

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

А. А. ПЕТРОСЯН И Г. С. АКОПЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: ara.petrosyan@hotmail.com; gurgenh@ysu.am

Аннотация. В работе рассматривается задача, которая является некоторым обобщением псевдопараболических вариационных неравенств. Доказывается существование и единственность решения соответственной слабой задачи, а также регулярность полученного решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть V – банахово пространство, $K \subset V$ – непустое, замкнутое, выпуклое подмножество V . Для заданного оператора $A : V \rightarrow V'$ основная задача вариационных неравенств состоит в следующем: для заданного $f \in V'$ найти $u \in K$ такое, что для любого $v \in K$ справедливо неравенство

$$(1.1) \quad (Au, v - u) \geq (f, v - u).$$

Подобные неравенства возникают при изучении эллиптических и параболических начально-краевых задач со свободной границей (см. [1]–[4]). Эллиптические и параболические вариационные задачи для монотонных операторов исследованы многими авторами (см. [3]–[5]). В работах Ф. Е. Броудера и Г. Брезиса [6], Ж. Л. Лионса [1], Р. Е. Шовалтера и Т. В. Тинга [2, 7] и других авторов (см. библиографию в работе [8]) исследованы эллиптические и параболические неравенства для псевдомонотонных операторов и доказаны теоремы о существовании, единственности и регулярности их решений. Начально-краевые задачи для нелинейных псевдопараболических операторов исследованы в работах [7]–[11]. В работе Марии Пташник [8] исследованы вариационные неравенства для одного класса псевдопараболических операторов, где доказаны теоремы о существовании и единственности их решения.

В настоящей работе исследуются вариационные неравенства типа (1.1) для некоторого класса операторов, включающего псевдомонотонные операторы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задано рефлексивное банахово пространство V , а $K \subset V$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество. Пусть, далее $D(A)$ – всюду плотное линейное многообразие в V , а A – оператор такой, что $A : D(A) \rightarrow V'$ и $f \in V'$. Дадим следующие определения.

Определение 1. Семейство операторов $\{G(s) : s \geq 0\}$ называется линейной полугруппой, определенной на банаховом пространстве V , если $G(s) : V \rightarrow V$ является линейным непрерывным оператором для всех $s \geq 0$ и имеет место

$$G(0) = I, \quad G(s+t) = G(s)G(t), \quad s, t \geq 0,$$

$$G(\cdot)x \in C([0, \infty), V), \quad x \in V.$$

Определение 2. Пусть $\{G(s) : s \geq 0\}$ – некоторая линейная полугруппа над банаховым пространством V и

$$D(B) = \left\{ x \in V : \exists \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{G(h)x - x}{h} \in V \right\}.$$

Генератором линейной полугруппы $G(s)$ называется оператор $B : D(B) \rightarrow V$ такой, что

$$Bx = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{G(h)x - x}{h}$$

(см. [2]).

Допустим, что оператор A можно представить в виде

$$(2.1) \quad A = L\Lambda + M,$$

и имеют место условия (i)–(vii):

- (i) Оператор $(-\Lambda)$ есть генератор для линейной полугруппы $G(s)$, определенной над пространством V , с областью определения $D(\Lambda)$.

Определяя оператор $\Lambda_h : V \rightarrow V$ по формуле

$$\Lambda_h \varphi = \frac{G(h) - I}{h} \varphi,$$

из определения 2 получим, что

$$(2.2) \quad -\Lambda \varphi = \lim_{h \rightarrow 0} (-\Lambda_h \varphi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I - G(h)}{h} \varphi, \quad \varphi \in D(\Lambda).$$

(ii) Справедливо следующее равенство:

$$(2.3) \quad D(A) = D(\Lambda).$$

(iii) Оператор

$$(2.4) \quad L : V \rightarrow V'$$

является непрерывным и ограниченным.

(iv) Для любого $\varphi, \psi \in K$

$$(2.5) \quad (L\Lambda_h(\varphi - \psi), \varphi - \psi) \leq (L\Lambda_h\varphi - L\Lambda_h\psi, \varphi - \psi).$$

(v) Для любого $\varphi \in K$

$$(2.6) \quad (L\Lambda_h\varphi, \varphi) \geq 0.$$

(vi) $M : V \rightarrow V'$ – псевдомонотонный оператор на K (см. [2]), т.е. он ограничен на K и из условий $u_n \rightharpoonup u$ в V ($u_n \in K$) и $\overline{\lim}(Mu_n, u_n - u) \leq 0$ вытекает, что

$$(2.7) \quad \underline{\lim}(Mu_n, u_n - v) \geq (Mu, u - v), \quad v \in V.$$

(vii) $M : V \rightarrow V'$ – коэрцетивный оператор на K (см. [2]), т.е. для некоторого $v_0 \in K$ справедливо

$$(2.8) \quad \frac{(Mv, v - v_0)}{\|v\|} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|v\| \rightarrow \infty.$$

Заметим, что операторы, удовлетворяющие условиям (2.5) и (2.6) являются монотонными. Из того, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Lambda_h\varphi = \Lambda\varphi, \quad \varphi \in D(\Lambda),$$

и из непрерывности оператора L следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} (L\Lambda_h\varphi, \psi) = (L\Lambda\varphi, \psi), \quad \varphi \in D(\Lambda), \quad \psi \in V.$$

Так что в условиях (2.5) и (2.6) переходя к пределу $h \rightarrow 0$, получим

$$(2.9) \quad (L\Lambda(\varphi - \psi), \varphi - \psi) \leq (L\Lambda\varphi - L\Lambda\psi, \varphi - \psi), \quad \varphi, \psi \in K \cap D(\Lambda),$$

$$(2.10) \quad (L\Lambda\varphi, \varphi) \geq 0, \quad \varphi \in K \cap D(\Lambda).$$

Сформулируем вариационную задачу, аналогичную (1.1) используя разложение (2.1):

$$(2.11) \quad \begin{cases} (L\Lambda u, v - u) + (Mu, v - u) \geq (f, v - u), & v \in K, \\ u \in K \cap D(\Lambda). \end{cases}$$

В классической теории эллиптических вариационных неравенств требуется, чтобы оператор A был псевдомонотонным и коэрцетивным (см. [1, 2]). В данной работе A разбит на две части: $A = L\Lambda + M$, причем псевдомонотонность и коэрцетивность требуются только для M . Разложение (2.1) получается при обобщении параболических вариационных неравенств. Классическая же параболическая задача в гильбертовом пространстве V

$$(2.12) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right) + (Mu, v - u) \geq (f, v - u), & v \in K, \\ u \in K \cap \left\{ u \in V : \frac{\partial u}{\partial t} \in V \right\}, \end{cases}$$

получается из (2.11) при (см. [1, 2])

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D(\Lambda) = \left\{ u \in V, \frac{\partial u}{\partial t} \in V \right\}, \quad (L\varphi, \psi) = (\varphi, \psi).$$

Предположим, что имеют место (2.2)–(2.8), а u есть решение задачи (2.11). В таком случае из условий (2.9) и (2.10) следует, что для всех $v \in K \cap D(\Lambda)$ справедливо

$$(2.13) \quad \begin{aligned} & (L\Lambda v, v - u) + (Mu, v - u) \\ & \geq (L\Lambda(v - u), v - u) + (L\Lambda u, v - u) + (Mu, v - u) \\ & \geq (L\Lambda u, v - u) + (Mu, v - u) \geq (f, v - u). \end{aligned}$$

Как видно из (2.13) решение задачи (2.11) является решением и для следующей задачи

$$(2.14) \quad \begin{cases} (L\Lambda v, v - u) + (Mu, v - u) \geq (f, v - u), & v \in K \cap D(\Lambda), \\ u \in K. \end{cases}$$

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Вариационные задачи (2.11) и (2.14) назовем соответственно сильной и слабой, а их решения соответственно сильным и слабым.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СЛАБОЙ ЗАДАЧИ

Введем условие согласования (см. [1]): для всех $v \in K$ существует такая последовательность $v_j \in K \cap D(\Lambda)$ (которую назовем регулирующей последовательностью), для которой

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v_j = v \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} (L\Lambda v_j, v_j - v) \leq 0.$$

Теорема 1. Пусть имеют место (2.2)–(2.8) с некоторым $v_0 \in K \cap D(\Lambda)$ в условии коэрцитивности и условие согласования. Тогда для любого $f \in V'$ существует решение $u \in K$ вариационного неравенства (2.14).

Доказательство. Сперва докажем, что существует решение $u_h \in K$, которое является решением для вариационного неравенства

$$(3.1) \quad (L\Lambda_h u_h, v - u_h) + (Mu_h, v - u_h) \geq (f, v - u_h), \quad v \in K.$$

Для этого определим семейство операторов $A_h : V \rightarrow V'$ по формуле $A_h = L\Lambda_h + M$ и перепишем вариационное неравенство (3.1) в следующей форме

$$(3.2) \quad (A_h u_h, v - u_h) \geq (f, v - u_h), \quad v \in K.$$

Из того, что оператор $L\Lambda_h$ ограниченный, слабо непрерывный и монотонный, следует, что $L\Lambda_h$ – псевдомонотонный (см. [1, 2]). По условию (2.7) оператор M тоже псевдомонотонный. И, следовательно, оператор A_h есть псевдомонотонный оператор в K (см. [2]).

Докажем коэрцитивность A_h . Для любого $v \in K$ справедлива следующая оценка

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & \frac{(L\Lambda_h v, v - v_0)}{\|v\|} \geq \frac{(L\Lambda_h(v - v_0), v - v_0)}{\|v\|} + \frac{(L\Lambda_h v_0, v - v_0)}{\|v\|} \\ & \geq 0 - \frac{\|L\Lambda_h v_0\|_{V'} \|v - v_0\|_V}{\|v\|_V} \longrightarrow -\|L\Lambda_h v_0\|_{V'} = \text{const} \quad \text{при} \quad \|v\| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из (3.3) и коэрцитивности оператора M получим, что A_h также коэрцитивен:

$$\frac{(A_h v, v - v_0)}{\|v\|} = \frac{(L\Lambda_h v, v - v_0)}{\|v\|} + \frac{(Mv, v - v_0)}{\|v\|} \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \|v\| \rightarrow \infty.$$

Следовательно, оператор A_h псевдомонотонен и коэрцитивен на множестве K . По основной теореме существования и решения эллиптических вариационных неравенств (см. [1], теорема 8.2), задача

$$(A_h u_h, v - u_h) \geq (f, v - u_h), \quad v \in K,$$

имеет решение $u_h \in K$, т.е. задача (3.1) разрешима.

Докажем теперь, что из решений u_h можно выделить такую последовательность, которая сходится к решению слабой задачи (2.14). Сперва покажем, что при $h \rightarrow 0$ решения u_h ограничены. Предположим обратное, что существует такая последовательность $h_k \rightarrow 0$, что $\|u_{h_k}\| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. В таком случае имеем

$$(A_{h_k} u_{h_k}, v - u_{h_k}) \geq (f, v - u_{h_k}), \quad v \in K,$$

откуда следует

$$\frac{(A_{h_k} u_{h_k}, u_{h_k} - v_0)}{\|u_{h_k}\|} \leq \frac{(f, u_{h_k} - v_0)}{\|u_{h_k}\|} \leq \frac{\|f\|_{V'} \|u_{h_k} - v_0\|_V}{\|u_{h_k}\|_V} \longrightarrow \|f\|_{V'}$$

при $k \rightarrow \infty$. А из коэрцитивности A_{h_k} следует

$$\frac{(A_{h_k} u_{h_k}, u_{h_k} - v_0)}{\|u_{h_k}\|} \longrightarrow +\infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

что и приводит к противоречию. Следовательно, при $h \rightarrow 0$ последовательность u_h ограничена. Так как оператор M ограничен, то последовательность Mu_h тоже ограничена в V' . Отсюда вытекает, что существует последовательность h_n такая, что $u_n = u_{h_n} \rightharpoonup u$ и $Mu_n \rightharpoonup \chi$ при $n \rightarrow \infty$. Для такой последовательности u_n и для всех $v \in K \cap D(\Lambda)$ справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & (L\Lambda_{h_n} v, v - u_n) + (Mu_n, v - u_n) - (f, v - u_n) \\ & \geq (L\Lambda_{h_n} (v - u_n), v - u_n) + (L\Lambda_{h_n} u_n, v - u_n) \\ (3.4) \quad & + (Mu_n, v - u_n) - (f, v - u_n) \geq 0. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} & |(L\Lambda_{h_n} v, v - u_n) - (L\Lambda v, v - u)| \\ & \leq |(L\Lambda_{h_n} v - L\Lambda v, v - u_n)| + |(L\Lambda v, u_n - u)| \\ & \leq \|L\Lambda_{h_n} v - L\Lambda v\|_{V'} \|v - u_n\|_V + |(L\Lambda v, u_n - u)| \\ & \leq C \|L\Lambda_{h_n} v - L\Lambda v\|_{V'} + |(L\Lambda v, u_n - u)| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, то, переходя к пределу в (3.4) при $n \rightarrow \infty$, получим для любого $v \in K \cap D(\Lambda)$

$$(3.5) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (Mu_n, u_n) \leq (L\Lambda v, v - u) + (\chi, v) - (f, v - u)$$

или

$$(3.6) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (Mu_n, u_n - u) \leq (L\Lambda v, v - u) + (\chi - f, v - u).$$

Условие согласования гарантирует существование регулирующей последовательности $v_j \in K \cap D(\Lambda)$, которая сходится к u . Переписав (3.6) для $v = v_j$, получим

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (Mu_n, u_n - u) \leq (L\Lambda v_j, v_j - u) + (\chi - f, v_j - u), \quad j = 1, 2, \dots,$$

откуда следует

$$(3.7) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (Mu_n, u_n - u) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\underbrace{(L\Lambda v_j, v_j - u)}_{\leq 0} + \underbrace{(\chi - f, v_j - u)}_{\rightarrow 0} \right) \leq 0.$$

Из (3.7) и псевдомонотонности M следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (Mu_n, u_n - v) &\geq (Mu, u - v), \quad v \in K, \\ (Mu, u - v) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (Mu_n, u_n - v) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (Mu_n, u_n - v) \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (Mu_n, u_n) - (\chi, v). \end{aligned}$$

С другой стороны, из (3.5) следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (Mu_n, u_n) - (\chi, v) \leq (L\Lambda v, v - u) - (f, v - u), \quad v \in K \cap D(\Lambda),$$

откуда и получается, что u является слабым решением вариационного неравенства. Теорема доказана.

Докажем теперь теорему о единственности слабого решения вариационного неравенства.

Теорема 2. *Предположим, что кроме условий теоремы 1, оператор M сильно монотонен, т.е. из того, что $(Mu - Mv, u - v) \leq 0$ следует $u = v$, тогда решение слабой задачи единственно.*

Доказательство. Предположим, что имеются два слабых решения u_1 и u_2 , т.е. для всех $v \in K \cap D(\Lambda)$ имеет место

$$(3.8) \quad (L\Lambda v, v - u_1) + (Mu_1, v - u_1) \geq (f, v - u_1),$$

$$(3.9) \quad (L\Lambda v, v - u_2) + (Mu_2, v - u_2) \geq (f, v - u_2).$$

Пусть $w = (u_1 + u_2)/2 \in K$, а w_j – регулирующая последовательность, т.е. $w_j \rightarrow w$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда положив $v = w_j$ в неравенствах (3.8) и (3.9) и просуммировав их друг с другом, получим

$$(L\Lambda w_j, 2w_j - (u_1 + u_2)) + (Mu_1, w_j - u_1) + (Mu_2, w_j - u_2) \geq (f, 2w_j - (u_1 + u_2)).$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} [(Mu_1, u_1 - w_j) + (Mu_2, u_2 - w_j)] \\ &\leq 2 \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} [(L\Lambda w_j, w_j - w) - (f, w_j - w)] \leq 0, \end{aligned}$$

и

$$(Mu_1, u_1 - w) + (Mu_2, u_2 - w) \leq 0.$$

Подставив значение $w = (u_1 + u_2)/2$, получим

$$\frac{1}{2}(Mu_1, u_1 - u_2) + \frac{1}{2}(Mu_2, u_2 - u_1) \leq 0.$$

Следовательно, $(Mu_1, u_1 - u_2) - (Mu_2, u_1 - u_2) \leq 0$, поэтому имеем $(Mu_1 - Mu_2, u_1 - u_2) \leq 0$, и, значит, $u_1 = u_2$ поскольку M строго монотонна. Теорема 2 доказана.

Следует отметить, что если сильная задача имеет решение и условия теоремы 1 выполнены, то сильное решение тоже единственно.

4. РЕГУЛЯРНОСТЬ ЗАДАЧИ

В данной главе будут представлены условия, при которых слабое решение (2.14) является и сильным (2.11).

Лемма 1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 1, множество внутренних точек K непусто ($\text{int } K \neq \emptyset$) и решение u задачи (2.14) принадлежит $D(\Lambda)$. В таком случае слабое решение является сильным.*

Доказательство. Пусть $w \in K \cap D(\Lambda)$. Обозначим $v = (1 - \theta)u + \theta w$ ($0 \leq \theta \leq 1$). Из того, что множество K выпукло, а $D(\Lambda)$ есть линейное многообразие, следует, что $v \in K \cap D(\Lambda)$, и, следовательно, $(L\Lambda v, v - u) + (Mu, v - u) \geq (f, v - u)$. Итак,

$$\begin{aligned} & (L\Lambda((1 - \theta)u + \theta w), \theta(w - u)) + (Mu, \theta(w - u)) - (f, \theta(w - u)) \\ &= \theta [(L\Lambda((1 - \theta)u + \theta w), w - u) + (Mu, w - u) - (f, w - u)] \geq 0 \end{aligned}$$

и

$$(4.1) \quad (L\Lambda((1 - \theta)u + \theta w), w - u) + (Mu, w - u) \geq (f, w - u), \quad \theta \in [0, 1].$$

Переходя к пределу в (4.1) при $\theta \rightarrow 0$ и используя непрерывность L и линейность Λ , получим

$$(4.2) \quad (L\Lambda u, w - u) + (Mu, w - u) \geq (f, w - u), \quad w \in K \cap D(\Lambda).$$

$D(\Lambda)$ всюду плотно в V , следовательно,

$$\overline{K \cap D(\Lambda)} = \overline{\text{int } K \cap D(\Lambda)} = \overline{\text{int } K} = K.$$

Откуда получаем

$$(L\Lambda u, v - u) + (Mu, v - u) \geq (f, v - u), \quad v \in K,$$

т.е. u является сильным решением вариационной задачи. Доказательство завершено.

Докажем следующее утверждение о гладкости решений.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1, $V \subset V'$, множество внутренних точек K не пусто и имеют место следующие условия (a) – (e):

- (a) $f \in D(\Lambda)$,
- (b) $(Mu - Mv, u - v) \geq c\|u - v\|^2$, $u, v \in V$ (условие строгой монотонности M),
- (c) полу группу $G(s)$ можно продолжить на пространство V' , сохраняя ее свойства,
- (d) $G(s)(Mv) = M(G(s)v)$ и $G(s)(Lv) = L(G(s)v)$ для всех $v \in V$ и $s \geq 0$,
- (e) существует некоторое $\rho > 0$ такое, что $G(s)v + G^*(s)v - G^*(s)G(s)v + (\rho - 1)v$ принадлежит ρK для всех $v \in K$ и $s \geq 0$.

В таком случае слабое решение вариационной задачи является и сильным решением.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 было показано, что существует последовательность $u_h \in K$ такая, что $u_h \rightarrow u$ слабо, где u решение слабой задачи. Далее, было доказано, что

$$(4.3) \quad (L\Lambda_h u_h + Mu_h - f, v - u_h) \geq 0, \quad v \in K.$$

Умножив обе стороны (4.3) на $\rho > 0$, получим

$$(4.4) \quad (L\Lambda_h u_h + Mu_h - f, \rho v - \rho u_h) \geq 0, \quad v \in K.$$

Из условия (e) теоремы следует, что существует $v \in K$, для которого справедливо

$$G(s)u_h + G^*(s)u_h - G^*(s)G(s)u_h + (\rho - 1)u_h = \rho v,$$

следовательно,

$$(4.5) \quad \rho v = \rho u_h - (G^*(s) - I)(G(s) - I)u_h.$$

Подставляя значение v из (4.4) в вариационное неравенство (4.5), получим

$$(L\Lambda_h u_h + Mu_h - f, -(G^*(s) - I)(G(s) - I)u_h) \geq 0.$$

Откуда имеем

$$(4.6) \quad ((G(s) - I)(L\Lambda_h u_h + Mu_h - f), (G(s) - I)u_h) \leq 0,$$

$$(4.7) \quad \begin{aligned} & ((G(s) - I)(L\Lambda_h u_h), (G(s) - I)u_h) \\ & = (L\Lambda_h(G(s) - I)u_h, (G(s) - I)u_h) \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((G(s) - I)(Mu_h), (G(s) - I)u_h) = (M(G(s) - I)u_h, (G(s) - I)u_h) \\
(4.8) \quad & \geq c \|G(s)u_h - u_h\|^2.
\end{aligned}$$

Используя оценки (4.7) и (4.8) в неравенстве (4.6), получим

$$\begin{aligned}
c \|G(s)u_h - u_h\|_V^2 & \leq (G(s)f - f, G(s)u_h - u_h) \\
& \leq \|G(s)f - f\|_{V'} \|G(s)u_h - u_h\|_V
\end{aligned}$$

и

$$\left\| \frac{G(s)u_h - u_h}{s} \right\|_V \leq \frac{1}{c} \left\| \frac{G(s)f - f}{s} \right\|_{V'} \leq \text{const}, \quad s \geq 0, \quad h > 0,$$

так как $f \in D(\Lambda)$. Следовательно,

$$\left\| \frac{G(s)u - u}{s} \right\|_V \leq \text{const}, \quad s \geq 0.$$

Отсюда и из определения $D(\Lambda)$ видно, что слабое решение u также принадлежит $D(\Lambda)$, а из леммы (4.1) следует, что u является также и сильным решением задачи. Доказательство завершено.

Заметим, что при выполнении условия (b) теоремы 3, решение задачи будет также и единственным, так как из строгой монотонности вытекает сильная монотонность операторам M .

Abstract. The paper studies a generalization of the pseudoparabolic variational inequalities. The existence and uniqueness of the solution of the corresponding weak problem and the regularity of the obtained solution are proved.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж. Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач* (Мир, Москва, 1972).
- [2] R. E. Showalter, *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, **49** (1997).
- [3] А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, (Наука, Москва, 1988).
- [4] Д. Киндерлер, Г. Стампахья, *Введение в вариационные неравенства и приложения*, (Мир, Москва, 1983).
- [5] L. C. Evans, *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, **19** (1998).
- [6] F. E. Browder, H. Brezis, "Strongly Nonlinear Parabolic Variational Inequalities," Proc. Acad. Sci. USA, **77** (2), 713-715 (1980).
- [7] R. E. Showalter, T. W. Ting, "Pseudoparabolic Partial Differential Equations," SIAM Journal on Mathematical Analysis, **1** (1), 1-16, (1970).
- [8] М. Ptashnyk, *Nonlinear Pseudoparabolic Equations and Variational Inequalities* (University of Heidelberg, Department of Mathematics and Informatics, 2004).

- [9] Х. Гаевский, К. Гредер, К. Захарис, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения* (Мир, Москва, 1978).
- [10] Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбабян, “Смешанная задача для нелинейных вырождающихся систем типа Соболева,” Изв. НАН Армении, Математика **30** (1), 17-32 (1995).
- [11] М. Пташник, “Некоторые псевдопараболические вариационные неравенства с производными высшего порядка,” Укр. мат. журнал, **54** (1), 112-125 (2002).

Поступила 7 ноября 2007