(j-i)!}{\nu_1! \ldots \nu_l!} g_{1/t}^{\nu_1} \cdots g_{1/t}^{\nu_l}\right)\right]\right\|^2$$

$$\le \left\| \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!} \left|D_1^i D^{\beta_2} u\right| g_{1/t}^i \left[\sum_{l=1}^{j-i} \frac{j!}{l!(j-l)!} \Big(\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_l = j-l} \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_l!} 2^l t^{j-i}\Big)\right]\right\|^2,$$

где $1 \le \nu_k \le 2$, $k = 1, \ldots, l$, и $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega_{1/t})}$. Так как количество векторов $\nu_1 + \ldots + \nu_l = j - i \le 2^l$, то отсюда получаем

$$b_j(t) \leq \left\| \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!} \left| \left(D_1^i D_2^{\beta_2} u \right) \right| g_{1/t}^{j-l} t^{j-i} \left[\sum_{l=1}^{j-i} \frac{j!}{l!(j-l)!} 4^l \right] \right\|^2$$

$$\leq \left\| \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!} \left| \left(D_1^i D_2^{\beta_2} u \right) \right| g_{1/t}^{j-l} t^{j-i} 5^{j-i} \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=0}^{j} (5jt)^{j-i} \left| \left(D_1^i D_2^{\beta_2} u \right) \right| g_{1/t}^{i} \right\|^2 .$$

Так как $5jt < 5m_1 t < 5m_1\sigma < 1$, то в силу арифметического неравенства $\left(\sum_{j=1}^r c_j\right)^2 \leq r \sum_{j=1}^r c_j^2$ отсюда имеем

$$b_j(t) \leq (j+1) \sum_{i=0}^{j} (5jt)^{2(j-i)} \left\| \left(D_1^i D_2^{\beta_2} u \right) g_{1/t}^{i} \right\|^2$$

$$\leq (m_1+1) \sum_{i=0}^{j} (5jt)^{j-i} a_i(t) \leq (m_1+1) \sum_{i=0}^{j} (h_1 t)^{j-i} a_i(t),$$

т.е. функции $\{a_j(t), b_j(t)\}$ удовлетворяют соотношениям (2.10). Аналогично имеем для всех $j = 1, \ldots, m_1$,

$$a_j(t) = \left\| \left(D_1^j D_2^{\beta_2} u \right) g_{1/t}^{j} \right\|_{L_2(\Omega_{1/t})}$$

$$\leq \left\| D_1^j D_2^{\beta_2} \left(u g_{1/t}^{j} \right) \right\|_{L_2(\Omega_{1/t})} + \sum_{i=0}^{j-1} C_j^i \left\| \left(D_1^i D_2^{\beta_2} u \right) D_1^{j-i} g_{1/t}^{j} \right\|_{L(\Omega_{1/t})}$$

$$\leq \left[\sqrt{b_j(t)} + \sum_{i=0}^{j-1} (5jt)^{j-i} \sqrt{a_i(t)} \right]^2 \leq (j+1) \left[b_j(t) + \sum_{i=0}^{j-1} (5jt)^{j-i} a_i(t) \right]$$

$$\leq (m+1) \left[b_j(t) + \sum_{i=0}^{j-1} (h_1 t)^{j-i} a_i(t) \right],$$

т.е. удовлетворяются также соотношения (2.12), при этом, очевидно, $a_0(t) = b_0(t)$, $t \in (0, \sigma)$.

Так как

$$t < \sigma = \frac{1}{[64(m_1+1)m_1^2]} < \frac{1}{(4m_1)},$$

то в силу следствия 3,

$$a_j(t) \leq A[a_{j+1}(t) + a_{j-1}(t)], \quad \beta_2 \leq m_2, \quad 0 < j < m_1.$$

С другой стороны, так как

$$A = A(t) = \frac{1}{2} + \frac{3(m_1-1)(2m_1+1)}{2m_1t - 2(m_1-1)(2m_1+1)} \leq \frac{1}{2} + 4m_1t = \frac{1}{2} + ht,$$

то функции $\{a_j(t)\}$ удовлетворяют также условиям леммы 1. Таким образом, выполняются все условия леммы 2. Следовательно, из оценки (2.11) имеем

$$\sum_{j=0}^{m_1} \left\| D_1^j D_2^{\beta_2} \left(u g_{1/t}^j \right) \right\|^2_{L_2(\Omega_{1/t})}$$

$$\leq \frac{4}{3}(m_1+1)^2 \left\| \left(D_1^{m_1} D_2^{\beta_2} u \right) g_{1/t}^{m_1}) \right\|^2_{L_2(\Omega_{1/t})} + \frac{8}{3} m_1^3 \left\| D_2^{\beta_2} u \right\|^2_{L_2(\Omega_{1/t})}$$

при $t \in (0, \sigma)$. Так как $1/\kappa \in (0, \sigma)$, то отсюда следует неравенство (2.20). Докажем неравенство (2.21).Из оценки (2.14) имеем

$$\sum_{j=0}^{m_1} \left\| \left(D_1^j D_2^{\beta_2} u \right) g_{1/t}^j \right\|^2_{L_2(\Omega_{1/t})}$$

$$\leq 2(m_1+1)^2 \left\| D_1^{m_1} D_2^{\beta_2} \left(u g_{1/t}^{m_1} \right) \right\|^2_{L_2(\Omega_{1/t})} + \frac{32}{3}(m_1+1)^2 \left\| D_2^{\beta_2} u \right\|^2_{L_2(\Omega_{1/t})}$$

для $t \in (0, \sigma)$. Так как $1/\kappa \in (0, \sigma)$, то отсюда следует неравенство (2.21).

Следствие 5. *При условиях следствия 4, справедливы неравенства*

$$\left\| \left(D^\beta u \right) g_\kappa^{\beta_1} \right\|^2_{L_2(\Omega_\kappa)}$$

$$\leq (m_2+1) \left\{ 2(m_1+1)^2 \left[\left\| D^{(m_1,m_2)} \left(u g_\kappa^{m_1} \right) \right\|^2_{L_2(\Omega_\kappa)} + \left\| D_1^{m_1} \left(u g_\kappa^{m_1} \right) \right\|^2_{L_2(\Omega_\kappa)} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{32}{3}(m_1+1)^2 \left[\left\| D_2^{m_2} u \right\|^2_{L_2(\Omega_\kappa)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega_\kappa)} \right] \right\}, \quad u \in W^{\Re}_{2,g}(\Omega_\kappa). \tag{2.22}$$

Доказательство непосредственно следует из оценки (2.21), равенства Парсеваля и арифметического неравенства $|t|^{\beta_2} \leq |t|^{m_2} + 1$ $(t \in R)$.

Замечание 2. *Легко видеть, что из оценки* (2.22) *непосредственно следует, что для всех* $u \in W^{\Re}_{2,g}(\Omega_\kappa)$

$$\sum_{\beta \in \Re} \left\| \left(D^\beta u \right) g_\kappa^{\beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}$$

$$\leq \sqrt{2}|\Re| \left\{ \left[\left\| D^{(m_1,m_2)} \left(u g_\kappa^{m_1} \right) \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} + \left\| D_1^{m_1} \left(u g_\kappa^{m_1} \right) \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \right] \right.$$

$$\left. +4 \left[\left\| D_2^{m_2} u \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} + \|u\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \right] \right\}. \tag{2.23}$$

3. ОЦЕНКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(-1,1)$ – фиксированная функция, $\varphi(\tau) \geq 0$ при $\tau \in (-1,1)$ и $\int \varphi(\tau) d\tau = 1$. Пусть m_1 и m_2 определяют порядок оператора $P(D)$ (см. (1.3)) и $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Положим

$$\mu = \max_{0 \leq j \leq m_0} \max_\tau \left| D^j \varphi(\tau) \right| \quad \text{and} \quad \varphi_t(\tau) = \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\tau}{t}\right), \quad t > 0.$$

Очевидно, для любых $t > 0$ и $0 \leq j \leq m_0$,

$$\int \left| D^j \varphi_t(\tau) \right| d\tau \leq 2\mu t^{-j}. \tag{3.1}$$

Для чисел $\kappa_1^i > \kappa_2^i > 0$ $(i = 1,2)$ обозначим через $\chi(x) = \chi(x_1, x_2)$ характеристическую функцию множества

$$\left\{ x \in E^2 : |x_i| < (1/2)(\kappa_1^i + \kappa_2^i), \quad i = 1,2 \right\}.$$

Пусть

$$t_0 = \frac{1}{2}(\kappa_1^1 - \kappa_2^1), \quad \theta_0 = \frac{1}{2}(\kappa_1^2 - \kappa_2^2), \quad \psi_{t_0,\theta_0}(x) = \chi(x) * (\varphi_{t_0}(x_1) \varphi_{\theta_0}(x_2)).$$

Тогда $\psi_{t_0,\theta_0} \in C_0^\infty(E^2)$ и $0 \leq \psi_{t_0,\theta_0}(x) \leq 1$ для всех $x \in E^2$, при этом $\psi_{t_0,\theta_0}(x) = 1$ при $|x_i| < \kappa_2^i$ $(i = 1,2)$ и $\psi_{t_0,\theta_0}(x) = 0$ при $|x_1| > \kappa_1^1$ или $|x_2| > \kappa_1^2$. Заметим еще, что:

1) В силу (3.1)

$$\left| D^\beta \psi_{t_0,\theta_0}(x) \right| \leq 4\mu^2 t_0^{-\beta_1} \theta_0^{-\beta_2}, \quad x \in E^2, \quad \beta \in \Re. \tag{3.2}$$

2) По хорошо известным свойствам свертки функций (см., например, [12])

$$\left\| v * \varphi_t(x_1) \varphi_\theta(x_2) - v \right\|_{W_2^\Re(E^2)} \to 0 \quad \text{as} \quad t^2 + \theta^2 \to 0. \tag{3.3}$$

Лемма 4. *Множество* $C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ *плотно в* $W^{\Re}_{2,g}(\Omega_\kappa)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – любое фиксированное число. Тогда для любой функции $u \in W^{\Re}_{2,g}(\Omega_\kappa)$ существуют числа $\delta = \delta(\varepsilon, u) \in (0, \kappa)$ и $M = M(\varepsilon, u) > 0$ такие, что для любого $\beta \in \Re$

$$\iint_{\Omega_\kappa(\delta,M)} \left|D^\beta u(x)\right|^2 g_\kappa^{2\beta_1}(x_1)dx_1dx_2 < \varepsilon^2, \tag{3.4}$$

где $\Omega_\kappa(\delta, M) = \Omega_\kappa \cap \{|x_1| > \kappa - \delta,\ |x_2| > M\}$.

Пусть $\psi_{t_0,\theta_0}(x)$ – построенная выше функция при $\kappa_1^1 = \kappa - (\delta/2)$, $\kappa_2^1 = \kappa - \delta$, $\kappa_1^2 = M + 1$ и $\kappa_2^2 = M$. Легко видеть, что функция $\widetilde{u} = \widetilde{u}(x, t_0, \theta_0)$, являющаяся продолжением нулем функции $u(x)\psi_{t_0,\theta_0}(x)$ вне множества

$$G(\kappa, \delta, M) = \left\{x \in E^2 : |x_1| < \kappa_1^1,\ \ |x_2| < \kappa_1^2\right\},$$

принадлежит $W_2^{\Re}(E^2)$.

Пусть $G' = G'(\kappa, \delta, M) = \Omega_\kappa(\delta, M) \cap G(\kappa, \delta, M)$. Применяя формулу Лейбница, оценки (3.2), (3.4) и учитывая, что $\widetilde{u}(x) = 0$ при $|x_1| > \kappa_1^1$ или $|x_2| > \kappa_1^2$, имеем с некоторой постоянной $C_1 = C_1(\Re) > 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta\in\Re} \iint_{\Omega_\kappa(\delta,M)} \left|D^\beta \widetilde{u}(x)\right|^2 g_\kappa^{2\beta_1}(x_1)dx &= \sum_{\beta\in\Re} \iint_{G'} \left|D^\beta \widetilde{u}(x)\right|^2 g_\kappa^{2\beta_1}(x_1)dx \\
&\le \sum_{\beta\in\Re} \iint_{G'} \left[\sum_{\alpha\le\beta} C_\beta^\alpha \left|D^\alpha u(x)\right| \left|D^{\beta-\alpha}\psi_{t_0,\theta_0}(x)\right|\right]^2 g_\kappa^{2\beta_1}(x_1)dx \\
&\le C_1\mu^2 \sum_{\beta\in\Re}\sum_{\alpha\le\beta} \left(\frac{\delta}{4}\right)^{-(\beta_1-\alpha_1)} \iint_{G'} \left|D^\alpha u(x)\right|^2 g_\kappa^{2\beta_1}(x_1)dx.
\end{aligned}$$

Так как $g(x_1/\kappa) < 2\delta/\kappa$ при $\kappa - \delta < |x_1| < \delta$, то отсюда и из (3.4) имеем с некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta\in\Re} \iint_{\Omega_\kappa(\delta,M)} \left|D^\beta \widetilde{u}(x)\right|^2 g_\kappa^{2\beta_1}(x_1)dx \\
&\le C_1\mu^2 \sum_{\beta\in\Re}\sum_{\alpha\le\beta} \left(\frac{\delta}{4}\right)^{-2(\beta_1-\alpha_1)} \left(\frac{2\delta}{\kappa}\right)^{\beta_1-\alpha_1} \iint_{\Omega_\kappa(\delta,M)} \left|D^\alpha u(x)\right|^2 g_\kappa^{2\alpha_1}(x_1)dx \\
&\le C_2\mu^2 \left[\left(\frac{8}{\kappa}\right)^{2m_1} + 1\right]\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

В силу (3.3) для любого $\varepsilon' > 0$ существуют числа $t_1 = t_1(\varepsilon, \varepsilon') > 0$ и $\theta_1 = \theta_1(\varepsilon, \varepsilon') > 0$ такие, что при $t \in (0, t_1)$ и $\theta \in (0, \theta_1)$

$$\left\|\widetilde{u}(x) * \left(\varphi_t(x_1)\varphi_\theta(x_2)\right) - \widetilde{u}(x)\right\|_{W_2^{\Re}(E^2)} < \varepsilon'. \tag{3.6}$$

С другой стороны, очевидно, что при $t \in (0, \delta/2)$ и $\theta > 0$

$$\widetilde{u}(x) * (\varphi_t(x_1)\varphi_\theta(x_2)) \in C_0^\infty(\Omega_\kappa).$$

Пусть числа ε и ε' фиксированы, числа $t_1 = t_1(\varepsilon, \varepsilon')$ и $\theta_1 = \theta_1(\varepsilon, \varepsilon')$ определены как выше и $0 < t < \min\{t_1, \delta/2\}$. Так как $g(t) \le 1$, то в силу (3.6) имеем (далее пишем $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa)}$)

$$\left\|\widetilde{u}(x) * \left(\varphi_t(x_1)\varphi_\theta(x_2)\right) - u(x)\right\|$$

$$\le \|\widetilde{u}(x) * (\varphi_t\varphi_\theta) - \widetilde{u}(x)\| + \|\widetilde{u} - u\| < \varepsilon' + \|\widetilde{u} - u\|.$$

Так как $\psi_{t_0,\theta_0}(x) = 1$ (следовательно, $\widetilde{u}(x) = u(x)$ при $|x_1| < \kappa - \delta$, $|x_2| < M$), то отсюда, с применение оценок (3.4) и (3.5), имеем для указанных (t, θ) с некоторой постоянной $C_3 > 0$

$$\left\|\widetilde{u}(x) * \left(\varphi_t(x_1)\varphi_\theta(x_2)\right) - u\right\| < \varepsilon' + \|\widetilde{u}(x) - u(x)\|$$

$$\le \varepsilon' + \|u\| + \|\widetilde{u}(x)\| \le \varepsilon' + \varepsilon|\Re| + C_3\varepsilon|\Re|.$$

Так как числа $\varepsilon, \varepsilon'$ – произвольные, то это доказывает лемму.

Пусть $P(D) = P(D_1, D_2) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ – линейный дифференциальный оператор, символ $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$ которого удовлетворяет условию (1.3) с постоянной $d = d(P) > 0$. Пусть множество (P), прямоугольник $\Re = \Re(m_1, m_2)$ и область $\Omega = \Omega_\kappa$ определены как в пункте 1. Обозначим $a = a(P) = \max_{\alpha \in (P)} |\gamma_\alpha|$.

Лемма 5. *Пусть оператор $P(D)$ удовлетворяет условию* (1.3), *тогда для произвольного $\Omega \subset E^2$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\beta \in \Re} \left\|D^\beta u\right\|_{L_2(\Omega)} \le d\left[\|P(D)u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}\right], \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.7}$$

Доказательство получается при помощи преобразования Фурье и применения равенства Парсеваля.

Лемма 6. *Пусть оператор $P(D)$ удовлетворяет условию* (1.3) *и*

$$\kappa \geq 64(m_1+1)^3(m_2+1)(a+1),$$

тогда

$$\sum_{\beta\in\Re} \left\| \left(D^\beta u\right) g_\kappa^{\beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}$$

$$\leq 3\sqrt{2}|\Re|\Big[d\left\|\left(P(D)u\right)g_\kappa^{m_1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} + 2\left\|D_2^{m_2}u\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} + (2+d)\|u\|_{L_2(\Omega_\kappa)}\Big] \tag{3.8}$$

для любого $u \in W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa)$.

Доказательство. По лемме 4, неравенство (3.8) достаточно доказать для функций $u \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$. При этом в течение доказательства леммы: $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega_\kappa)}$. Пользуясь оценками (2.23) и (3.7) имеем для функций $u \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$

$$\sum_{\beta\in\Re} \left\| \left(D^\beta u\right) g_\kappa^{\beta_1} \right\|$$

$$\leq \sqrt{2}|\Re|\left\{\left[\left\|D^{(m_1,m_2)}\left(ug_\kappa^{\beta_1}\right)\right\| + \left\|D_1^{m_1}\left(ug_\kappa^{\beta_1}\right)\right\|\right] + 4\Big[\left\|D_2^{m_2}u\right\| + \|u\|\Big]\right\}$$

$$\leq \sqrt{2}|\Re|\Big\{2d\big[\left\|P(D)(ug_\kappa^{m_1})\right\| + \|u\|\big] + 4\left(\left\|D_2^{m_2}u\right\| + \|u\|\right)\Big\}. \tag{3.9}$$

В силу формулы Лейбница и определения функции g_κ, для первого слагаемого из правой части (3.9) имеем

$$\left\|P(D)\left(ug_\kappa^{m_1}\right)\right\| \leq \left\|\left[P(D)u\right]g_\kappa^{m_1}\right\| + \sum_{\alpha\in(P),\,\alpha_1\neq 0} |\gamma_\alpha| \sum_{l=0}^{\alpha_1-1} \left\|\left(D_1^l D_2^{\alpha_2} u\right) C_{\alpha_1}^l D_1^{\alpha_1-l} g_\kappa^{m_1}\right\|$$

$$\leq \left\|\left(P(D)u\right) g_\kappa^{m_1}\right\| + a\sum_{\beta_2=0}^{m_2}\sum_{l=0}^{m_1-1}\left\|\left(D_1^l D_2^{\beta_2}\right) g_\kappa^l\right\| \sum_{\alpha_1=l+1}^{m_1}\left(\frac{2\alpha_1 m_1}{\kappa}\right)^{\alpha_1-l}$$

$$\leq \left\|(P(D)u)g_\kappa^{m_1}\right\| + a\frac{2m_1^2}{\kappa}\frac{1}{1-\frac{2m_1^2}{\kappa}}\sum_{\beta\in\Re}\left\|\left(D^\beta u\right) g_\kappa^{\beta_1}\right\|. \tag{3.10}$$

Простой подсчет показывает, согласно условию на κ, что $1/[1-(2m_1^2)/\kappa] < 192/191$, поэтому из (3.9) и (3.10) получаем

$$\left[1-2\sqrt{2}da\frac{2m^2}{\kappa}\frac{192}{191}\right]\sum_{\beta\in\Re}\left\|\left(D^\beta u\right)g_\kappa^{\beta_1}\right\|$$

$$\leq\sqrt{2}|\Re|\Big[2d\big\|(P(D)u)g_\kappa^{m_1}\big\|+4\left\|D_2^{m_2}u\right\|+(2d+4)\|u\|)\Big].$$

Отсюда и из условия на κ следует неравенство (3.8) и доказательство завершено.

Лемма 7. *Пусть оператор* $P(D)$ *удовлетворяет условию* (1.3) *и число* κ *то же, что в лемме 6, тогда для каждого* $j=0,1,\ldots$ *существует постоянная* $A_j>0$ *такая, что для любого* $u\in W_{2,g}^{(m_1+k,m_2)}(\Omega_\kappa)$,

$$\sum_{\beta\in\Re^{(m_1+j,m_2)}}\left\|\left(D^\beta u\right)g_\kappa^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}$$

$$\leq A_j\left[\sum_{\beta\in\Re^{(m_1+j-1,m_2)}}\left\|\left(D^\beta u\right)g_\kappa^{\beta_1}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}+\left\|\left[P(D)\left(D_1^ju\right)\right]g_\kappa^{m_1+j}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}\right].\tag{3.11}$$

Доказательство. Утверждение леммы при $j=0$ непосредственно следует из (3.8). Пусть $j\geq 1$, тогда в силу арифметического неравенства $|t|^j\leq|t|^{m_2}+1$ при $(0<j\leq m_2)$ и равенства Парсеваля имеем

$$\sum_{\beta\in\Re^{(m_1+j,m_2)}}\left\|\left(D^\beta u\right)g_\kappa^{\beta_1}\right\|=\sum_{\beta\in\Re^{(m_1+j-1,m_2)}}\left\|\left(D^\beta u\right)g_\kappa^{\beta_1}\right\|$$

$$+\sum_{\beta_2=0}^{m_2}\left\|\left(D_1^{m_1+j}D_2^{\beta_2}u\right)g_\kappa^{m_1+j}\right\|\leq\sum_{\beta\in\Re^{(m_1+j-1,m_2)}}\left\|\left(D^\beta u\right)g_\kappa^{\beta_1}\right\|$$

$$+(m_2+1)\left\{\left\|\xi_2^{m_2}F\left[\left(D_1^{m_1+j}u\right)g_\kappa^{m_1+j}\right]\right\|+\left\|F\left[\left(D_1^{m_1+j}u\right)g_\kappa^{m_1+j}\right]\right\|\right\}$$

$$=\sum_{\beta\in\Re^{(m_1+j-1,m_2)}}\left\|\left(D^\beta u\right)g_\kappa^{\beta_1}\right\|,\tag{3.12}$$

где обозначаем $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L_2(\Omega_\kappa)}$ и $F(\cdot)$ – преобразование Фурье. Применяя формулу Лейбница ко второму слагаемому в правой части (3.12), имеем

$$\left\|\left(D_1^{m_1+j}D^{m_2}u\right)g_\kappa^{m_1+j}\right\|+\left\|\left(D_1^{m_1+j}u\right)g_\kappa^{m_1+j}\right\|$$

$$\le \left\| \left(D_1^{m_1} D_2^{m_2} \left[\left(D_1^j u\right) g_\kappa^j\right]\right) g_\kappa^{m_1} \right\| + \sum_{l=0}^{m_1-1} C_{m_1}^l \left\| \left(D_1^{l+j} D_2^{m_2} u\right) \left(D_1^{m_1-l} g_\kappa^j\right) g_\kappa^{m_1} \right\|$$

$$+ \left\| D_1^m \left[\left(D_1^j u\right) g_\kappa^j\right] g_\kappa^{m_1} \right\| + \sum_{l=0}^{m-1} C_{m_1}^l \left\| \left(D_1^{l+j} u\right) \left(D^{m_1-l} g_\kappa^j\right) g_\kappa^{m_1} \right\|.$$

Так как в силу определения функции g

$$\left| D_1^{m_1-l} g_\kappa^j(x_1) \right| \le \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{m_1-l} j^{m_1-l} g_\kappa^{j-m_1+l}(x_1), \quad j \ge m_1 - l,$$

$$\left| D_1^{m_1-l} g_\kappa^j(x_1) \right| \le \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{m_1-l} j^{m_1-l}, \quad \frac{1}{2}(m_1-l) \le j \le m_1 - l,$$

$$\left| D_1^{m_1-l} g_\kappa^j(x_1) \right| = 0, \quad j < \frac{1}{2}(m_1-l),$$

то отсюда получаем

$$\left\| \left(D_1^{m_1+j} D^{m_2} u\right) g_\kappa^{m_1+j} \right\| + \left\| \left(D_1^{m_1+j} u\right) g_\kappa^{m_1+j} \right\|$$

$$\le \left\| \left(D_1^{m_1} D_2^{m_2} \left[\left(D_1^j u\right) g_\kappa^j\right]\right) g_\kappa^{m_1} \right\| + \left\| D_1^{m_1} \left[\left(D_1^j u\right) g_\kappa^j\right] g_\kappa^{m_1} \right\|$$

$$+ \sum_{l=0}^{m_1-1} \left(\frac{2m_1 j}{\kappa}\right)^{m_1-l} \left[\left\| \left(D_1^{l+j} D_2^{m_2} u\right) g_\kappa^{l+j} \right\| + \left\| \left(D_1^{l+j} u\right) g_\kappa^{l+j} \right\|\right]. \tag{3.13}$$

Из оценки (3.12) в силу (3.13) имеем с некоторой постоянной $A_j^1 > 0$

$$\sum_{\beta \in \Re(m_1+j, m_2)} \left\| \left(D^\beta u\right) g_\kappa^{\beta_1} \right\| \le A_j^1 \left\{ \sum_{\beta \in \Re(m_1+j-1, m_2)} \left\| \left(D^\beta u\right) g_\kappa^{\beta_1} \right\| \right.$$

$$\left. + \left\| D_1^{m_1} D_2^{m_2} \left[\left(D_1^j u\right) g_\kappa^j\right] g_\kappa^{m_1} \right\| + \left\| D^{m_1} \left[\left(D_1^j u\right) g_\kappa^j\right] g_\kappa^{m_1} \right\| \right\}. \tag{3.14}$$

Так как при $u \in W_{2,g}^{\Re(m_1+k, m_2)}(\Omega_\kappa)$,

$$\left(D_1^j u\right) g_\kappa^j \in W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa), \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$

то в силу леммы 6 имеем с некоторой постоянной $A_j^2 > 0$

$$\left\| D_1^{m_1} D_2^{m_2} \left[\left(D_1^j u\right) g_\kappa^j\right] g_\kappa^{m_1} \right\| + \left\| D^{m_1} \left[\left(D_1^j u\right) g_\kappa^j\right] g_\kappa^{m_1} \right\|$$

$$\leq A_j^2 \left\{ \left\| P(D) \left[\left(D_1^j u \right) g_\kappa^j \right] g_\kappa^{m_1} \right\| + \left\| D_2^{m_2} \left[\left(D_1^j u \right) \right] g_\kappa^{m_1} \right\| + \left\| \left(D_1^j u \right) g_\kappa^j \right\| \right\}$$

$$\leq A_j^2 \left\{ \left\| \left(P(D) D_1^j u \right) g_\kappa^{m_1+j} \right\| + a \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \sum_{\beta_1=1}^{m_1} \sum_{l=0}^{\beta_1-1} C_{\beta_1^l} \left\| \left(D_1^{l+j} D_2^{\beta_2} u \right) \left(D_1^{\beta_1-l} g_\kappa^j \right) g_\kappa^{m_1} \right\| \right.$$

$$\left. + \left\| \left(D_2^{m_2} D_1^j u \right) g_\kappa^{j+m_1} \right\| + \left\| \left(D_1^j u \right) g_\kappa^j \right\| \right\} \leq A_j^2 \left\{ \left\| \left(P(D) D_1^j u \right) g_\kappa^{m_1+j} \right\| \right.$$

$$+ a \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \sum_{\beta_1=1}^{m_1} \sum_{l=0}^{\beta_1-1} C_{\beta_1}^l \left(\frac{2}{\kappa} \right)^{\beta_1-l} e(j, \beta_1 - l) \left\| \left(D_1^{l+j} D_2^{\beta_2} u \right) g_\kappa^{m_1+j-\beta_1+l} \right\|$$

$$\left. + \left\| \left(D_2^{m_2} D_1^j u \right) g_\kappa^{j+m_1} \right\| + \left\| \left(D_1^j u \right) g_\kappa^j \right\| \right\},$$

где $e(j, \beta_1 - l) \leq j!$ при $\beta_1 - l \geq j$ и $e(j, \beta_1 - l) \leq j!/(\beta_1 - l)$ при $\beta_1 - l > j$. Заметим, что в обоих случаях $e(j, \beta_1 - l) \leq j^{\beta_1 - l}$. Так как $(j, 0) \in \Re^{(m_1+j-1, m_2)}$ и $(l + j, \beta_2) \in \Re^{(m_1+j-1, m_2)}$ для всех $\beta_2 \leq m_2$ и $l \leq m_1 - 1$, то отсюда имеем с некоторой постоянной $A_j^3 > 0$

$$\left\| D_1^{m_1} D_2^{m_2} \left[\left(D_1^j u \right) g_\kappa^j \right] g_\kappa^{m_1} \right\| + \left\| D_1^{m_1} \left[\left(D_1^j u \right) g_\kappa^j \right] g_\kappa^{m_1} \right\|$$

$$\leq A_j^3 \left\{ \left\| \left[D_1^j P(D) u \right] g_\kappa^j g_\kappa^{m_1+j} \right\| + \sum_{\beta \in \Re^{(m_1+j-1, m_2)}} \left\| \left(D^\beta u \right) g_\kappa^{\beta_1} \right\| \right\}, \tag{3.15}$$

Остается заметить, что из (3.14) и (3.15) следует (3.11). Лемма доказана.

Для оператора $P(D)$, удовлетворяющего условию (1.3) и числа $\kappa > 0$, by $N(P, \kappa)$ обозначим через множество тех обобщенных решений $u \in D'$ уравнения $P(D)u = 0$, для которых $\left\| D_2^j \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} < \infty$ $(j = 0, 1, \ldots m_2)$. Можно показать (см. [12]), что множество $N(P, \kappa)$ опрделяется также следующим эквивалентным образом

$$N(P, \kappa) = \left\{ u \in D' : P(D)u = 0, \ \|D_2^{m_2}\|_{L_2(\Omega_\kappa)} + \|u\|_{L_2(\Omega_\kappa)} < \infty \right\}.$$

Пусть $u \in N(P, \kappa)$, $\widetilde{u}(x)$ – продолжение нулем вне Ω_κ функции $u(x)$, φ – функция, определенная в начале этого пункта и $\varepsilon > 0$. Положим

$$\widetilde{u}_\varepsilon(x) = \iint_{E^2} \widetilde{u}(x - y) \varphi_\varepsilon(y_1) \varphi_\varepsilon(y_2) dy.$$

Лемма 8. *Пусть $u \in N(P,\kappa)$, тогда для любого $j \in N_0$*

$$\left\|\left[D_1^j P(D)\widetilde{u}_\varepsilon\right] g_\kappa^{m_1+j}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.16}$$

Доказательство. Сначала заметим, что если $G \subset E^2$ – произвольная область, $v \in L_{2,loc}(G)$ и $Q(D)$ – произвольный линейный дифференциальный оператор такой, что $Q(D)v \in L_{2,loc}(G)$, то

$$(Q(D)\widetilde{v}_\varepsilon)(x) = (Q(D)\widetilde{v})_\varepsilon(x)$$

как только $\rho(x,\partial G) > \varepsilon$, где ρ – функция расстояния от точки $x \in G$ до границы ∂G области G. Поэтому для каждой функции $u \in N(P,\kappa)$ и для всех $\varepsilon \in (0,\kappa)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\left\|\left[D_1^j P(D)\widetilde{u}_\varepsilon\right] g_\kappa^{m_1+j}\right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \\
&= \left\|\left[D_1^j P(D)\widetilde{u}_\varepsilon\right] g_\kappa^{m_1+j}\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa-\varepsilon})} + \left\|\left[D_1^j P(D)\widetilde{u}_\varepsilon\right] g_\kappa^{m_1+j}\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa,\varepsilon})} \\
&= \left\|\left(D_1^j P(D)\widetilde{u}\right)_\varepsilon g_\kappa^{m_1+j}\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa-\varepsilon})} + \left\|\left[D_1^j P(D)\widetilde{u}_\varepsilon\right] g_\kappa^{m_1+j}\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa,\varepsilon})}
\end{aligned}$$

$$= \left\|\left[D_1^j P(D)\widetilde{u}_\varepsilon\right] g_\kappa^{m_1+j}\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa,\varepsilon})}, \tag{3.17}$$

где $\Omega_{\kappa,\varepsilon} = \Omega_\kappa \setminus \Omega_{\kappa-\varepsilon}$. Так как $g_\kappa(x) = g(x/\kappa) \le 2\varepsilon/\kappa$ при $x \in \Omega_{\kappa,\varepsilon}$, то отсюда имеем

$$\left\|\left[D_1^j P(D)\widetilde{u}_\varepsilon\right] g_\kappa^{m_1+j}\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa,\varepsilon})} \le a' \sum_{\beta\in(P)} \left\|D_1^j D^\beta \widetilde{u}_\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa,\varepsilon})}$$

$$= a' \sum_{\beta\in(P)} \left\|\iint_{E^2} D^{\beta_2}\widetilde{u}(x-y) D^{\beta_1+j}\varphi_\varepsilon(y_1)\varphi_\varepsilon(y_2)dy\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa,\varepsilon})}, \tag{3.18}$$

где $a' = (2\varepsilon/\kappa)^{m_1+j}a$.

Так как продолжение тождественным нулем функции $D^{\beta_2}u$ вне Ω_κ совпадает с $D^{\beta_2}\widetilde{u}$ при $0 \le \beta_2 \le m_2$, то применяя неравенство Гельдера и теорему Фубини, получим для любого $\beta \in (P)$

$$\left\|\iint_{E^2} D^{\beta_2}\widetilde{u}(x-y) D^{\beta_1+j}\varphi_\varepsilon(y_1)\varphi_\varepsilon(y_2)\, dy\right\|^2_{L_2(\Omega_{\kappa,\varepsilon})}$$

$$\leq \left\| D^{\beta_1+j}\varphi_\varepsilon(y_1)\varphi_\varepsilon(y_2)\right\|_{L_1(E^2)} \left\| \iint_{E^2} \left|D^{\beta_2}\widetilde{u}(x-y)\right|^2 \left|D^{\beta_1+j}\varphi_\varepsilon(y_1)\right| \varphi_\varepsilon(y_2)dy \right\|_{L_1(\Omega_{\kappa,\varepsilon})}$$

$$\leq \left\| D^{\beta_1+j}\varphi_\varepsilon(y_1)\varphi_\varepsilon(y_2)\right\|^2_{L_1(E^2)} \sup_{z_1} \left\| D^{\beta_2}\widetilde{u}(x_1-z_1,x_2)\right\|_{L_2(\Omega_{\kappa,\varepsilon})}.$$

С другой стороны, в силу теоремы Фубини

$$v_{\beta_2}(x_1) \equiv \int_{E^1} \left|D^{\beta_2}\widetilde{u}(x_1,x_2)\right|^2 dx_2 \in L_1,$$

поэтому в силу (3.1) имеем с некоторой постоянной $C_1 = C_1(j+\beta_1,\varphi) > 0$

$$\left\| \iint_{E^2} D^{\beta_2}\widetilde{u}(x-y) D^{\beta_1+j}\varphi_\varepsilon(y_1)\varphi_\varepsilon(y_2)dy \right\|^2_{L_2(\Omega_{\kappa,\varepsilon})}$$

$$\leq C_1^2 \varepsilon^{-2(\beta_1+j)} \sup_{z_1} \int_{\kappa-\varepsilon<|x_1|<\kappa} v_{\beta_2}(x_1-z_1)dx_1. \tag{3.19}$$

Из (3.17), (3.18) и (3.19) имеем с некоторой постоянной $C_2 = \max_{j+\beta_1\leq m_1+\kappa} C_1(j+\beta_1,\varphi)$

$$\left\| \left[D_1^j P(D)\widetilde{u}_\varepsilon\right] g_\kappa^{m_1+j} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}$$

$$\leq a' C_2 \varepsilon^{-(\beta_1+j)} \sum_{\beta\in(P)} \left[\sup_{z_1} \int_{\kappa-\varepsilon<|x_1|<\kappa} v_{\beta_2}(x_1-z_1)dx_1 \right]^{1/2}$$

$$\leq a' C_2 \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{m_1+j} \sum_{\beta_2=0}^{m_2} \left[\sup_{z_1} \int_{\kappa-\varepsilon<|x_1|<\kappa} v_{\beta_2}(x_1-z_1)dx_1 \right]^{1/2}.$$

Так как $v_{\beta_2} \in L_1(E^1)$ при $\beta_2 = 0,1,\ldots,m_2$ и интеграл Лебега непрерывен относительно меры, то отсюда непосредственно получаем соотношение (3.16). Лемма доказана.

Докажем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть оператор $P(D)$ удовлетворяет условию* (1.3), *а число κ определяется как в лемме 6. Тогда*

$$N(P,\kappa) \subset W_{2,g}^{\Re(m_1+j,m_2)}(\Omega_\kappa), \quad j = 0,1,\ldots \tag{3.20}$$

Доказательство проведем по индукции по j. При $j=0$ в силу леммы 6 имеем для произвольных $u \in N(P,\kappa)$ и $\varepsilon \in (0,\kappa)$

$$\sum_{\beta\in\Re(m_1,m_2)} \left\| \left(D^\beta \widetilde{u}_\varepsilon\right) g_\kappa^{\beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \leq 3\sqrt{2}|\Re| \Big[d \left\| (P(D)\widetilde{u})\, g_\kappa^{m_1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)}$$

$$+2\left\| D_2^{m_2} \widetilde{u}_\varepsilon \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} + (d+2) \left\| \widetilde{u}_\varepsilon \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \Big]. \tag{3.21}$$

В силу леммы 8 отсюда следует, что множество $\{\widetilde{u}_\varepsilon\}$ равномерно по $\varepsilon \in (0,\kappa)$ ограничено в $W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa)$. При этом,

$$\sum_{\beta\in\Re} \left\| \left[D^\beta \left(\widetilde{u}_\varepsilon - \widetilde{u}_\delta\right)\right] g_\kappa^{\beta_1} \right\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Тогда множество $\{\widetilde{u}_\varepsilon\}$ компактно в $W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa)$. Так как $\|\widetilde{u}_\varepsilon - u\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то в силу замкнутости оператора дифференцирования и в силу того, что $W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa)$ – банахово пространство, имеем, что $u \in W_{2,g}^{\Re}(\Omega_\kappa)$, т.е. соотношение (3.20) доказано при $j=0$.

Пусть соотношение (3.20) доказано при $j \leq r-1$ $(r \geq 1)$. Докажем его для $j=r$. Для этого заменим неравенство (3.21) на неравенство (3.11) и применим лемму 8. По предположению индукции получим, что множество $\{\widetilde{u}_\varepsilon\}$ компактно в $W_{2,g}^{\Re(m_1+r,m_2)}(\Omega_\kappa)$. Отсюда непосредственно следует, что $u \in W_{2,g}^{\Re(m_1+r,m_2)}(\Omega_\kappa)$. Теорема доказана.

Abstract. A two-dimensional linear differential operator $P(D) = P(D_1, D_2)$ is called *almost hypoelliptic* if all derivatives $D^\alpha P$ of the characteristic polynomial $P(\xi) = P(\xi_1,\xi_2)$ are estimated by $P(\xi)$. Assuming that $\{\Omega_\kappa = (x_1,x_2) \in E^2 : |x_1| < \kappa,\ x_2 \in R^1\}$, the paper proves that if the width κ of the strip Ω_κ exceeds some $C = C(P) > 0$, then all solutions $\{u\}$ of the almost hypoelliptic equation $P(D)u = 0$ in a Sobolev space are infinitely smooth functions with respect to x_1.

Список литературы

[1] L. Hoermander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators* **2** (Springer-Verlag, Berlin 1983).

[2] L. Ehrenpreis, "Solutions of Some Problems of Division," 4, Amer. J. Math., **82**, 522-588 (1960).

[3] F. John, "Continuous Dependence on Data for Solutions of PDE With a Prescribed Bound," Comm. Pure Appl. Math., **13**, 551-585 (1960).

[4] L. Gording, B. Malgrange, "Operateurs Differentiels Partillement Hypoelliptiques," Math. Scand., **9**, 5-21 (1961).

[5] Я. С. Бугров, "Теоремы вложения для некоторых функциональных классов," Труды МИАН СССР, **77**, 45-64 (1965).

[6] В. И. Буренков, “Аналог теоремы Л. Хермандера о гипоэллиптичности для функций, стремящихся к нулю на бесконечности,” Сб. докладов 7-го Советско-Чехословацкого семинара, стр. 63-67, Ереван, 1982.

[7] L. Hoermander, “Differentiability Properties of Solutions of Systems of Differential Equations,” Arkh. Math., **3**, 527-535 (1958).

[8] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, “Об одном классе почти гипоэллиптических операторов,” Изв. НАН Армении, Математика **41** (6), 39-56 (2006).

[9] Ghazaryan H. G. “Some estimates of derivatives of polynomials with constant coefficients,” Izv. Nat. Acad. Nauk Armenii. Mat. v. 34, n. 3, 44 - 63, 1999.

[10] G. G. Kazaryan, “On Almost Hypoelliptic Polynomials,” Dokladi Ros. Acad. Nauk., **398** (6), 701-703 (2004).

[11] O. R. Gabrielyan, “Comparison of Power and Strength of Polynomials,” in: Complex Analysis, Diff. Equations and Related Topics, Proceedings of ISAAC Conference on Analysis, pp. 41-51, Yerevan, 2002.

[12] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения* (Наука, Москва, 1996).

[13] T. Gramchew, P. Popivanov, M. Yoshina, “Critical Gevrey Index for Hypoellipticity of Parabolic Operators and Newton Polygons,” Annali di Mat. Pure ed Applicata, (4) **CLXX**, 103-131 (1996).

[14] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения* (Наука, Москва, 1977).

Поступила 8 ноября 2007