Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 2, 2008, стр. 48-52

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Г. Г. СААКЯН

Арцахский Государственный Университет, Степанакерт, НКР
E-mail: *ter_saak_george@mail.ru*

Аннотация. С использованием теоремы о сравнении для систем однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка доказывается теорема об осцилляции компонент собственных вектор-функций одной краевой задачи для канонической одномерной системы Дирака.

Рассматривается следующая краевая задача для канонической системы Дирака (см., например, [1])

$$\begin{cases} y_2' + p(t)y_1 = \lambda y_1, \\ -y_1' + r(t)y_2 = \lambda y_2, \end{cases} \tag{1}$$

$$y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha = 0, \tag{2}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0, \tag{3}$$

где $p(t)$ и $r(t)$ – действительные функции, определенные и непрерывные на интервале $[0,\pi]$, т.е. $p, r \in C_R[0,\pi]$, α и β – произвольные действительные числа, λ – параметр.

Если при некотором λ_0 краевая задача (1), (2), (3) имеет нетривиальное решение

$$\bar{\mathrm{y}}(t,\lambda_0) = \begin{pmatrix} y_1(t,\lambda_0) \\ y_2(t,\lambda_0), \end{pmatrix}$$

то число λ_0 называется *собственным значением*, а соответствующее решение $\bar{\mathrm{y}}(t,\lambda_0)$ – *собственной вектор-функцией* задачи.

Известно (см. [1], стр. 237), что собственные значения краевой задачи (1), (2), (3) действительны и для них верна следующая асимптотическая формула

$$\lambda_{\pm n} = \frac{\vartheta}{\pi} \pm n + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4}$$

где число ϑ определяется формулой

$$\vartheta = \beta - \alpha - \frac{1}{2}\int_0^\pi \big\{p(\tau) + r(\tau)\big\}d\tau.$$

Известно также, что нули компонент собственных вектор-функций – простые и, следовательно, их можно пронумеровать в порядке возрастания.

Теория Штурма об осцилляционных свойствах решений уравнения Штурма–Лиувилля давно известна и до сих пор публикуются работы, обобщающие результаты Штурма (см., например, [2]–[4]). Однако, осцилляционные свойства решений системы Дирака мало изучены. Если уравнение Штурма–Лиувилля свести к краевой задаче для нормальной системы второго порядка, то спектральный параметр переходит в краевые условия. Для таких систем осцилляционные свойства решений изучались (см., например [5]).

Цель настоящей статьи – изучить задачу (1), (2), (3), используя теоремы 1 и 2 работы [6]. Сравниваются следующие системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' + p_i(t)y_2 = 0, \\ y_2' + r_i(t)y_1 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где p_i, $r_i \in C_R[0,\pi]$ $(i = 1, 2)$.

Теорема 1. (О сравнении) *Пусть*

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$$

– нетривиальные решения системы (5) *при* $i = 1$ *и* $i = 2$ *соответственно, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям*

$$u_1(a) = v_1(a) \quad \text{и} \quad u_2(a) = v_2(a),$$

и пусть

$$\begin{aligned} &p_1(t)p_2(t) > 0, \qquad r_1(t)r_2(t) > 0, \\ &p_i(t)r_i(t) < 0, \qquad (i = 1, 2), \\ &\big|p_2(t)\big| \geq \big|p_1(t)\big|, \qquad \big|r_2(t)\big| \geq \big|r_1(t)\big|. \end{aligned}$$

Тогда, если одна из компонент $\bar{u}(t)$ *имеет* ℓ *нулей на отрезке* $[a, b]$, *то одна из компонент* $\bar{v}(t)$ *имеет на том же отрезке не менее* ℓ *нулей, причем* k*-ый нуль этой компоненты* $\bar{v}(t)$ *не больше* k*-ого нуля компоненты* $\bar{u}(t)$.

Теорема 2. (О перемежаемости нулей) *Если в системе* (5) $p_i(t)r_i(t) \neq 0$, $t \in [a, b]$, *то между всякими соседними нулями одной из компонент всякого нетривиального решения системы* (5) *находится ровно один нуль другой компоненты того же решения.*

Рассмотрим теперь задачу (1), (2), (3). Справедлива

Теорема 3. *Для любого натурального числа n существует число μ_n такое, что если собственное значение задачи* (1), (2), (3) *удовлетворяет неравенству $|\lambda| \geq \mu_n$, то каждая из компонент собственной вектор-функции задачи* (1), (2), (3) *имеет на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере n нулей.*

Доказательство: Запишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} y_1' + (\lambda - r(t))y_2 = 0, \\ y_2' + (p(t) - \lambda)y_1 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Для заданного натурального числа n выберем натуральное число s так, чтобы имело место неравенство $s \geq n + 1$. Затем подберем пару натуральных чисел m и k так, чтобы $s = mk$. Поскольку функции $p(t)$ и $r(t)$ непрерывны на отрезке $[0, \pi]$, то они будут ограничены, т.е. найдутся числа p_0, p_1, r_0 и r_1 такие, что $p_0 \leq p(t) \leq p_1$ и $r_0 \leq r(t) \leq r_1$. Далее, в соответствии с формулой (4) выберем λ_n – собственное значение задачи (1), (2), (3) так, чтобы оно удовлетворяло соотношению

$$\lambda_n \geq \max\left\{r_1 + m^2,\, p_1 + k^2\right\}. \tag{7}$$

Сравним теперь систему (6) с системой

$$\begin{cases} y_1' + m^2 y_2 = 0, \\ y_2' - k^2 y_1 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Если принять

$$p_1(t) = m^2, \quad r_1(t) = -k^2, \quad p_2(t) = \lambda_n - r(t) \quad \text{и} \quad r_2 = p(t) - \lambda_n,$$

то, учитывая (7), будем иметь

$$p_i(t) > 0, \quad r_i(t) < 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{и} \quad \left|p_2(t)\right| \geq \left|p_1(t)\right|, \quad \left|r_2(t)\right| \geq \left|r_1(t)\right|.$$

Далее, известно (см., например, [7]), что общее решение

$$\bar{\mathrm{u}}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

системы (8) можно записать в виде

$$u_1(t) = A\cos(mkt + \varphi),$$
$$u_2(t) = \frac{Ak}{m}\sin(mkt + \varphi),$$

где A и φ – произвольные постоянные.

Предположим теперь, что

$$\bar{\mathrm{v}}(t, \lambda_n) = \begin{pmatrix} v_1(t, \lambda_n) \\ v_2(t, \lambda_n) \end{pmatrix}$$

– соответствующая собственному значению λ_n собственная вектор-функция задачи (1), (2), (3), и, следовательно, $\bar{\mathrm{v}}(t, \lambda_n)$ собственная вектор-функция задачи (6), (2), (3). Пусть

$$v_1(0, \lambda_n) = y_{10}, \quad v_2(0, \lambda_n) = y_{20}.$$

Очевидно, что можно подобрать значения A и φ так, чтобы для соответствующего им частного решения $\bar{\mathrm{u}}(t)$ системы (8) имело бы место условие

$$u_1(0) = y_{10}, \quad u_2(0) = y_{20}.$$

Заметим теперь, что для систем (8) и (6) и соответствующих им решений $\bar{\mathrm{u}}(t)$ и $\bar{\mathrm{v}}(t, \lambda_n)$ имеют место условия теоремы 1. Так как компоненты решения $\bar{\mathrm{u}}(t)$ имеют на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере $\left[\frac{\pi m k}{\pi}\right] = s > n$ нулей, то, применив теорему 1, получим, что одна из компонент собственной вектор-функции $\bar{\mathrm{v}}(t, \lambda_n)$ будет иметь на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере $n + 1$ нулей. Тогда, согласно теореме 2, другая компонента этой же собственной вектор-функции будет иметь на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере n нулей. Очевидно, что при $\lambda \geq \lambda_n$ число нулей может только увеличиваться.

Выберем теперь λ'_n – собственное значение задачи (1), (2), (3) так, чтобы оно удовлетворяло соотношению

$$\lambda'_n \leq \min\left\{r_0 - m^2,\, p_0 - k^2\right\}.$$

Примем

$$p_1(t) = -m^2, \quad r_1(t) = k^2, \quad p_2(t) = \lambda_n\prime - r(t) \quad \text{и} \quad r_2 = p(t) + \lambda'_n.$$

Сравним тепепь систему (6) с системой

$$\begin{cases} y'_1 - m^2 y_2 = 0, \\ y'_2 + k^2 y_1 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что при этом будем иметь

$$p_i(t) < 0, \quad r_i(t) > 0 \quad (i = 1, 2),$$

причем

$$\left|p_2(t)\right| \geq \left|p_1(t)\right| \quad \text{и} \quad \left|r_2(t)\right| \geq \left|r_1(t)\right|.$$

Вновь воспользовавившись теоремами 1 и 2 и учитывая то, что компоненеты решения системы (9) будут иметь на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере $n + 1$ нулей, получим, что каждая из компонент собственной вектор-функции задачи (1), (2),

(3) будет иметь на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере n нулей. При $\lambda \leq \lambda'_n$ число нулей может только увеличиваться. Очевидно, что для завершения доказательства теоремы достаточно принять

$$\mu_n = max\{|\lambda_n|, |\lambda'_n|\}.$$

Теорема доказана.

Abstract. A theorem is proved on oscillation of the components of the eigenvector functions of a boundary value problem for the canonical one-dimensional Dirac system.

Список литературы

[1] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака* (Наука, Москва, 1988).

[2] D. Hinton, "Sturm's 1836 Oscillation Results. Evolution of the Theory," pp. , 1-27 in: Sturm-Liouville Theory: Past and Present (Birkhäuser, Basel, 2005).

[3] B. Simon, "Sturm Oscillation and Comparison Theorems," pp. 29-43 in: Sturm-Liouville Theory: Past and Present (Birkhäuser, Basel, 2005).

[4] H. Krüger and G. Teschl, "Relative Oscillation Theory, Weighted Zeros of the Wronskian, and the Spectral Shift Function," Arxiv Math/0703574v1 [math.SP], 20 mar 2007.

[5] Е. В. Фолиадова, "Теорема об осцилляции для системы Дирака с параметром в краевом условии," стр. 111-122: Функциональный анализ. Спектральная теория. Межвузовский сборник научных трудов (Ульяновск, 1984).

[6] Г. Г. Саакян, "О некоторых свойствах решений канонической системы Дирака," Ученые записки АрГУ, (2) 3-11 (2007).

[7] Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения* **1** (ИЛ, Москва, 1953).

Поступила 26 ноября 2007