

ФАКТОРИЗАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ВЕКТОРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

Х. А. ХАЧАТРЯН И М. Г. КОСТЯНЯН

Институт математики НАН Армении
E-mail: *khach_82@rambler.ru*
Армянский Государственный Аграрный Университет
E-mail: *mikakost@mail.ru*

Аннотация. В статье исследуется один класс векторных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки. Используя специальные факторизационные методы, доказывается разрешимость этой системы в конкретных функциональных пространствах.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается следующий класс векторных интегро-дифференциальных уравнений:

$$(1.1) \quad -\frac{df_i}{dx} + A_i f_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} k_{ij}(x-t) \lambda_j(t) f_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

относительно искомой вектор-функции $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T \in \mathfrak{M}$, где T – знак транспонирования, а $\mathfrak{M}$ – класс абсолютно непрерывных вектор-функций медленного роста, т.е.

$$(1.2) \quad \mathfrak{M} \stackrel{def}{=} \left\{ f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T : f_j \in AC(\mathbb{R}) \right. \\ \left. s.t. \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\varepsilon x} f_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, m \right\}$$

Здесь через $AC(\mathbb{R})$ обозначается пространство абсолютно непрерывных на вещественной оси функций, $A_i > 0$ – заданные числа, а $0 \leq g_i(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ ($0 \leq \lambda_i \leq 1$ $i = 1, 2, \dots, m$) – функции, заданные на $(-\infty, +\infty)$. Ядерная матриц-функция $K(x) = (k_{ij}(x))_{i,j=1}^{m \times m}$ удовлетворяет следующим условиям: $0 \leq k_{ij} \in$

$L_1(-\infty, +\infty) \cap L_\infty(-\infty, +\infty)$, причем

$$(1.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} k_{ij}(x) dx = a_{ij}, \quad \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m a_{ij} = 1.$$

Задача (1.1)-(1.3) возникает в теории бифуркации рождения цикла, в эконометрике, в теории популяции, в кинетической теории металлов, в теории вероятностей и др. (см. [1]-[6]). Соответствующее скалярное уравнение достаточно подробно изучалось в работе [7]. Но до этого, в том частном случае, когда $K(x)$ является вполне монотонной функцией, уравнение изучалось в работах [5, 6, 8].

В настоящей работе мы будем заниматься изучением задачи (1.1)-(1.3). Основной подход состоит в следующем: при помощи специальной факторизации исходного матричного интегро-дифференциального оператора решение задачи (1.1)-(1.3) сводится к последовательному решению трех более простых систем уравнений. С помощью классического аппарата теории интегральных уравнений типа свертки и теории функций удастся доказать разрешимость полученных уравнений.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Пусть $\mathbb{R}^m$ – пространство вещественных m -мерных ($m \geq 1$) вектор-столбцов, а $\mathbb{R}^{m \times m}$ – алгебра вещественных $m \times m$ -мерных матриц с единицей I . Введем конусы $K' \subset \mathbb{R}^m$ и $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^{m \times m}$, состоящие из векторов или матриц с неотрицательными коэффициентами. Конусы K' и $\tilde{K}$ вводят частный порядок “больше или равно” в своих пространствах. Будем писать $A \succeq 0$, если все компоненты A неотрицательны и $A \succ 0$, если они положительны.

Обозначим через E одно из следующих банаховых пространств $L_p(-\infty, +\infty)$, $p \geq 1$, $L_\infty(-\infty, +\infty)$, $C_u(-\infty, +\infty)$, где $C_u(-\infty, +\infty)$ – пространство непрерывных функций на вещественной оси, имеющих конечный предел в $+\infty$.

Пусть Ω – класс матричных интегральных операторов типа свертки (см. [9]), т.е. $K \in \Omega$, если

$$(2.1) \quad (\mathbb{K}f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)f(t) dt,$$

где

$$(2.2) \quad K(x) = (k_{ij}(x))_{i,j=1}^{m \times m} \in L^{m \times m}(-\infty, +\infty),$$

а $f \in E_+^{\times m} = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_m$. Нетрудно убедиться, что оператор $\mathbb{K}$ переводит $E^{\times m}$ в себя, причем в любом из пространств $E^{\times m}$ имеет место

$$(2.3) \quad \|\mathbb{K}\|_{E^{\times m}} \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} |k_{ij}(x)| dx$$

Действительно, пусть $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T \in E^{\times m}$ – произвольная вектор-функция. Имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}f\|_{E^{\times m}} &\stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^m \|(\mathbb{K}f)_i\|_E = \sum_{i=1}^m \left\| \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} k_{ij}(x-t) f_j(t) dt \right\|_E \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|(K_{ij}f_j)(x)\|_E \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|K_{ij}\|_E \|f_j\|_E. \end{aligned}$$

С другой стороны, известно, что норма скалярного оператора типа свертки в любом из пространств E удовлетворяет следующему неравенству (см. [10]-[12])

$$(2.4) \quad \|K_{ij}\|_E \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |k_{ij}(x)| dx$$

Следовательно, с учетом (2.4) будем иметь

$$\|\mathbb{K}f\|_{E^{\times m}} \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m \|K_{ij}\|_E \sum_{j=1}^m \|f_j\|_E \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} |k_{ij}(x)| dx \|f\|_{E^{\times m}},$$

откуда, в свою очередь, следует неравенство (2.3). Введем следующие подклассы

$\Omega^\pm \subset \Omega$ верхних и нижних матричных интегральных операторов типа Вольтерра: $V^\pm \in \Omega^\pm$: если

$$(\mathbb{V}^+ f)(x) = \int_{-\infty}^x V_+(x-t) f(t) dt, \quad (\mathbb{V}^- f)(x) = \int_x^{+\infty} V_-(t-x) f(t) dt,$$

где

$$(2.5) \quad V_\pm = \left(v_\pm^{i,j} \right)_{i,j=1}^{m \times m}, \quad v_\pm^{i,j} \in L_1(-\infty, +\infty), \quad f \in E^{\times m}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Нетрудно убедиться, что

$$(2.6) \quad \Omega = \Omega^+ \oplus \Omega^-.$$

Известно также, что если $\mathbb{K} \in \Omega$, $\mathbb{V}^\pm \in \Omega^\pm$, то $\mathbb{V}^- \mathbb{K} \in \Omega$ и $\mathbb{K} \mathbb{V}^+ \in \Omega$. Пусть $\Omega^\wedge$ – следующий (более расширенный) класс матричных интегральных операторов: $\mathbb{K}^\wedge \in \Omega^\wedge$, если

$$(2.7) \quad (\mathbb{K}^\wedge f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t) \Lambda(t) f(t) dt,$$

где K задается по формуле (2.2), а Λ – диагональная матриц-функция вида

$$(2.8) \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)),$$

$0 \leq \lambda_j(x) \leq 1$ ($j = 1, 2, \dots, m$) – функции, заданные на $(-\infty, +\infty)$. Убедимся, что если $\mathbb{K}^\wedge \in \Omega^\wedge$, то $\mathbb{V}^- \in \Omega^-$, $\mathbb{V}^- \mathbb{K}^\wedge \in \Omega^\wedge$. Действительно, пусть $f \in E^{\times m}$ – произвольная вектор-функция, тогда

$$(\mathbb{V}^- \mathbb{K}^\wedge f)(x) = \int_x^{+\infty} V_-(t-x) \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-y) \Lambda(y) f(y) dy dt.$$

откуда, изменяя порядок интегрирования, получим

$$(\mathbb{V}^- \mathbb{K}^\wedge f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} V_-(t-x) K(t-y) dt \right) \Lambda(y) f(y) dy.$$

Обозначим через $z = t - x$, получим

$$\begin{aligned} (\mathbb{V}^- \mathbb{K}^\wedge f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} V_-(z) K(x+z-y) dz \right) \Lambda(y) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x-y) \Lambda(y) f(y) dy, \end{aligned}$$

где

$$(2.9) \quad Q(x) = \int_0^{+\infty} V_-(z) K(x+z) dz.$$

Из теоремы Фубини (см., например, [13]) легко следует, что $Q \in L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)$. Следовательно, $\mathbb{V}^- \mathbb{K}^\wedge \in \Omega^\wedge$. Что касается включения $\mathbb{K}^\wedge \mathbb{V}^+ \in \Omega^\wedge$, это не всегда верно. Очевидно, что включение $\mathbb{V}^- \mathbb{K} \in \Omega$ является прямым следствием включения $\mathbb{V}^- \mathbb{K}^\wedge \in \Omega^\wedge$.

3. ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ

3.1. Постановка задачи. Пусть $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$, где $A_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Тогда уравнение (1.1) можно записать в следующем операторном виде

$$(3.1) \quad (\mathbb{D} - A\mathbb{I} + \mathbb{K}^\wedge) f + g = 0,$$

где $\mathbb{D}$ – матричный дифференциальный оператор вида

$$(3.2) \quad \mathbb{D} = \text{diag}(D, D, \dots, D), \quad (D\varphi)(x) = \frac{d\varphi}{dx},$$

$\mathbb{I}$ – единичный матричный оператор порядка $m \times m$, а $\mathbb{K}^\wedge$ задается посредством формул (1.3), (2.7), (2.8).

Когда $A \succcurlyeq 0$ (причем $A_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$) рассмотрим следующую задачу факторизации: для каждой диагональной матрицы $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$,

$\alpha_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) и для заданных операторов $A\mathbb{I}$ и $\mathbb{K}^\wedge \in \Omega^\wedge$ найти такие операторы $\mathbb{U} \in \Omega^-$ и $\mathbb{W}^\wedge \in \Omega^\wedge$, чтобы имело место следующее разложение

$$(3.3) \quad \mathbb{D} - A\mathbb{I} + \mathbb{K}^\wedge = (\mathbb{D} - \alpha\mathbb{I})(\mathbb{I} - \mathbb{U})(\mathbb{I} - \mathbb{W}^\wedge).$$

Факторизацию мы будем понимать как равенство интегральных операторов, действующих в

$$\underbrace{W_1^1 \times W_1^1 \times \dots \times W_1^1}_m \equiv (W_1^1)^{\times m},$$

где W_p^n – пространство Соболева, состоящее из функций f , для которых $f^{(k)} \in L_p(-\infty, \infty)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

3.2. Основная факторизационная лемма.

Лемма 1. Пусть $\mathbb{K}^\wedge \in \Omega$ – заданный оператор, $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m) \succcurlyeq 0$ ($A_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$) – заданная диагональная матрица. Тогда для каждого $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) имеет место факторизация (3.3), причем ядра операторов $\mathbb{U} \in \Omega^-$ и $\mathbb{W}^\wedge \in \Omega^\wedge$ задаются соответственно по формулам:

$$(3.4) \quad U(x) = \text{diag}(u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)), \quad u_j(x) = (\alpha_j - A_j)e^{-A_j x} \theta(x),$$

где $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$,

$$(3.5) \quad W^\wedge(x, t) = W(x - t)\Lambda(t), \quad W(x) = (w_{ij}(x))_{i,j=1}^{m \times m}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$w_{ij}(x) = \int_x^{+\infty} e^{-A_i(t-x)} k_{ij}(t) dt, \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

а $\Lambda(t)$ – диагональная матрица, задаваемая посредством (2.8). Кроме этого, имеют место следующие оценки:

$$(3.6) \quad \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} w_{ij}(x) dx \leq \max_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{1}{A_i} \right) \mu_j,$$

$$(3.7) \quad \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dw_{ij}(x)}{dx} \right| dx \leq 2\mu_j,$$

где

$$(3.8) \quad \mu_j \equiv \sum_{i=1}^m a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{G}^\alpha$ – обратный оператор матричного дифференциального оператора $\alpha\mathbb{I} - \mathbb{D}$ в пространстве $(W_1^1)^{\times m}$. Заметим, что $\mathbb{G}^\alpha \in \Omega^-$ и имеет следующий вид

$$(3.9) \quad \mathbb{G}^\alpha = \text{diag}(\mathbb{G}^{\alpha_1}, \mathbb{G}^{\alpha_2}, \dots, \mathbb{G}^{\alpha_m}),$$

$$(\mathbb{G}^{\alpha_j} \varphi)(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\alpha_j(t-x)} \varphi(t) dt, \quad \alpha_j > 0, \quad \varphi \in E$$

($j = 1, 2, \dots, m$). Обозначим через $\mathbb{Q}^\wedge$ произведение операторов $\mathbb{G}^\alpha$ и $\mathbb{K}^\wedge$. Из результатов §2 следует, что $\mathbb{Q}^\wedge \in \Omega^\wedge$, и его ядро имеет следующий вид $Q^\wedge(x, t) = Q(x - t)\Lambda(t)$,

$$(3.10) \quad Q(x) = (q_{ij}(x))_{i,j=1}^{m \times m},$$

$$q_{ij}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_i \tau} k_{ij}(x + \tau) d\tau = \int_x^{+\infty} e^{-\alpha_i(z-x)} k_{ij}(z) dz.$$

Покажем, что функции q_{ij} удовлетворяют следующим двум оценкам

$$(3.11) \quad \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} q_{ij}(x) dx \leq \max_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{1}{\alpha_i} \right) \mu_j,$$

$$\sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dq_{ij}(x)}{dx} \right| dx \leq 2\mu_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_{ij}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_i(z-x)} k_{ij}(z) dz dx.$$

Изменяя порядок интегрирования, с использованием теоремы Фубини и с учетом (1.3), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_{ij}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} k_{ij}(z) e^{-\alpha_i z} \left(\int_{-\infty}^z e^{\alpha_i x} dx \right) dz = \frac{1}{\alpha_i} a_{ij},$$

откуда и следует одно из неравенств (3.11). Из (3.10) видно, что

$$(3.12) \quad \frac{dq_{ij}(x)}{dx} = -k_{ij}(x) + \alpha_i \int_x^{+\infty} e^{-\alpha_i(z-x)} k_{ij}(z) dz,$$

откуда с учетом уже доказанного неравенства (3.11) получаем требуемое.

Оператор $\mathbb{D} - A\mathbb{I} + \mathbb{K}^\wedge$ представим в следующем виде:

$$(3.13) \quad \mathbb{D} - A\mathbb{I} + \mathbb{K}^\wedge = \mathbb{D} - \alpha\mathbb{I} + \alpha\mathbb{I} - A\mathbb{I} + \mathbb{K}^\wedge.$$

С учетом (3.9) и (3.10), из последнего получим

$$(3.14) \quad \mathbb{D} - A\mathbb{I} + \mathbb{K}^\wedge = (\mathbb{D} - \alpha\mathbb{I}) (\mathbb{I} - \mathbb{Q}^\wedge - (\alpha - A)\mathbb{G}^\alpha).$$

Обозначим через $\mathbb{I} + \mathbb{R}^\alpha$ резольвенту матричного оператора $\mathbb{I} - (\alpha - A)\mathbb{G}^\alpha$ в пространстве $(W_1^1)^{\times m}$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$\mathbb{R}^\alpha \in \Omega^-, \quad \mathbb{R}^\alpha = \text{diag}(\mathbb{R}^{\alpha_1}, \mathbb{R}^{\alpha_2}, \dots, \mathbb{R}^{\alpha_m}),$$

где

$$(3.15) \quad (\mathbb{R}^{\alpha_j} \varphi)(x) = (\alpha_j - A_j) \int_x^{+\infty} e^{-A_j(t-x)} \varphi(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Из (2.9), следует, что $\mathbb{R}^\alpha \mathbb{Q}^\wedge \in \Omega^\wedge$, следовательно,

$$(3.16) \quad \mathbb{W}^\wedge \equiv \mathbb{R}^\alpha + \mathbb{R}^\alpha \mathbb{Q}^\wedge \in \Omega^\wedge.$$

Простыми вычислениями можно убедиться, что оператор $\mathbb{W}^\wedge$ задается посредством (3.5). Таким образом, из (3.14) и (3.15), (3.16) получается факторизация (3.3). Нетрудно убедиться, что матричный оператор $\mathbb{W}^\wedge$ принимает значения в $(W_1^1)^{\times m}$. Оценки (3.6) и (3.7) доказываются аналогично оценкам (3.11).

3.3. Связь между первыми моментами ядер K и W . В дальнейшем изложении настоящей работы в некоторых особых случаях существование и знак первого момента матричного ядра W (в компонентном смысле) нам существенно понадобится. В следующей лемме мы установим связь между первыми моментами матричных ядер K и W .

Лемма 2. Пусть $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m) \succcurlyeq 0$, $A_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) и существует интеграл

$$(3.17) \quad v(K) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x K(x) dx < +\infty$$

который абсолютно сходится. Тогда существует и $v(W)$, причем справедлива следующая формула

$$(3.18) \quad v(w_{ij}) = \frac{v(k_{ij})}{A_i} - \frac{a_{ij}}{A_i^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Доказательство. Из (3.5) и теоремы Фубини, будем иметь

$$\begin{aligned} v(w_{ij}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x w_{ij}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_0^{+\infty} e^{-A_i t} k_{ij}(x+t) dt \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-A_i t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x k_{ij}(x+t) dx \right) dt. \end{aligned}$$

Откуда, обозначая через $\tau = x + t$ и используя (1.3), получим

$$\begin{aligned} v(w_{ij}) &= \int_0^{+\infty} e^{-A_i t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\tau - t) k_{ij}(\tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-A_i t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tau k_{ij}(\tau) d\tau \right) dt - \int_0^{+\infty} t e^{-A_i t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k_{ij}(\tau) d\tau \right) dt \\ &= \frac{v(k_{ij})}{A_i} - \frac{a_{ij}}{A_i^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1.1)-(1.3)

Обозначим

$$(4.1) \quad \rho = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m \frac{a_{ij}}{A_i}, \quad A_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В последующих пунктах настоящего параграфа мы займемся решением задачи (1.1)-(1.3) для разных значений ρ . При этом существенным образом мы будем использовать факторизацию (3.3).

4.1. Решение задачи в случае $\rho < 1$. Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия

- (i) $0 \preccurlyeq g \in L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)$,
- (ii) $0 \leq \lambda_j(\cdot) \leq 1$ ($j = 1, 2, \dots, m$) — измеримые функции.

Тогда задача (1.1)-(1.3) в случае $\rho < 1$ в пространстве $(W_1^1)^{\times m}$ обладает положительным решением.

Доказательство. Используя факторизацию (3.3), уравнение (1.1) запишем в следующей форме

$$(4.2) \quad (\mathbb{D} - \alpha \mathbb{I})(\mathbb{I} - \mathbb{U})(\mathbb{I} - \mathbb{W}^\wedge)f + g = 0.$$

Обозначим через

$$(4.3) \quad \chi = (\mathbb{I} - \mathbb{W}^\wedge)f \quad \text{and} \quad \psi = (\mathbb{I} - \mathbb{U})\chi.$$

Тогда вектор-функция $\psi = \text{diag}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m)^T$ будет удовлетворять уравнению

$$(4.4) \quad (\mathbb{D} - \alpha \mathbb{I})\psi + g = 0,$$

или в раскрытом виде

$$(4.5) \quad -\frac{d\psi_i}{dx} + \alpha_i \psi_i(x) = g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Нетрудно убедиться, что система (4.5) в пространстве $(W_1^1)^{\times m}$ имеет единственное решение вида:

$$\psi_i(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\alpha_i(t-x)} g_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Теперь перейдем к рассмотрению уравнения (4.3). В раскрытом состоянии оно принимает следующий вид

$$(4.6) \quad \chi_i(x) = \psi_i(x) + (\alpha_i - A_i) \int_x^{+\infty} e^{-A_i(t-x)} \chi_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Простыми вычислениями можно убедиться, что это уравнение в пространстве $(W_1^1)^{\times m}$ имеет единственное решение вида:

$$0 \leq \chi_i(x) = \int_x^{+\infty} e^{-A_i(t-x)} g_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Наконец, рассмотрим уравнение $(\mathbb{I} - \mathbb{W}^\wedge) f = \chi$

$$(4.7) \quad f_i(x) = \chi_i(x) + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} w_{ij}(x-t) \lambda_j(t) f_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

или в матричной форме,

$$(4.8) \quad f(x) = \chi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} W(x-t) \Lambda(t) f(t) dt.$$

Рассмотрим следующие итерации

$$(4.9) \quad f^{(n+1)}(x) = \chi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} W(x-t) \Lambda(t) f^{(n)}(t) dt,$$

где $f^{(k)} = (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_m^{(k)})^T$, $k = 0, 1, \dots$, $f^{(0)} = (0, 0, \dots, 0)^T$. Поскольку $\chi \succcurlyeq 0$, $W \succcurlyeq 0$ и $\Lambda \succcurlyeq 0$, то последовательность $f^{(n)} = (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \dots, f_m^{(n)})^T$ монотонно возрастает, т.е. $f^{(n+1)} \succcurlyeq f^{(n)}$. Можно по индукции доказать следующие легко проверяемые факты

- i) $\chi \preccurlyeq f^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$,
- ii) $f^{(n)} \in (W_1^1)^{\times m}$.

В силу этих соотношений, с учетом монотонности $f^{(n)}$, из (4.9) получим следующее неравенство для норм

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \|f^{(n+1)}\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} &= \|\chi\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} + \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} w_{ij}(x-t) \lambda_j(t) f_j^{(n)}(t) dt dx \\ &\leq \|\chi\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} + \rho \|f^{(n+1)}\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)}, \end{aligned}$$

где через $\|f\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)}$ обозначается следующая норма

$$\|f\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} = \sum_{j=1}^m \|f_j\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} = \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} |f_j(x)| dx.$$

Из (4.10) получим

$$\|f^{(n+1)}\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} \leq \frac{\|\chi\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)}}{1 - \rho}.$$

Следовательно, используя теоремы Б. Леви о монотонной сходимости (см. [14]) можно утверждать, что последовательность

$$f^{(n)} = (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \dots, f_m^{(n)})^T \in (W_1^1)^{\times m}$$

почти всюду сходится к вектор-функции $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T \in L_1^{\times m}(-\infty, \infty)$. Докажем, что предельная функция f удовлетворяет системе (4.8). Поскольку $f^{(n)} \nearrow f$, то

$$f^{(n+1)}(x) \leq \chi(x) + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} w_{ij}(x-t) \lambda_j(t) f_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В последнем неравенстве, с учетом теоремы Лебега (см. [14]), переходя к пределу, когда $n \rightarrow \infty$, получим

$$(4.11) \quad f_i(x) \leq \chi_i(x) + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} w_{ij}(x-t) \lambda_j(t) f_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

С другой стороны,

$$(4.12) \quad \chi_i(x) + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} w_{ij}(x-t) \lambda_j(t) f_j^{(n)}(t) dt \leq f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Откуда, в силу теоремы Б. Леви, получим обратное к (4.11) неравенство:

$$(4.13) \quad \chi_i(x) + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} w_{ij}(x-t) \lambda_j(t) f_j(t) dt \leq f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Из (4.13) и (4.11) следует (4.7). Убедимся, что $f \in (W_1^1)^{\times m}$. Поскольку

$$\frac{dw_{ij}(x)}{dx} = -k_{ij}(x) + A_i \int_x^{+\infty} e^{-A_i(t-x)} k_{ij}(t) dt \in L_1(-\infty, +\infty) \cap L_\infty(-\infty, +\infty)$$

($i, j = 1, 2, \dots, m$), то с учетом (1.3) и известной теоремы о дифференцировании под знаком интеграла получим

$$\frac{df_i(x)}{dx} = \frac{\chi_i(x)}{dx} + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w_{ij}(x-t)}{dx} \lambda_j(t) f_j^{(n)}(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Поскольку $\chi_i \in W_1^1(-\infty, +\infty)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то $f \in (W_1^1)^{\times m}$. Теорема доказана.

4.2. Решение задачи в случае $\rho = 1$.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия

- (i) $0 \preccurlyeq g \in L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)$,
- (ii) $0 \leq \lambda_j(\cdot) \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, m$ – измеримые функции.

Тогда, если $\rho = 1$ и существует

$$v(k_{ij}) > \frac{a_{ij}}{A_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

то задача (1.1)-(1.3) в классе $\mathfrak{M}$ имеет покомпонентно положительное решение с асимптотикой:

$$(4.14) \quad \int_0^x f(t) dt = o(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

Доказательство: С использованием факторизации (3.3) решение уравнения (4.2) сводится к последовательному решению уравнений (4.3) и (4.4). Решая уравнения (4.3) и (4.4), элементарными преобразованиями приходим к уравнению

$$(4.15) \quad f(x) = \chi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} W(x-t)\Lambda(t)f(t) dt.$$

Рассмотрим следующие простые итерации

$$(4.16) \quad f^{(n+1)}(x) = \chi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} W(x-t)\Lambda(t)f^{(n)}(t) dt, \quad f^{(0)} = (0, 0, \dots, 0)^T$$

($n = 0, 1, 2, \dots$). Поскольку $\chi \succcurlyeq 0$, $W \succcurlyeq 0$ и $\Lambda \succcurlyeq 0$, то по индукции легко можно убедиться, что $\chi \preccurlyeq f^{(n)}$ покомпонентно монотонно возрастают по n .

Наряду с уравнением (4.15) рассмотрим следующее вспомогательное уравнение типа свертки

$$(4.17) \quad \tilde{f}(x) = \chi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} W(x-t)\tilde{f}(t) dt.$$

В работе [15] доказано, что если $\chi \in L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)$, $0 \preccurlyeq W \in L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)$, $\|W\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} = 1$ и $v(W) \succcurlyeq 0$, то уравнение (4.17) в $L_{1,loc}^{\times m}(-\infty, +\infty)$ имеет покомпонентно положительное решение со следующей асимптотикой

$$\int_0^x \tilde{f}(t) dt = o(x) \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

По индукции также можно проверить, что имеют место следующие неравенства:

$$f^{(n)}(x) \preccurlyeq \tilde{f}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, последовательность вектор-функций $\left(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \dots, f_m^{(n)}\right)^T$ почти всюду имеет точечный предел $(f_1, f_2, \dots, f_m)^T$. При этом, $f(x) \preccurlyeq \tilde{f}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), и предельная функция удовлетворяет уравнению (1.1). Нетрудно показать, что $f \in \mathfrak{M}$. Теорема доказана.

4.3. Решение задачи в случае $\rho > 1$.

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия

- (i) $0 \preccurlyeq g \in L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)$,
- (ii) $0 < \lambda_j(\cdot) \leq 1$, $\lambda_j \in W_\infty^1(-\infty, +\infty)$, $j = 1, 2, \dots, m$, причем

$$c = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m c_{ij} < 1,$$

где

$$c_{ij} = \sup_{t \in (-\infty, +\infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_i(t + \tau) w_{ij}(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) при $\rho > 1$ имеет покомпонентно положительное решение в весовом пространстве

$$(W_{1,\Lambda}^1)^{\times m} \equiv W_{1,\lambda_1}^1 \times W_{1,\lambda_2}^1 \times \dots \times W_{1,\lambda_m}^1,$$

где W_{1,λ_j}^1 – пространство Соболева, состоящее из функций f_j , для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_j(x)| \lambda_j(x) dx < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_j'(x)| \lambda_j(x) dx < +\infty \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Доказательство. Сначала решая уравнения (4.4) и $(\mathbb{I} - \mathbb{U})\chi = \psi$, с учетом факторизации (3.3) приходим к уравнению (4.15). Умножим слева обе части этой системы на матриц-функцию $\Lambda(x)$. Тогда при помощи обозначения $\xi_i(x) = \lambda_i(x)\varphi_i(x)$, $q_i(x) = \lambda_i(x)\chi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) приходим к следующей системе относительно новой искомой функции $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^T$:

$$\xi_i(x) \leq q_i(x) + \lambda_j(x) \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} w_{ij}(x-t) \xi_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Перепишем это уравнение в операторной форме

$$(4.18) \quad \xi(x) = q(x) + \Lambda(x) \int_{-\infty}^{+\infty} W(x-t) \xi(t) dt$$

и применим к нему следующий итерационный процесс

$$(4.19) \quad \xi^{(n+1)}(x) = q(x) + \Lambda(x) \int_{-\infty}^{+\infty} W(x-t) \xi^{(n)}(t) dt, \quad \xi^{(0)} = (0, 0, \dots, 0)^T$$

($n = 0, 1, 2, \dots$).

По индукции легко можно убедиться, что

- i) $q \preceq \xi^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$,
- ii) $\xi^{(n)} \nearrow$ by n , i.e. $\xi^{(n+1)} \preceq \xi^{(n)}$,
- iii) $\xi^{(n)} \in L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)$.

Следовательно, с учетом сказанного получим следующую оценку

$$\begin{aligned} & \left\| \xi^{(n+1)} \right\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} \\ & \leq \|q\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} + \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} w_{ij}(x-t) \xi_j^{(n+1)}(t) dt dx \\ & = \|q\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_i(x) \int_{-\infty}^{+\infty} w_{ij}(x-t) \xi_j^{(n+1)}(t) dt dx. \end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования во втором слагаемом, (с учетом теоремы Фубини), получим

$$\left\| \xi^{(n+1)} \right\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} \leq \|q\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} + c \left\| \xi^{(n+1)} \right\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)},$$

т.е.

$$\left\| \xi^{(n+1)} \right\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)} \leq \frac{\|q\|_{L_1^{\times m}(-\infty, +\infty)}}{1 - c}.$$

Из полученной оценки, с учетом ii) и теоремы Б. Леви, заключаем, что последовательность вектор-функций $\{\xi^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ почти всюду в $(-\infty, +\infty)$ сходится к суммируемой функции $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^T$. Как в доказательстве теоремы 1, используя теоремы Б. Леви и Лебега, можно показать, что полученная вектор-функция $\xi \in (W_1^1)^{\times m}$ удовлетворяет уравнению (4.18). Так как $0 < \lambda_j \leq 1$, $\lambda_j \in W_{\infty}^1(-\infty, +\infty)$ ($j = 1, 2, \dots, m$), то $f \in (W_{1,\Lambda}^1)^{\times m}$. Теорема доказана.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну за ценные обсуждения результатов, а также рецензенту за полезные замечания.

Abstract. The paper investigates a class of convolution type integro-differential equations for vector-functions. Some special factorization methods are used to prove the solvability in several functional spaces.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. D. Hassard, N.D. Kazarinoff and Y.H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation* (Cambridge University Press, 1981).
- [2] P. J. Wengersky and W. J. Cunningham, "Time Log in Population Models", Gold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology **22** (1957).
- [3] J. D. Sargan, "The distribution of wealth", *Econometrica* (25), 568-590 (1957).
- [4] Е. М. Лифшиц, Л. М. Питаевский, *Физическая кинетика* **X** (Наука, Москва, 1979).
- [5] Х. А. Хачатрян, "Интегро-дифференциальные уравнения физической кинетики", Изв. НАН Армении, Математика. **39** (3), 72-80 (2004).
- [6] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, "Электронная плазма в полубесконечном металле при наличии переменного электрического поля", Ж. Выч. мат. и Мат. физ. **41** (48) 1229-1241 (2001).
- [7] Х. А. Хачатрян, Э. А. Хачатрян, "Разрешимость интегро-дифференциальных уравнений типа свертки на $\mathbb{R}$ ", Изв. НАН Армении, Математика **42** (3), 161-175 (2007).
- [8] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, "Разрешимость краевой задачи физической кинетики", Изв. НАН Армении, Математика **41** (6), 47-56 (2006).
- [9] N. Wiener, N. Hopf, "Über Eine Klasse Singularer Integral Eichungen Sitzung", Berlin, s., 696-706 (1931).
- [10] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итого науки и техники, Матем. анализ **22**, 175-242 (1984).
- [11] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Мат. сборник, **97** 35-58 (1975).
- [12] Н. Б. Енгибарян, "Теоремы факторизации для интегральных операторов", Доклады АН СССР, 1021-1024 (1976).
- [13] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, Москва, 1981).
- [14] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной* (Наука, Москва, 1974).
- [15] Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Системы интегральных уравнений Винера-Хопфа и нелинейные уравнения факторизации", Мат. сборник **124** (6) 189-216 (1984).

Поступила 24 сентября 2007