Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 3, 2008, стр. 3-12

О СХОДИМОСТИ ГРИДИ АЛГОРИТМА ПО СИСТЕМЕ УОЛША В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

Г. АМИРХАНЯН

Институт математики НАН Армении
E-mail: *a_gagik@mail.ru*

Аннотация. В работе изучаются вопросы сходимости гриди алгоритма по системе Уолша в L_p, $p > 1$. Доказано существование функции из L_p, $1 < p < 2$, гриди алгоритм которой не сходится к ней по мере. Построена непрерывная функция, гриди алгоритм которой не сходится в L_p, $p > 2$. Приведены достаточные условия для сходимости гриди алгоритма в L_p, $p > 1$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $F = \{f_n\}$ – полная, минимальная, нормированная система в Банаховом пространстве X и $G = \{g_n\}$ – ее сопряженная система. Слабый гриди алгоритм по системе F определяется следующим образом.

Пусть $t \in (0, 1]$ фиксировано и $f \in X$. Обозначим через $\Lambda_m(t)$ множество из m индексов, для которого справедливо неравенство

$$\min_{k\in\Lambda_m(t)} |c_k(f)| \geq t \max_{k\notin\Lambda_m(t)} |c_k(f)|,$$

где $c_k(f) = \langle g_k, f\rangle$. Тогда

$$G^t_m(f) := G^t_m(f, F) := \sum_{k\in\Lambda_m(t)} c_k(f) w_k,$$

называется слабым гриди аппроксимантом функции f по системе F. В случае $t = 1$

$$G_m(f) = G_m(f, F) := G^1_m(f, F)$$

называется гриди аппроксимантом функции f.

Система $F = \{f_n\}$ называется гриди базисом пространства X, если существует постоянная $A = A_F$ такая, что для любого $f \in X$

$$\|f - G_m(f, F)\| \le A\sigma_m(f, F), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $\sigma_m(f, F)$ – наилучшее m-членное приближение элемента f по системе F, т.е.

$$\sigma_m(f, F) = \inf_{\{a_k\},\{n_k\}} \left\| f - \sum_{k=1}^{m} a_k f_{n_k} \right\|.$$

Система функций $F = \{f_n\}$ называется квази-гриди базисом, если для любой функции $f \in X$ гриди алгоритм сходится к f по норме пространства X:

$$\lim_{m\to\infty} \|f - G_m(f, F)\| = 0.$$

Ясно, что гриди базис является также квази-гриди базисом. В работе [1] С. В. Конягина и В. Н. Темлякова было доказано, что базис $F = \{f_n\}$ является гриди базисом тогда и только тогда, когда $F = \{f_n\}$ безусловна и демократична, т.е нормы сумм с одинаковым числом элементов из F эквивалентны.

В ряде работ были изучены вопросы сходимости гриди алгоритма по тригонометрической системе. Т. Кернер, ответив на вопрос, поставленный Л. Карлесоном и Р. Койфманом, построил в [2] пример функции из $L_2(T)$, а затем в [3] – пример непрерывной функции, гриди алгоритм которой расходится почти всюду.

В работе [4] В. Н. Темлякова доказано существование функции $f \in L_p$ для всех $1 < p < 2$, гриди алгоритм которой по тригонометрической системе не сходится по мере, и непрерывной функции, гриди алгоритм которой по тригонометрической системе не сходится в L_p для любого $p > 2$. Это, в частности, означает, что тригонометрическая система не является квази-гриди базисом в L_p, если $p \neq 2$. С другой стороны, Темпляковым и Конягиным были получены достаточные условия для сходимостим гриди алгоритма по тригонометрической системе в L_p (см. [5]).

В работе Р. Грибонвиля и М. Нильсена [6] получено необходимое условие, которому удовлетворяет всякий равномерно ограниченный ортонормированный квази-гриди базис в L_p, откуда вытекает, что как тригонометрическая система, так и система Уолша не являются квази-гриди базисами в L_p при $p \neq 2$. С другой стороны, Нильсеном в работе [7] построена равномерно ограниченная ортонормированная система, которая является квази-гриди базисом для всех $p \in (1, \infty)$.

Отметим также работы С. А. Епископосяна [8, 9], где рассмотрены вопросы квази-гриди базисности обобщенной системы Уолша и ее подсистем в $L_1(0,1)$.

В настоящей работе мы приводим аналоги некоторых результатов Конягина и Темлякова для системы Уолша $\mathcal{W} = \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Теорема 1. *Существует функция* $f \in \bigcap_{p<2} L_p(0,1)$, *для которой* $G_m(f,\mathcal{W})$ *не сходится к* f *по мере.*

Теорема 2. *Существует непрерывная функция* f, *для которой* $G_m(f,\mathcal{W})$ *не сходится к* f *в* $L_p(0,1)$ *для любого* $p>2$.

В следующих двух теоремах мы подразумеваем, что $L_\infty = C$, т.е. является пространством непрерывных функций с равномерной нормой.

Теорема 3. *Пусть* $f \in L_p([0,1]^d)$, $2 < p \le \infty$, $q > p' := p/(p-1)$. *Если*

$$\sum_{|k|>n} \left|\hat{f}(k)\right|^q = o\left(n^{d(1-q/p')}\right),$$

где $k = (k_1, \dots k_d)$, $|k| := \max_{1\le i\le d} |k_i|$, *а* $\hat{f}(k)$ – *коэффициенты Фурье функции* f *по кратной системе Уолша. Тогда*

$$\lim_{m\to\infty} \left\|f - G_m^t(f,\mathcal{W})\right\|_p = 0$$

для любого $0 < t \le 1$.

Для функции $f \in L_1([0,1]^d)$ обозначим через $\{a_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ убывающую перестановку последовательности $\{|\hat{f}(k)|\}_{k\in\mathbb{N}^d}$.

Теорема 4. *Пусть* $2 < p < \infty$ *и убывающая последовательность* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$A_n = o\left(n^{1/p-1}\right).$$

Тогда для любой функции $f \in L_p([0,1]^d)$, *для которой* $a_n(f) \le A_n$, $n = 1, 2, \dots$ *имеет место*

$$\lim_{m\to\infty} \left\|f - G_m^t(f,\mathcal{W})\right\|_p = 0$$

Ниже мы докажем теоремы теоремы 1 и 2, так как теоремы 3 и 4 доказываются так же, как их аналоги для тригонометрической системы из работы [2].

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним, что система Уолша $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли определяется равенством

$$w_0(x) \equiv 1, \quad w_n(x) = \prod_{i=0}^{k} (r_i(x))^{\varepsilon_i}, \quad \text{при} \quad n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ или } 1,$$

где $\{r_i(x)\}$ – система Радемахера. Обозначим

$$\Delta_i^{(k)} = \left(\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right), \quad k \geq 0, \quad 0 \leq i < 2^k.$$

Ядро Дирихле для системы Уолша

$$D_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x)$$

для $n = 2^k$ имеет простой вид (см. [10], 1.4.13)

$$D_{2^k}(x) = \begin{cases} 2^k & \text{при} \quad x \in \Delta_0^{(k)}, \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1) \setminus \Delta_0^{(k)}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ядро Фейера для системы Уолша определяется следующим образом

$$K_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_n(x)$$

и при $n = 2^k + m$, $1 \leq m \leq 2^k$ удовлетворяет равенствам (см. [10], 4.2.3)

$$nK_n(x) = 2^k K_{2^k}(x) + mD_{2^k}(x) + mw_{2^k}(x)K_m(x), \tag{2.2}$$

$$K_{2^k}(x) = \begin{cases} (2^k+1)/2 & \text{при} \quad x \in \Delta_0^{(k)}, \\ 2^{k-r-2} & \text{при} \quad x \in \Delta_{2^r}^{(k)}, \quad r = 0, 1, \ldots, k-1, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{2.3}$$

А для ядра Валле-Пуссена

$$V_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} D_i(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

справедливо следующее равенство

$$V_n(x) = 2K_{2n}(x) - K_n(x). \tag{2.4}$$

Лемма 1. *Для ядра Валле-Пуссена справедлива следующая оценка*

$$\|V_n\|_p \le Cn^{1-1/p}, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad p \ge 1.$$

Доказательство. В силу (2.4) достаточно доказать, что

$$\|K_n\|_p \le Cn^{1-1/p}.$$

Используя (2.1) и (2.3) легко проверить, что

$$\|K_{2^k}\|_p \le C2^{k(1-1/p)} \quad \text{и} \quad \|D_{2^k}\|_p \le C2^{k(1-1/p)}.$$

При $n = 2^{k_1} + n_1$, где $1 \le n_1 \le 2^{k_1}$, имеем в силу (2.2)

$$n\|K_n\|_p \le 2^{k_1}\|K_{2^{k_1}}\|_p + n_1\|D_{2^{k_1}}\|_p + n_1\|K_{n_1}\|_p,$$

поэтому

$$n\|K_n\|_p \le 2C2^{k_1}2^{k_1(1-1/p)} + n_1\|K_{n_1}\|_p.$$

Продолжая аналогичным образом, получим

$$n\|K_n\|_p \le 2C\left(2^{k_1(2-1/p)} + 2^{k_2(2-1/p)} + \dots\right),$$

где $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} \dots$. Из последнего равенства получим $\|K_n\|_p \le C_1 n^{1-1/p}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Существует последовательность чисел* $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\epsilon_n = \pm 1$ *такая, что для любого натурального числа* N *имеет место*

$$\left\|\sum_{n=0}^{N-1} \epsilon_n w_n(x)\right\|_{\infty} \le CN^{1/2}.$$

Доказательство. Аналогичные полиномы для тригонометрической системы (полиномы Рудина–Шапиро) хорошо известны (см. [11], стр. 153). В случае системы Уолша их существование доказывается так же, как и для тригонометрической системы.

Для функции $f(x)$ определим величину $\omega(f)$

$$\omega(f) = \lim_{\delta\to 0+} \sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)|.$$

Ясно, что условие $\omega(f) = 0$ эквивалентно равномерной непрерывности f.

Лемма 3. *Пусть q – полином по системе Уолша. Для любого $\epsilon > 0$ существует полином по системе Уолша p такой, что*

$$\|p\|_\infty \le \omega(q), \quad \|p\|_1 < \epsilon, \quad \omega(q+p) < \epsilon.$$

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, если учесть, что всякая кусочно-постоянная функция, имеющая разрывы только в двоично рациональных точках, есть полином по системе Уолша.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 2 существуют полиномы по системе Уолша

$$R_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon_k w_k(x), \quad \epsilon_k = \pm 1, \quad x \in [0,1],$$

которые удовлетворяют неравенствам

$$\|R_N\|_\infty \le C N^{1/2}, \tag{3.1}$$

где C – абсолютная константа. Для $s = \pm 1$ обозначим

$$\Lambda_s = \Lambda_s(N) = \left\{k : \widehat{R}_N(k) = s\right\},$$

а также

$$D_\Lambda = \sum_{k\in\Lambda} w_k.$$

Имеем

$$R_N = D_{\Lambda_{+1}} - D_{\Lambda_{-1}}.$$

Из неравенства (3.1) следует, что

$$\|R_N\|_1 \ge C_1 N^{1/2}. \tag{3.2}$$

Учитывая (3.1) и (3.2) легко видеть, что существуют две положительные константы c_1 и c_2 такие, что для каждого N

$$m\left\{x \in (0,1) : |R_N(x)| \ge c_1 N^{1/2}\right\} \ge c_2.$$

Значит, для одного из значений $s = \pm 1$ справедливо неравенство:

$$m\left\{x \in (0,1) : |D_{\Lambda_s(N)}(x)| \ge \frac{c_1}{2} N^{1/2}\right\} \ge c_2. \tag{3.3}$$

Согласно лемме 1 для ядра Валле-Пуссена справедлива оценка:

$$\|V_n\|_p \le Cn^{1-1/p}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Определим функцию

$$f_k = 2^{-k/2} w_{2^{k+1}} \left(V_{2^k} + s 2^{-2k} R_{2^k} \right),$$

где s выбрано так, чтобы выполнялось (3.3). Учитывая (3.1), имеем оценку

$$\|f_k\|_p \le 2^{-k/2} \left(\|V_{2^k}\|_p + 1 \right) \le C 2^{k(1/2-1/p)}. \tag{3.4}$$

Заметим, что f_k – полином по системе Уолша, в котором участвуют функции $w_{2^{k+1}}$,..., $w_{2^{k+2}-1}$ с положительными коэффициентами. Коэффициентом при $w_{2^{k+1}} w_l = w_{2^{k+1}+l}$ с $l \in \Lambda_s(2^{k+1})$ будет $2^{-k/2}(1 + 2^{-2k})$, который превосходит остальные коэффициенты.

Выберем монотонно возрастающую последовательность k_i так, чтобы каждый коэффициент при $f_{k_{i+1}}$ был меньше, чем наименьший коэффициент при f_{k_i}. Положим

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_{k_i}.$$

Из (3.4) следует, что $f \in L_p$ при всех $1 < p < 2$. Для удобно выбранных m_1 и m_2 имеем

$$G_{m_1}(f, \mathcal{W}) - G_{m_2}(f, \mathcal{W}) = 2^{-k_i/2} w_{2^{k_i+1}} (1 + 2^{-2k_i}) D_{\Lambda_s(2^{k_i})}$$

и из (3.3) получим

$$m\left\{ x : |G_{m_1}(f, \mathcal{W}) - G_{m_2}(f, \mathcal{W})| \ge \frac{c_1}{2} \right\} \ge c_2.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{G_m(f, \mathcal{W})\}$ не сходится по мере.

Доказательство теоремы 2. Используем обозначения теоремы 1. Имеем

$$R_N = D_{\Lambda_{+1}} - D_{\Lambda_{-1}}.$$

Выберем $s = \pm 1$ такое, чтобы выполнялось неравенство

$$|\Lambda_s| \ge |\Lambda_{-s}|.$$

Определим

$$f_k = a_k w_{2^k} \left(R_{2^k} + s 2^{-k} D_{2^k} \right), \quad a_k = \frac{2^{-k/2}}{k^2}.$$

Тогда, очевидно,

$$\|f_k\|_\infty \le a_k \left(\|R_{2^k}\|_\infty + 2^{-k}\|D_{2^k}\|_\infty\right) \le \frac{C}{k^2}. \tag{3.5}$$

Заметим, что f_k – полином по системе Уолша, в разложении которого участвуют $w_{2^k}, \ldots, w_{2^{k+1}-1}$. Коэффициентом при $w_{2^k} w_l = w_{2^k+l}$, $l \in \Lambda_s(2^k)$ будет $\pm a_k(1+2^{-k})$, а остальными коэффициентами будут $\pm a_k(1-2^{-k})$. Поэтому

$$\left|G_{2^{k-1}}(f_k)(0)\right| = 2^{k-1} a_k \left(1+2^{-k}\right) \ge \frac{2^{k/2}}{2k^2}, \tag{3.6}$$

Так как $G_{2^{k-1}}(f_k)$ – полином по системе Уолша степени не больше $2^{k+1}-1$, то он постоянен на интервале $\Delta_0^{(k+1)}$, следовательно,

$$\left\|G_{2^{k-1}}(f_k)\right\|_p \ge \left(\int_{\Delta_0^{(k+1)}} |G_{2^{k-1}}(f_k)(0)|^p dx\right)^{1/p} = \frac{1}{2^{(k+1)/p}} G_{2^{k-1}}(f_k)(0).$$

Из (3.6) получим

$$\left\|G_{2^{k-1}}(f_k)\right\|_p \ge C_1 \frac{2^{k/2-k/p}}{k^2}. \tag{3.7}$$

Построим последовательности чисел $\{k_i\}$ и полиномов $\{p_i\}$ индукцией по i. Пусть $k_1 = 1$, тогда согласно лемме 3 существует полином p_1, удовлетворяющий условиям

$$\|p_1\|_\infty \le \omega(f_{k_1}), \quad \|p_1\|_1 < 2^{-2k_1}, \quad \omega(f_{k_1} + p_1) < 2^{-2k_1}.$$

Для $i = 2, 3, \ldots$, если k_{i-1} и уже построены полиномы p_{i-1}, то выберем $k_i > k_{i-1}$ так, чтобы порядковые номера функций Уолша, участвующих в полиноме f_{k_i} были больше, чем у полинома

$$Q_{i-1} := \sum_{j=1}^{i-1} \left(f_{k_i} + p_i\right),$$

а модули коэффициентов у f_{k_i} были вдвое меньше, чем модули ненулевых коэффициентов у Q_{i-1}. Полином p_i определим с помощью леммы 3 так, чтобы

$$\|p_i\|_\infty \le \omega(Q_{i-1} + f_{k_i}), \quad \|p_i\|_1 < 2^{-2k_i}, \quad \omega(Q_{i-1} + f_{k_i} + p_i) < 2^{-2k_i},$$

т.е. (см. (3.5))

$$\|p_i\|_\infty \le C_1/k_{i-1}^2, \quad \|p_i\|_1 < 2^{-2k_i}, \quad \omega(Q_i) < 2^{-2k_i}. \tag{3.8}$$

Обозначим

$$f := \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{k_i} + p_i\right).$$

Согласно (3.5) и (3.8) ряд равномерно сходится, а из $\omega(Q_i) \to 0$ следует, что функция f непрерывна.

Пусть $2^{k_i} \le l < 2^{k_i+1}$ Оценим $\widehat{f}(l)$. Из построения последовательности $\{k_i\}$ следует

$$\hat{f}(l) = \hat{f_{k_i}}(l) + \hat{f}'(l),$$

где $f' = p_i + p_{i+1} + \dots$ Из (3.8) получим $\|f'\|_1 < 2^{-2k_i+1}$, поэтому

$$\left|\hat{f}'(l)\right| < 2^{-2k_i+1}. \tag{3.9}$$

Следовательно,

$$\hat{f}(l) = \pm a_k(1 \pm 2^{-k}) + \delta_l, \quad |\delta_l| < 2^{-2k_i+1}, \quad 2^{k_i} \le l < 2^{k_i+1}.$$

Аналогично (3.9) имеем, что

$$\left|\hat{f}(l)\right| = \left|\hat{f}'(l)\right| < 2^{-2k_i+1}, \quad 2^{k_i+1} \le l < 2^{k_{i+1}}.$$

Легко видеть, что

$$\min\left\{\left|\hat{f}(l)\right| : 2^{k_i} \le l < 2^{k_i+1}\right\} > \max\left\{\left|\hat{f}(l)\right| : 2^{k_i+1} \le l < 2^{k_{i+1}}\right\}$$

и

$$\max\left\{\left|\hat{f}(l)\right| : 2^{k_i} \le l < 2^{k_i+1}\right\} < \min\left\{\left|\hat{f}(l)\right| : \hat{f}(l) \ne 0, \quad 0 \le l < 2^{k_i}\right\}.$$

Поэтому для подходящим образом выбранных m_1 и m_2 имеем

$$G_{m_1}(f) - G_{m_2}(f) = G_{2^{k_i-1}}(f_{k_i}) + \sum \delta_l w_l,$$

где последняя сумма имеет 2^{k_i-1} слагаемых. Отсюда легко получить, что (см. (3.7))

$$\|G_{m_1}(f) - G_{m_2}(f)\|_p > C\frac{2^{k_i(1/2-1/p)}}{k_i^2} \to \infty \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Следовательно, $G_m(f)$ не сходится в L_p, $p > 2$.

Abstract. Convergence of the greedy algorithm in Walsh system in L_p, $p > 1$ is studied. It is proved that there exists a function in L_p, $1 < p < 2$, with greedy algorithm not converging in measure to that function. A continuous function with divergent in L_p, $p > 2$, greedy algorithm is constructed and sufficient conditions for convergence of the greedy algorithm in L_p, $p > 1$ are given.

Список литературы

[1] S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on Greedy Approximation in Banach Spaces", East J. on Approx. **5**, 1-15 (1999)

[2] T. W. Körner, "Divergence of Decreasing Rearranged Fourier Series", Ann. of Math. **144**, 167-180 (1996).

[3] T. W. Körner, "Decreasing Rearranged Fourier Series", J. Fourier Analysis and Applications **5**, 1-19 (1999).

[4] V. N. Temlyakov, "Nonlinear Methods of Approximation", Foundations of Computational Mathematics **3** (1), 33-107 (2003).

[5] V. N. Temlyakov and S.V. Konyagin, "Convergence of Greedy Approximation I. The Trigonometric System", Studia Math. **159** (2), 161-184, (2003).

[6] R. Gribonval, M. Nielsen, "On the Quasi-Greedy Property and Uniformly Bounded Orthonormal Systems", available at: http://www.math.auc.dk/research/reports/R-2003-09.pdf.

[7] M. Nielsen, "An Example of an Almost Greedy Uniformly Bounded Orthonormal Basis for $L_p(0,1)$", arXiv:math.FA/0611890 **1** (28) Nov. 2006.

[8] С. А. Епископосян, "О расходимости гриди алгоритма относительно обобщенной системы Уолша по норме L_1", Изв. НАН Армении, Математика **41** (2), 14-24 (2006).

[9] S. A. Episkoposian, "On the Divergence of Greedy Algorithms with Respect to Walsh Subsystems in L_1", Nonlinear Analysis **66** 1782-1787 (2007).

[10] Б. И. Голубов, "Ряды и преобразования Уолша", Наука, Москва, 1987.

[11] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, "Ортогональные ряды", Москва, 1984.