ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ВНЕ ЭЛЛИПСА

А. Я. СААКЯН

Институт математики, НАН Армении
E-mail: *artak1982b@yahoo.com*

Аннотация. В настоящей статье рассматривается задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка вне эллипса. Не ставятся ограничения на кратность корней характеристического уравнения.

Пусть область $D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1 \right\}$ – внешность эллипса,
 $\Gamma = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ – его граница, $\bar{D} = D \cup \Gamma$ – замыкание D . Рассмотрим задачу

$$(1) \quad \sum_{k=0}^4 A_k \frac{\partial^4 u(z)}{\partial y^k \partial x^{4-k}} = 0, \quad z \in D,$$

$$(2) \quad u(z) = f_0(z), \quad \frac{\partial u(z)}{\partial n} = f_1(z), \quad z \in \Gamma,$$

$$(3) \quad |u(z)| \leq C,$$

где $z = x + iy$, $\frac{\partial u(z)}{\partial n}$ – производная $u(z)$ по направлению внешней нормали к Γ в точке $z \in \Gamma$, A_k – комплексные постоянные, C – положительная постоянная. Требуется, чтобы f_0 , f_1 и $\partial f_0 / \partial s$ были из класса Гельдера ($\partial / \partial s$ – производная по дуговой абсциссе s контура Γ). Относительно u требуется, чтобы

$$\frac{\partial u(z)}{\partial x} \in C(\bar{D}) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(z)}{\partial y} \in C(\bar{D}).$$

Задача (1)-(3) при $f_0 \equiv f_1 \equiv 0$ называется однородной.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – корни характеристического уравнения

$$(4) \quad A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda^3 + A_4 \lambda^4 = 0.$$

Уравнение (1) называется эллиптическим, если $\text{Im } \lambda_j \neq 0$, $j = 1, 2, 3, 4$. Если $\text{Im } \lambda_1 > 0$, $\text{Im } \lambda_2 > 0$, $\text{Im } \lambda_3 < 0$, $\text{Im } \lambda_4 < 0$, то уравнение (1) называется правильно эллиптическим.

В работе предполагается, что уравнение (1) – правильно эллиптическое. Задача, где условие (3) заменяется на условие $|u(z)| \leq c|z|$, была рассмотрена в [1]. При этом предполагалось также, что характеристическое уравнение имеет только простые корни. В настоящей работе не ставится ограничение на кратность корней характеристического уравнения.

Теорема 1. *В области D однородная задача (1)-(3) имеет только нулевое решение, а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи в D необходимо и достаточно, чтобы $f_0(z)$ и $f_1(z)$ удовлетворяли условиям*

$$(5) \quad \int_{\Gamma} \frac{f_1(t)}{t} dt = 0, \quad \int_{\Gamma} (f_0(t) + f_1(t)) dt = 0, \quad \int_{\Gamma} \frac{f_0(t) + f_1(t)}{t^2} dt = 0.$$

Доказательство. Предположим сначала, что область D – внешность единичного круга, т.е. $D = \{z : |z| > 1\}$, а $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$, где $z = x + iy$. Рассмотрим следующий случай

$$(6) \quad \text{а) } \lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda, \quad \text{Im } \lambda > 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 =: \mu, \quad \text{Im } \mu < 0.$$

Обозначим

$$\mu_1 = \frac{i - \lambda}{i + \lambda} \quad \text{и} \quad \mu_2 = \frac{i + \mu}{i - \mu}$$

Из (6) следует, что $|\mu_j| < 1$, $j = 1, 2$. Формула общего решения уравнения высшего порядка типа (1) при условии (3) получена в [3]. В рассматриваемом случае это представление имеет вид

$$(7) \quad u(z) = \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + (1 - z \bar{z})\varphi_2(z + \mu_1 \bar{z}) + \varphi_3(\bar{z} + \mu_2 z) + (1 - z \bar{z})\varphi_4(\bar{z} + \mu_2 z) + c_0,$$

где c_0 – произвольная комплексная постоянная, φ_1 и φ_2 – произвольные функции, аналитические в $D_1(\mu_1) = \{z + \mu_1 \bar{z} : |z| > 1\}$, а φ_3 и φ_4 – произвольные функции, аналитические в $D_2(\mu_2) = \{\bar{z} + \mu_2 z : |z| > 1\}$, которые удовлетворяют оценкам

$$(8) \quad |\varphi_1(z)| \leq \frac{c}{|z|}, \quad |\varphi_2(z)| \leq \frac{c}{|z|^2}, \quad |\varphi_3(z)| \leq \frac{c}{|z|}, \quad |\varphi_4(z)| \leq \frac{c}{|z|^2},$$

где c – произвольная положительная постоянная, зависящая от u .

Подставляя (7) в (2) и, учитывая, что $\bar{z} = 1/z$ при $z \in \Gamma$, получим

$$(9) \quad \left[\varphi_3 \left(\frac{1}{z} + \mu_2 z \right) + c \right] - \left[-\varphi_1 \left(z + \frac{\mu_1}{z} \right) \right] = f_0(z), \quad z \in \Gamma,$$

$$\left[\varphi_3' \left(\frac{1}{z} + \mu_2 z \right) - 2\varphi_4 \left(\frac{1}{z} + \mu_2 z \right) \right]$$

$$(10) \quad - \left[-2\varphi_2 \left(z + \frac{\mu_1}{z} \right) - \varphi_1' \left(z + \frac{\mu_1}{z} \right) \left(z + \frac{\mu_1}{z} \right) \right] = f_1(z), \quad z \in \Gamma.$$

В представлениях (9), (10) первые слагаемые аналитически продолжаются внутрь круга, а вторые слагаемые – вне круга. Таким образом, имеем задачу сопряжения, решая которую по формулам Сохоцкого-Племеля, получим (см. [2], стр. 135)

$$(11) \quad \varphi_3 \left(\frac{1}{z} + \mu_3 z \right) + c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_0(t)}{t-z} dt, \quad |z| < 1,$$

$$(12) \quad \varphi_1 \left(z + \frac{\mu_1}{z} \right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_0(t)}{t-z} dt, \quad |z| > 1,$$

$$(13) \quad \varphi_3' \left(\frac{1}{z} + \mu_2 z \right) \left(\frac{1}{z} + \mu_2 z \right) - 2\varphi_4 \left(\frac{1}{z} + \mu_2 z \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(t)}{t-z} dt, \quad |z| < 1,$$

$$(14) \quad \varphi_1' \left(z + \frac{\mu_1}{z} \right) \left(z + \frac{\mu_1}{z} \right) - 2\varphi_2 \left(z + \frac{\mu_1}{z} \right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(t)}{t-z} dt, \quad |z| > 1.$$

Подставляя $\varphi_1 \left(z + \frac{\mu_1}{z} \right)$ и $\varphi_3 \left(\frac{1}{z} + \mu_3 z \right)$ из (11) и (12) в (13) и (14), получим

$$(15) \quad \varphi_2 \left(z + \frac{\mu_1}{z} \right) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(t)}{t-z} dt - \frac{1}{4\pi i} \frac{z(z^2 + \mu_1)}{z^2 - \mu_1} \int_{\Gamma} \frac{f_0(t)}{(t-z)^2} dt, \quad |z| > 1,$$

$$(16) \quad \varphi_4 \left(\frac{1}{z} + \mu_2 z \right) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(t)}{t-z} dt + \frac{1}{4\pi i} \frac{z(\mu_2 z^2 + 1)}{\mu_2 z^2 - 1} \int_{\Gamma} \frac{f_0(t)}{(t-z)^2} dt, \quad |z| < 1.$$

Из (11), (12), (15) и (16) следует, что аналитические функции $\varphi_j(z)$, $j = 1, 2, 3, 4$ удовлетворяют условиям (8) тогда и только тогда, когда

$$(17) \quad c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_0(t)}{t} dt$$

и выполняются условия (5). Таким образом, условия (5) необходимы для того, чтобы функция (7) являлась решением задачи (1)-(3). При выполнении этих условий функции (11) (12), (15) и (16) удовлетворяют условиям (8) и, следовательно, функция (7), где c_0 определяется из (17), является решением задачи (1)-(3). Итак, в случае а) теорема доказана.

Пусть теперь

(18)

$$б) \quad \operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \operatorname{Im} \lambda_3 < 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_4 < 0, \quad \lambda_3 \neq \lambda_4.$$

Обозначим

$$\mu_1 = \frac{i - \lambda_1}{i + \lambda_1}, \quad \mu_2 = \frac{i - \lambda_2}{i + \lambda_2}, \quad \mu_3 = \frac{i + \lambda_3}{i - \lambda_3}, \quad \mu_4 = \frac{i + \lambda_4}{i - \lambda_4}.$$

Из (18) следует, что $|\mu_j| < 1$, $j = 1, 2, 3, 4$, $\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_3 \neq \mu_4$. В этом случае общее решение уравнения (1) с дополнительным условием (3), определяется формулой (см. [3])

$$(19) \quad \begin{aligned} u(z) = & \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + \varphi_2(z + \mu_2 \bar{z}) + \varphi_3(\bar{z} + \mu_4 z) + \varphi_4(\bar{z} + \mu_4 z) \\ & + c_0 + c_1 \ln \frac{z + \mu_1 \bar{z}}{z + \mu_2 \bar{z}} + c_2 \ln \frac{\bar{z} + \mu_3 z}{\bar{z} + \mu_4 z}, \end{aligned}$$

где c_0, c_1, c_2 – произвольные комплексные постоянные,

$$\varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}), \quad \varphi_2(z + \mu_2 \bar{z}), \quad \varphi_3(\bar{z} + \mu_3 z) \quad \text{и} \quad \varphi_4(\bar{z} + \mu_4 z)$$

– произвольные функции, аналитические по соответствующим аргументам при $|z| > 1$ и удовлетворяющие оценкам

$$(20) \quad |\varphi_j(z)| \leq \frac{c}{|z|}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где c – произвольная положительная постоянная.

Если

$$\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_3 < 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_4 < 0, \quad \lambda_3 \neq \lambda_4,$$

то общее решение уравнения (1) с дополнительным условием (3), определяется формулой (см. [3])

$$(21) \quad \begin{aligned} u(z) = & \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}) + (1 - z \bar{z}) \varphi_2(z + \mu_2 \bar{z}) + \varphi_3(\bar{z} + \mu_3 z) + \varphi_4(\bar{z} + \mu_4 z) \\ & + c_0 + c_1 \ln \frac{\bar{z} + \mu_3}{\bar{z} + \mu_4}, \end{aligned}$$

где c_0 и c_1 – произвольные комплексные постоянные,

$$\mu_1 \equiv \mu_2 = \frac{i - \lambda}{i + \lambda}, \quad \mu_3 = \frac{i + \lambda_3}{i - \lambda_3}, \quad \mu_4 = \frac{i + \lambda_4}{i - \lambda_4},$$

а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ – произвольные аналитические функции в $D_1(\mu_1), D_1(\mu_2), D_2(\mu_3), D_2(\mu_4)$ соответственно, которые удовлетворяют оценкам

$$(22) \quad |\varphi_1(z)| \leq \frac{c}{|z|}, \quad |\varphi_2(z)| \leq \frac{c}{|z|^2}, \quad |\varphi_3(z)| \leq \frac{c}{|z|}, \quad |\varphi_4(z)| \leq \frac{c}{|z|},$$

где c – произвольная положительная постоянная.

Используя полученные общие решения (19) и (21), аналогично исследуем задачу для внешности эллипса. Делая замену $x = a\xi$, $y = b\eta$, мы приводим этот случай к случаю внешности круга. Теорема доказана.

Abstract. The present paper considers the Dirichlet problem for properly elliptic equations of fourth order in the exterior of an ellipse. No restrictions on the multiplicities of the roots of the characteristic polynomial are assumed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Е. Товмасян, “Внешняя задача Дирихле для эллиптических уравнений,” Изв. НАН Армении, Математика **35** (6), 10 (2000).
- [2] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, Москва, 1962).
- [3] А. Я. Саакян, “Общее решение правильно эллиптического уравнения высокого порядка вне круга,” ДАН Армении, Математика, (6), (2007).

Поступила 22 декабря 2006