

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $L^1(\rho)$

Г. М. АЙРАПЕТЯН И М. С. АЙРАПЕТЯН

Государственный Инженерный Университет Армении
E-mail: *hhairapet@seua.am; mushegh.h@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается граничная задача Гильберта в $L^1(\rho)$, где $\rho(t) = |1 - t|^\alpha$ и α – действительное число. При $\alpha > -1$ устанавливается, что однородная задача имеет $n + \kappa$ линейно независимых решений, если $n + \kappa \geq 0$, где $a(t)$ – коэффициент задачи, $\kappa = \text{ind } a(t)$, $n = [\alpha] + 1$, если α – нецелое число и $n = \alpha$, если α – целое. Условия, при которых задача разрешима, найдены при $\alpha > -1$ и $n + \kappa < 0$. При $\alpha \leq -1$ устанавливается, что количество линейно независимых решений однородной задачи зависит от поведения функции $a(t)$ в точке $t = 1$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Граничная задача Гильберта в весовых пространствах L^p ($p > 1$), когда весовая функция имеет особенности степенного порядка, исследована в работах Б. В. Хвеледзе [1], И. Ц. Гохберга и Н. Я. Крупника [2]. Задача, когда весовая функция $\rho(t)$ имеет конечное число особых точек, а порядки особенностей являются произвольными действительными числами, рассмотрена в работе К. Казаряна, И. Спитковского и Ф. Сория [3].

Отметим, что методы исследования указанных работ принципиально не применимы, когда граничная функция принадлежит весовому пространству $L^1(\rho)$. Это обусловлено тем, что интеграл типа Коши не ограничен в L^1 и $L^1(\rho)$.

В данной работе предложен один метод для исследования задачи Гильберта в единичном круге $D^+ = \{z, |z| < 1\}$ в пространстве $L^1(\rho)$, когда

$$\rho(t) = |1 - t|^\alpha, \quad t \in T = \{t : |t| = 1\},$$

где α – произвольное действительное число. Введем обозначения

$$n = \begin{cases} [\alpha] + 1 & \text{если } \alpha \text{ – нецелое,} \\ \alpha & \text{если } \alpha \text{ – целое,} \end{cases}$$

$$\rho_r(t) = \begin{cases} \rho(t) & \text{если } \alpha > -1, \\ |1 - rt|^n |1 - t|^{\alpha-n} & \text{если } \alpha \leq -1 \end{cases}$$

Под задачей Гильберта $L^1(\rho)$ понимается следующая граничная задача

Задача Н. *Определить аналитическую функцию $\Phi(z)$ ($\Phi(\infty) = 0$) вне единичной окружности T так, чтобы имело место граничное условие*

$$(1.1) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|\Phi^+(rt) - a(t)\Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho_r)} = 0,$$

где $\Phi^\pm(z)$ – сужения функции $\Phi(z)$ на D^+ и D^- соответственно, $f \in L^1(\rho)$, $a(t) \in C^\delta(T)$, $\delta > 0$ и $a(t) \neq 0$.

Обозначим $\kappa = \text{ind } a(t)|_T$. В данной статье установлено, что при $\alpha > -1$ однородная задача H имеет $n + \kappa$ линейно независимых решений, если $n + \kappa \geq 0$. В случае $n + \kappa < 0$ описаны необходимые и достаточные условия на f для того, чтобы задача H имела решение, а также установлено, что количество линейно независимых решений однородной задачи зависит от поведения функции $a(t)$ в точке $t = 1$.

Задача H в полуплоскости, когда ρ имеет единственную особенность в $z = \infty$, и порядок особенности неотрицателен, исследована в работах [4, 5].

Если Φ – функция, аналитическая в $D^+ \cup D^-$, то обозначим

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in D^+, \\ \Phi^-(z), & z \in D^-, \end{cases}$$

а через $C, C_1, \dots$ обозначим различные постоянные.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

1. Пусть $\kappa = \text{ind } a(t)|_T$, тогда функция a допускает представление (см. [6])

$$a(t) = S^+(t)(S^-(t))^{-1}, \quad t \in T,$$

где

$$S^+(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\ln t^{-\kappa} a(t)}{t - z} dt \right\}, \quad z \in D^+$$

$$S^-(z) = z^{-\kappa} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\ln t^{-\kappa} a(t)}{t - z} dt \right\}, \quad z \in D^-,$$

$S^\pm \in C^\delta(\overline{D^\pm})$ и $|S^-(z)| = O(|z|^{-\kappa})$ при $z \rightarrow \infty$.

Лемма 1. *Пусть $\alpha > -1$ и $\Phi(z)$ – решение задачи H при $f \in L^1(\rho)$. Тогда справедливы следующие утверждения*

(а) если $n + \kappa \geq 0$, то

$$(2.1) \quad \Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i(1-z)^n} \int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{S^+(t)(t-z)} dt + \frac{S(z)P(z)}{(1-z)^n},$$

где $P(z)$ – некоторый полином порядка $n + \kappa - 1$;

(б) если $n + \kappa < 0$, то $\Phi(z)$ представима в виде (2.1), где $P(z) \equiv 0$, а $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$(2.2) \quad \int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{S^+(t)} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n + \kappa) - 1.$$

Доказательство. Пусть $n + \kappa \geq 0$. Так как $\alpha - n \leq 0$, то из (1.1) получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T \left| \frac{\Phi^+(rt)(1-t)^n}{S^+(t)} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t)(1-t)^n}{S^-(t)} - \frac{f(t)(1-t)^n}{S^+(t)} \right| |dt| = 0.$$

Положив

$$\Psi_r^+(z) = \frac{\Phi^+(rz)(1-z)^n}{S^+(z)}, \quad \Psi_r^-(z) = \frac{\Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^n}{S^-(z)},$$

$$\Psi_r^+(t) - \Psi_r^-(t) = f_r(t), \quad t \in T,$$

получаем задачу Гильберта относительно функции $\Psi_r^\pm$, причем

$$|\Psi_r^-(z)| < C|z|^{n+\kappa-1}$$

в окрестности $z = \infty$. Поэтому

$$\Psi_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_r(t)}{t-z} dt + P_r(z),$$

где $P_r(z)$ – полином порядка $n + \kappa - 1$. Так как в L^1

$$\Psi_r(z) \rightarrow \Phi(z)(1-z)^n(S(z))^{-1} \quad \text{при } r \rightarrow 1-0$$

равномерно вне окружности T , а

$$f_r(t) \rightarrow f(t)(1-t)^n(S^+(t))^{-1} \quad \text{при } r \rightarrow 1-0,$$

то переходя к пределу, получаем (2.1). Утверждение (а) доказано.

Пусть теперь $n + \kappa < 0$. Тогда $P_r(z) \equiv 0$ и

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i(1-z)^n} \int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{S^+(t)(t-z)} dt.$$

Так как $S(z)(1-z)^{-n}$ имеет полюс порядка $-(n + \kappa)$ в бесконечности, то для того, чтобы имело место $\Phi(\infty) = 0$, необходимы условия (2.2).

Лемма 2. Пусть $\alpha \leq -1$, тогда в L^1

$$f(t)(1-rt)^n(S^+(t))^{-1} \rightarrow f(t)(1-t)^n(S^+(t))^{-1} \quad \text{при } r \rightarrow 1-0.$$

Доказательство. Так как функция $(S^+(t))^{-1}$ ограничена, то достаточно установить, что

$$f(t)(1-rt)^n \rightarrow f(t)(1-t)^n \quad \text{в } L^1.$$

Учитывая неравенство $|1-t| < 2|1-rt|$, получаем

$$|(1-rt)^n - (1-t)^n| \leq C \frac{(1-r)|1-t|^n}{|1-rt|}.$$

Из $f(t) \in L^1(\rho)$ следует, что $f(t) = g(t)|1-t|^{-\alpha}$, где $g(t) \in L^1$. Следовательно,

$$|f(t)(1-rt)^n - f(t)(1-t)^n| \leq \frac{C|g(t)|(1-r)}{|1-rt||1-t|^{-n+\alpha}}.$$

Так как

$$\frac{1-r}{|1-rt||1-t|^{-n+\alpha}} < 2 \frac{1-r}{|1-rt|},$$

то

$$|f(t)(1-rt)^n - f(t)(1-t)^n| < \frac{2C|g(t)|(1-r)}{|1-rt|}.$$

Учитывая, что функции $(1-r)|1-rt|^{-1}$ равномерно ограничены на T , $(1-r)|1-rt|^{-1} \rightarrow 0$ ($t \neq 1$) при $r \rightarrow 1-0$ и применяя теорему Лебега, получаем доказательство леммы.

Лемма 3. Пусть m – натуральное число, тогда справедливы следующие утверждения

- (а) $|(1-rt)^m - (1-r^{-1}t)^m| < C(1-r)|1-rt|^{m-1}$;
- (б) если m – нечетное число, то существует постоянная $c > 0$ такая, что при условии $|1-t| < c(1-r)$ имеет место

$$|(1-rt)^m - (1-r^{-1}t)^m| > (1-r)|1-t|^{m-1};$$

- (в) если m – четное число, то существует постоянная $c > 0$, такая, что при условии $m(1-r)^2 < |1-t| < c(1-r)$ имеет место

$$|(1-rt)^m - (1-r^{-1}t)^m| > (1-r)|1-t|^{m-1}.$$

Доказательство. Так как (см. [7])

$$\left| \frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m} \right| < C \frac{(1-r)((1-r)^{m-1} + |1-t|^{m-1})}{|1-rt|^{2m}},$$

то справедливость утверждения (а) следует из неравенств $1-r < |1-rt|$ и $|1-t| < 2|1-rt|$. Далее, имеем

$$|(1-rt)^m - (1-r^{-1}t)^m| = \frac{(1-r^2)}{r} \left| \sum_{k=0}^{m-1} (1-rt)^k (1-r^{-1}t)^{m-1-k} \right|$$

$$= \frac{(1-r^2)}{r} |1-t|^{m-1} \left| \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1-r}{1-t} + r \right)^k \left(1 - \frac{1-r}{1-t} \right)^{m-k-1} r^{-(m-1-k)} \right|.$$

Обозначив

$$\frac{1-r}{1-t} = u \quad \text{и} \quad P_r(u) = \frac{1+r}{r} \sum_{k=0}^{m-1} (-r)^{-(m-1-k)} (u+r)^k (u-1)^{m-1-k},$$

будем иметь

$$|(1-rt)^m - (1-r^{-1}t)^m| = (1-r)|1-t|^{m-1}|P_r(u)|.$$

Пусть m – нечетное число. Тогда

$$P_r(u) = A_1(r)u^{m-1} + A_2(r)u^{m-2} + \dots + A_m(r),$$

где

$$A_1(r) = r^{-(m-1)} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k r^k,$$

и $A_1(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow 1-0$. Так как числа $A_k(r)$, $k = 2, \dots, m$, равномерно ограничены, то

$$|P_r(u)| |u|^{-(m-1)} \rightarrow 1 \quad \text{когда} \quad |u| \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow 1.$$

Следовательно, существует $A > 0$ такое, что если $|u| > A$, то $|P_r(u)| > 1$. Обозначив $c = A^{-1}$, получаем доказательство утверждения (б). Если m – четное число, то $A_1(r) \rightarrow 0$, $A_2(r) \rightarrow m$ при $r \rightarrow 1-0$. Поэтому

$$|P_r(u) - A_1(r)u| |u|^{-(m-2)} \rightarrow m \quad \text{при} \quad |u| \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow 1.$$

Из условия леммы имеем $|A_1(r)||u| < 1$ и

$$|P_r(u)| |u|^{-(m-2)} > m-1$$

для достаточно больших $|u|$. Следовательно, для некоторого $A > 0$ при $|u| > A$ имеем $|P_r(u)| > 1$. Лемма доказана.

2. Функцию $a(t)$ отнесем к классу R^α ($a(t) \in R^\alpha$), если

$$(2.3) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho_r)} = 0.$$

К примеру, пусть

$$a(t) = \cos^{\gamma_1} \left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{\gamma_2} \right), \quad t \in T,$$

где γ_1 — произвольное целое число, а γ_2 — неотрицательное целое число. Имеем $\gamma_1 = \text{ind } a(t)$ и, если $\gamma_2 > -n - 1$, то $a(t) \in R^\alpha$. Действительно, пусть $\gamma_1 \geq 0$, тогда $S^+(z) \equiv 1$ и

$$S^-(z) = \cos^{-\gamma_1} \left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{z} \right)^{\gamma_2} \right),$$

$$|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| \leq C |(1 - r^{-1}t)^{\gamma_2} - (1 - t)^{\gamma_2}| \leq C(1 - r)|1 - rt|^{\gamma_2 - 1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| \rho_r(t) &\leq C(1 - r)|1 - rt|^{\gamma_2 - 1}|1 - rt|^n|1 - t|^{\alpha - n} \\ &= C(1 - r)|1 - rt|^{\gamma_2 + n}|1 - t|^{\alpha - n}. \end{aligned}$$

Так как $\gamma_2 + n > -1$, то $a(t) \in R^\alpha$. Аналогично устанавливается, что $a(t) \in R^\alpha$ при $\gamma_1 < 0$.

Лемма 4. Пусть $\alpha \leq -2$, $a(t) \in R^\alpha$,

$$P(z) = A_1(1 - z) + A_2(1 - z)^2 + \dots + A_{-n-1}(1 - z)^{-n-1} -$$

полином порядка $-n - 1$. Тогда, если

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|S^+(rt)P(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)P(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

то $P(z) \equiv 0$.

Доказательство. Так как

$$S^+(rt)P(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)P(r^{-1}t) = I_1(r, t) + I_2(r, t),$$

где

$$\begin{aligned} I_1(r, t) &= (S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)) P(rt), \\ I_2(r, t) &= a(t)S^-(r^{-1}t)(P(rt) - P(r^{-1}t)), \end{aligned}$$

то из условия леммы имеем $\|I_1(r, t)\|_{L^1(\rho)} \rightarrow 0$. Пусть $A_1 \neq 0$, тогда по лемме 3

$$|P(rt) - P(r^{-1}t)| > (1 - r),$$

при $|1 - t| < c(1 - r)$, где $c > 0$. Поэтому

$$\int_T |I_2(r, t)| \rho(t) |dt| \geq \int_{|1-t| < c(1-r)} \frac{(1 - r)|dt|}{|1 - rt|^{-n}|1 - t|^{n-\alpha}}.$$

Так как $|1 - rt| \approx 1 - r$ при $|1 - t| < c(1 - r)$, то

$$\int_T |I_2(r, t)| \rho(t) |dt| \geq (1 - r)^{n+1} \int_0^{c(1-r)} \frac{d\theta}{\theta^{n-\alpha}} = A(1 - r)^{2+\alpha},$$

где $A = c^{1+\alpha-n}(1 + \alpha - n)^{-1}$. Тем самым, лемма доказана при $A_1 \neq 0$.

Пусть $A_k \neq 0$, n – нечетное число и $A_1 = A_2 = \dots = A_{k-1} = 0$. Применяя снова лемму 3, получаем

$$|P(rt) - P(r^{-1}t)| > (1-r)|1-t|^{k-1} \quad \text{при} \quad |1-t| < c(1-r).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_T |I_2(r, t)| |\rho(t)| dt &\geq \int_{|1-t| < c(1-r)} \frac{(1-r)|1-t|^{k+\alpha-n-1}}{|1-rt|^{-n}} dt \\ &> (1-r)^{n+1} \int_0^{c(1-r)} \theta^{k+\alpha-n-1} d\theta = A(1-r)^{k+\alpha+1}, \end{aligned}$$

где $A = c^{k+\alpha-n}(k+\alpha-n)^{-1}$. Так как $k+\alpha+1 \leq 0$, то

$$(2.4) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T |I_2(r, t)| |\rho(t)| dt > 0.$$

Если n – четное число, то

$$\begin{aligned} \int_T |I_2(r, t)| |\rho(t)| dt &> (1-r)^{n+1} \int_{m(1-r)^2}^{c(1-r)} \theta^{k+\alpha-n-1} d\theta \\ &= (1-r)^{k+\alpha+1} (A - B(1-r)^{k+\alpha-n}), \end{aligned}$$

где

$$A = c^{k+\alpha-n}(k+\alpha-n)^{-1}, \quad B = m^{k+\alpha-n}(k+\alpha-n)^{-1}.$$

Так как $k+\alpha-n > 0$, то получаем (2.4).

Лемма 5. Пусть $\alpha \leq -1$, $k \geq -n$, тогда

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left\| S^+(rt)(1-rt)^k - a(t)S^-(r^{-1}t)(1-r^{-1}t)^k \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$S^+(rt)(1-rt)^k - a(t)S^-(r^{-1}t)(1-r^{-1}t)^k = I_1(r, t) + I_2(r, t),$$

где

$$\begin{aligned} I_1(r, t) &= (S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t))(1-rt)^k, \\ I_2(r, t) &= a(t)S^-(r^{-1}t) \left((1-rt)^k - (1-r^{-1}t)^k \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| < A(1-r)^\delta$, $\delta > 0$, получаем

$$\int_T |I_1(r, t)| |\rho_r(t)| dt \leq (1-r)^\delta \int_T \frac{|1-rt|^k |dt|}{|1-rt|^{-n} |1-t|^{n-\alpha}} \leq (1-r)^\delta \int_T \frac{|dt|}{|1-t|^{n-\alpha}}$$

и

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T |I_1(r, t)| |\rho_r(t)| dt = 0.$$

Далее, имеем $|(1 - rt)^k - (1 - r^{-1}t)^k| < (1 - r)|1 - t|^{k-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_T |I_2(r, t)| |\rho_r(t)| dt &\leq (1 - r) \int_T \frac{|1 - rt|^{k-1} |dt|}{|1 - rt|^{-n} |1 - t|^{n-\alpha}} \\ &\leq (1 - r) \int_T \frac{|dt|}{|1 - rt| |1 - t|^{n-\alpha}}. \end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к нулю при $r \rightarrow 1 - 0$. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $f \in L^1(\rho)$ и

$$(2.5) \quad K(f, z) = \frac{S(z)}{2\pi i(1 - z)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1 - \tau)^n d\tau}{S^+(\tau)(\tau - z)}, \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

тогда

$$\|K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} \leq C\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Доказательство. Из (2.5) имеем

$$K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t) = I_1(r, t) + I_2(r, t),$$

где

$$\begin{aligned} I_1(r, t) &= \frac{S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)}{2\pi i(1 - rt)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1 - \tau)^n d\tau}{S^+(\tau)(\tau - rt)}, \\ I_2(r, t) &= \frac{a(t)S^-(r^{-1}t)}{2\pi i} \left(\frac{1}{(1 - rt)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1 - \tau)^n d\tau}{S^+(\tau)(\tau - rt)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(1 - r^{-1}t)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1 - \tau)^n d\tau}{S^+(\tau)(\tau - r^{-1}t)} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| < A(1 - r)^\delta,$$

то

$$|I_1(r, t)| \leq \frac{A(1 - r)^\delta}{|1 - rt|^n} \int_T \frac{|f(\tau)| |1 - \tau|^n |d\tau|}{|\tau - rt|}.$$

Далее $I_2(r, t) = I_2^{(1)}(r, t) + I_2^{(2)}(r, t)$, где

$$\begin{aligned} I_2^{(1)}(r, t) &= \frac{a(t)S^-(r^{-1}t)}{2\pi i(1 - rt)^n} \int_T \frac{f(\tau)(1 - \tau)^n (1 - r^2)}{S^+(\tau)|\tau - rt|^2} |d\tau|, \\ I_2^{(2)}(r, t) &= \frac{a(t)S^-(r^{-1}t)}{2\pi i} \left(\frac{1}{(1 - rt)^n} - \frac{1}{(1 - r^{-1}t)^n} \right) \int_T \frac{f(\tau)(1 - \tau)^n}{S^+(\tau)(\tau - rt)} |d\tau|. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция $a(t)S^-(r^{-1}t)$ равномерно ограничена, когда r достаточно близко к 1, получаем

$$|I_2^{(1)}(r, t)| < \frac{M}{|1 - rt|^n} \int_T \frac{|f(\tau)| |1 - \tau|^n |1 - r^2|}{|\tau - rt|^2} |d\tau|$$

и

$$\left| I_2^{(2)}(r, t) \right| < M \left| \frac{1}{(1 - rt)^n} - \frac{1}{(1 - r^{-1}t)^n} \right| \int_T \frac{|f(\tau)| |1 - \tau|^n}{|\tau - rt|} |d\tau|.$$

Пусть теперь $\alpha > -1$. Тогда $n \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \|I_1(r, t)\|_{L^1(\rho_r)} &\leq A \int \frac{(1 - r)^\delta |1 - t|^\alpha}{|1 - rt|^n} \int_T \frac{|f(\tau)| |1 - \tau|^n}{|\tau - rt|} |d\tau| |dt| \\ &\leq A \int |f(\tau)| |1 - \tau|^\alpha |1 - \tau|^{n-\alpha} \int_T \frac{(1 - r)^\delta |dt|}{|1 - t|^{n-\alpha} |\tau - rt|} |d\tau|. \end{aligned}$$

Так как

$$\sup |1 - \tau|^\lambda \int_T \frac{(1 - r)^\delta |dt|}{|1 - t|^\lambda |\tau - rt|} < \infty, \quad r \in (0, 1), \quad \tau \in T,$$

то получаем $\|I_1(r, t)\|_{L^1(\rho_r)} < A \|f\|_{L^1(\rho)}$. Далее имеем

$$\left\| I_2^{(1)}(r, t) \right\|_{L^1(\rho_r)} \leq M \int |f(\tau)| |1 - \tau|^\alpha |1 - \tau|^{n-\alpha} \int_T \frac{(1 - r^2) |dt|}{|1 - t|^{n-\alpha} |\tau - rt|^2} |d\tau|.$$

Так как (см. [7])

$$\sup |1 - \tau|^\lambda \int_T \frac{(1 - r^2) |dt|}{|1 - t|^\lambda |\tau - rt|^2} < \infty, \quad r \in (0, 1), \quad \tau \in T,$$

то

$$\left\| I_2^{(1)}(r, t) \right\|_{L^1(\rho_r)} < M \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Учитывая неравенство (см. [7])

$$\left| \frac{1}{(1 - rt)^n} - \frac{1}{(1 - r^{-1}t)^n} \right| \leq \frac{A(1 - r^2)}{|1 - rt|^{n+1}},$$

получаем

$$\left\| I_2^{(2)}(r, t) \right\|_{L^1(\rho_r)} \leq A \int |f(\tau)| |1 - \tau|^\alpha |1 - \tau|^{n-\alpha} \int_T \frac{(1 - r^2) |dt|}{|1 - rt|^{1+n-\alpha} |\tau - rt|} |d\tau|.$$

Используя следующую оценку из [7]

$$\sup |1 - \tau|^\lambda \int_T \frac{(1 - r^2) |dt|}{|1 - rt|^{1+\lambda} |\tau - rt|^2} < \infty, \quad r \in (0, 1), \quad \tau \in T,$$

получаем

$$\left\| I_2^{(2)}(r, t) \right\|_{L^1(\rho_r)} \leq A \|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Тем самым при $\alpha > -1$ лемма доказана.

Пусть теперь $\alpha \leq -1$. Так как в этом случае $\rho_r(t) = |1 - rt|^n |1 - t|^{\alpha-n}$, то

$$\begin{aligned} \|I_1(r, t)\|_{L^1(\rho_r)} &\leq A \int |f(\tau)| |1 - \tau|^\alpha |1 - \tau|^{n-\alpha} \\ &\quad \times \int_T \frac{(1 - r)^\delta |dt|}{|1 - t|^{n-\alpha} |\tau - rt|} |d\tau| < A \|f\|_{L^1(\rho)}. \end{aligned}$$

Аналогично, в силу леммы 3

$$\begin{aligned}\left\|I_2^{(1)}(r, t)\right\|_{L^1(\rho_r)} &\leq A\|f\|_{L^1(\rho)}, \\ \left\|I_2^{(2)}(r, t)\right\|_{L^1(\rho_r)} &\leq A\|f\|_{L^1(\rho)}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ Н

1. Нам необходимо следующее утверждение

Лемма 7. Пусть $f \in L^1(\rho)$. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho_r)} = 0,$$

где функция $K(f, z)$ определяется формулой (2.5). Тем самым, если $n + \kappa \geq 0$, то функция $K(f, z)$ является решением задачи Н. Если $n + \kappa < 0$, то $K(f, z)$ будет решением задачи Н тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям (2.2)

Доказательство. Рассмотрим случай, когда функция $f \in L^1(\rho)$ обращается в нуль в окрестности точки $t = 1$. Пусть $f \equiv 0$ при $|1 - t| < \beta$, тогда функция

$$\Phi_1(z) = \int_T \frac{f(\tau)(1 - \tau)^n}{S^+(\tau)(\tau - z)} d\tau$$

аналитична в окрестности $|1 - z| < \beta$ точки $z = 1$. Поэтому

$$\Phi_1(z) = A_0 + A_1(z - 1) + \dots + A_k(z - 1)^k + \dots,$$

где

$$A_k = \frac{k!}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)(1 - \tau)^n}{S^+(\tau)(\tau - 1)^{k+1}}.$$

Ясно, что

$$|\Phi_1(rt) - \Phi_1(r^{-1}t)| < A(1 - r),$$

при $|1 - t| < \beta$, и поэтому

$$K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t) = I_1(r, t) + I_2(r, t),$$

где

$$\begin{aligned}I_1(r, t) &= \frac{S(rt)\Phi_1(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)\Phi_1(r^{-1}t)}{|1 - rt|^n}, \\ I_2(r, t) &= -a(t)S^-(r^{-1}t)\Phi_1(r^{-1}t) \left(\frac{1}{|1 - rt|^n} - \frac{1}{|1 - r^{-1}t|} \right).\end{aligned}$$

Так как

$$|S(rt)\Phi_1(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)\Phi_1(r^{-1}t)| < C(1 - r)^\delta,$$

где $\delta > 0$ и $|t - 1| < \beta$, то

$$\int_{T_\beta} |I_1(r, t)| |\rho(t)| dt \leq \int_{T_\beta} \frac{(1-r)^\delta |1-t|^\alpha}{|1-rt|^n} dt \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 1-0.$$

Далее, учитывая лемму 4 имеем

$$\left| (1-rt)^{-n} - (1-r^{-1}t)^{-n} \right| < C(1-r)|1-rt|^{-(n+1)},$$

поэтому

$$\int_{T_\beta} |I_2(r, t)| |\rho(t)| dt \leq C \int_{T_\beta} \frac{(1-r)|1-t|^\alpha}{|1-rt|^{n+1}} dt \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 1-0.$$

Тем самым,

$$\int_{T_\beta} |K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t)| |\rho(t)| dt \rightarrow 0.$$

Пусть теперь $t \in T \setminus T_\beta$. Так как $f(t)(1-t)^n \in L^1(T)$, то функция

$$\Phi_2(z) = \frac{S(z)}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n d\tau}{S^+(\tau)(\tau-z)}$$

удовлетворяет соотношению (см. [8])

$$\|\Phi_2^+(rt) - a(t)\Phi_2^-(r^{-1}t) - f(t)(1-t)^n\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

Учитывая, что

$$\left| (1-rt)^{-n} - (1-r^{-1}t)^{-n} \right| < A(1-r), \quad t \in T \setminus T_\beta,$$

получаем доказательство леммы, если $f \in L^1(\rho)$ обращается в нуль в окрестности точки $t = 1$.

Пусть теперь $f \in L^1(\rho)$ – произвольная функция. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем функцию f_ε так, чтобы она обращалась в нуль в окрестности $t = 1$, и имело место $\|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\rho)} < \varepsilon$. Учитывая лемму 6, будем иметь

$$\begin{aligned} & \|K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho_r)} \\ & \leq \|K^+(f - f_\varepsilon, rt) - a(t)K^-(f - f_\varepsilon, r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho_r)} \\ & \quad + \|K^+(f_\varepsilon, rt) - a(t)K^-(f_\varepsilon, r^{-1}t) - f_\varepsilon(t)\|_{L^1(\rho_r)} + \|f_\varepsilon - f\|_{L^1(\rho)} \\ & \leq C\|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\rho)} + \|K^+(f_\varepsilon, rt) - a(t)K^-(f_\varepsilon, r^{-1}t) - f_\varepsilon(t)\|_{L^1(\rho_r)}. \end{aligned}$$

Так как последнее слагаемое стремится к нулю при $r \rightarrow 1-0$, то лемма доказана.

2. Для однородной задачи H имеет место

Теорема 1. Пусть $\alpha > -1$, тогда справедливы следующие утверждения:

- (а) если $n + \kappa > 0$, то общее решение однородной задачи H можно представить в виде

$$\Phi_0(z) = S(z) \left(\sum_{k=1}^n A_k (1-z)^{-k} + \sum_{s=0}^{\kappa-1} B_s (1-z)^s \right),$$

при $\kappa > 0$ и

$$\Phi_0(z) = S(z) \sum_{s=-\kappa+1}^n A_s (1-z)^{-s},$$

при $\kappa \leq 0$;

- (б) если $n + \kappa \leq 0$, то однородная задача имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Положим

$$P(z) = \sum_{s=0}^{n-1} B_s (1-z)^s.$$

Так как

$$|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| < A(1-r)^\delta, \quad \delta > 0,$$

то

$$|S^+(rt)P(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)P(r^{-1}t)| < A(1-r)^\delta.$$

Поэтому

$$\|S^+(rt)P(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)P(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} \rightarrow 0.$$

Рассмотрим функции $\Phi_k(z) = S(z)(1-z)^{-k}$, где $k < n$ – натуральное число.

Используя оценку

$$\left| \frac{1}{(1-rt)^k} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^k} \right| < C \frac{1-r}{|1-rt|^{k+1}},$$

получаем

$$\begin{aligned} |\Phi_k^+(rt) - a(t)\Phi_k^-(r^{-1}t)| &\leq \frac{|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)|}{|1-rt|^k} \\ &+ |a(t)S^-(r^{-1}t)| \left| \frac{1}{(1-rt)^k} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^k} \right| \leq C \left(\frac{(1-r)^\delta}{|1-rt|^k} + \frac{(1-r)}{|1-rt|^{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\|\Phi_k^+(rt) - a(t)\Phi_k^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho)} \\ &\leq C \left(\int_T \frac{(1-r)^\delta |1-t|^\alpha}{|1-rt|^k} |dt| + \int_T \frac{(1-r)|1-t|^\alpha}{|1-rt|^{k+1}} |dt| \right) \\ &\leq C \left(\int_T \frac{(1-r)^\delta |1-t|^\alpha}{|1-rt|^n} |dt| + \int_T \frac{(1-r)|1-t|^\alpha}{|1-rt|^{n+1}} |dt| \right) \\ &\leq C \left((1-r)^\delta \int_T \frac{|dt|}{|1-rt|^{n-\alpha}} + \int_T \frac{(1-r)|dt|}{|1-rt|^{n+1-\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Так как, $n - \alpha < 1$ и $n + 1 - \alpha < 2$, то последнее выражение стремится к нулю при $r \rightarrow 1 - 0$.

3. Из теоремы 1 следует

Теорема 2. Пусть $\alpha > -1$, тогда справедливы следующие утверждения:

(а) если $n + \kappa \geq 0$, то общее решение задачи H можно представить в виде

$$(3.1) \quad \Phi(z) = K(f, z) + \Phi_0(z),$$

где $K(f, z)$ определяется формулой (2.5), а $\Phi_0(z)$ – общее решение однородной задачи H ;

(б) если $n + \kappa < 0$, то решение задачи H единственно и представимо в виде

$$(3.1), \text{ где } \Phi_0(z) \equiv 0, \text{ а } f \text{ удовлетворяет условиям (2.2).}$$

4. Рассмотрим случай $\alpha \leq -1$.

Теорема 3. Пусть $\alpha \leq -1$ и $a(t) \in R^\alpha$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) если $n + \kappa \geq 0$, то общее решение задачи H можно представить в виде

$$(3.2) \quad \Phi(z) = K(f, z) + S(z)P(z),$$

где

$$P(z) = A_0 + A_{-n}(1-z)^{-n} + \dots + A_{\kappa-1}(1-z)^{\kappa-1} -$$

полином порядка $\kappa - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами $A_0, A_{-n}, \dots, A_{\kappa-1}$.

(б) если $n + \kappa < 0$ и $\kappa > 0$, то общее решение задачи H представимо в виде

$$(3.3) \quad \Phi(z) = K(f, z) + A_0 S(z),$$

где A_0 – произвольное комплексное число, а $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$(3.4) \quad \int_T \frac{f(t)(1-t)^n t^k}{S^+(t)} dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(n + \kappa) - 1;$$

(в) если $n + \kappa < 0$ и $\kappa \leq 0$, то решение задачи H единственно, представимо в виде (3.3), где

$$(3.5) \quad A_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{S^+(t)t^{n+1}} dt,$$

а $f(t)$ удовлетворяет условиям (3.4) при $\kappa \neq -n - 1$.

Доказательство. Предположим, что $\Phi(z)$ есть решение задачи H при заданном $f \in L^1(\rho)$. Тогда из (1.1) имеем

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_T \left| \frac{\Phi^+(rt)(1-rt)^n}{S^+(t)} - \frac{\Phi^-(r^{-1}t)(1-rt)^n}{S^-(t)} - \frac{f(t)(1-rt)^n}{S^+(t)} \right| |dt| = 0.$$

Полагая

$$\Psi_r^+(z) = \frac{\Phi^+(rz)(1-rz)^n}{S^+(z)}, \quad \Psi_r^-(z) = \frac{\Phi^-(r^{-1}z)(1-rz)^n}{S^-(z)}$$

и

$$\Psi_r^+(t) - \Psi_r^-(t) = f_r(t), \quad t \in T,$$

получаем задачу Гильберта относительно функций $\Psi_r^\pm(z)$, где $\Psi_r^-(z)$ имеет полюс порядка $-n$ в точке r^{-1} , а в окрестности бесконечно удаленной точки имеет место неравенство $|\Psi_r^-(z)| < C|z|^{n+\kappa-1}$. Пусть

$$Q_r(z) = \frac{A_1(r)}{1-rz} + \dots + \frac{A_{-n}(r)}{(1-rz)^{-n}} -$$

главная часть разложения Лорана функции $\Psi_r^-(z)$ в окрестности точки r^{-1} . Тогда будем иметь

$$\Psi_r^+(t) - (\Psi_r^-(t) - Q_r(t)) = f_r(t) + Q_r(t).$$

Пусть теперь $n + \kappa \geq 0$. Тогда

$$\Psi_r(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f_r(t)}{t-z} dt + Q_r(z) + P_r(z),$$

где $P_r(z)$ — некоторый полином порядка $n + \kappa - 1$, если $n + \kappa > 0$, и $P_r(z) \equiv 0$, если $n + \kappa = 0$. Так как $\Psi_r(z) \rightarrow \Phi(z)(1-z)^n(S(z))^{-1}$ равномерно вне окружности T и по лемме 2

$$f_r(t) \rightarrow f(t)(1-t)^n(S^+(t))^{-1}$$

в L^1 , то

$$\Phi(z) = K(f, z) + \frac{S(z)(Q(z) + P(z))}{(1-z)^n} \quad \text{при } r \rightarrow 1,$$

где

$$Q(z) = \frac{C_1}{1-z} + \frac{C_2}{(1-z)^2} + \dots + \frac{C_{-n}}{(1-z)^{-n}},$$

$$P(z) = B_0 + B_1z + \dots + B_{\kappa+n-1}z^{n+\kappa-1}.$$

Ясно, что функция $(Q(z) + P(z))(1-z)^{-n}$ — полином порядка $\kappa - 1$, поэтому

$$(Q(z) + P(z))(1-z)^{-n} = P_1(z) + P_2(z),$$

где

$$P_1(z) = A_1(1-z) + \dots + A_{-n-1}(1-z)^{-n-1},$$

$$P_2(z) = A_0 + A_{-n}(1-z)^{-n} + \dots + A_{\kappa-1}(1-z)^{\kappa-1}.$$

Так как в силу леммы 7,

$$\|K^+(f, rt) - a(t)K^-(f, r^{-1}t) - f(t)\|_{L^1(\rho_r)} \rightarrow 0,$$

а по лемме 5 и условию теоремы

$$\|S^+(rt)P_2(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)P_2(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho_r)} \rightarrow 0,$$

то

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \|S^+(rt)P_1(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)P_1(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho_r)} = 0.$$

Применяя лемму 4, получаем $P_1(z) \equiv 0$. Тем самым, если $n + \kappa \geq 0$ и функция $\Phi(z)$ есть решение задачи H , то для этой функции получаем представление (3.2), где $A_0, A_{-n}, A_{-n+1}, \dots, A_{\kappa-1}$ — некоторые комплексные числа. Применяя снова леммы 7 и 5, получаем, что при любых числах $A_0, A_{-n}, A_{-n+1}, \dots, A_{\kappa-1}$ функция (3.2) удовлетворяет условию (1.1), т.е. является решением задачи H . Таким образом, утверждение (а) теоремы доказано.

Пусть теперь $n + \kappa < 0$, $\kappa > 0$. Тогда $\Psi_r^-(z)$ имеет полюс порядка $-n$ в точке r^{-1} и обращается в нуль в точке $z = \infty$. Поэтому

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i(1-z)^n} \int_T \frac{f(t)(1-t)^n}{S^+(t)} \frac{dt}{t-z} + S(z)P(z),$$

где

$$P(z) = A_0 + A_1(1-z) + \dots + A_{-n-1}(1-z)^{-n-1}$$

— некоторый полином порядка $-n-1$. Учитывая лемму 3, получаем $A_1 = A_2 = \dots = A_{-n-1} = 0$ и $P(z) = A_0$. Тем самым $\Phi(z)$ представляется в виде (3.3). Так как $a(t) \in R^\alpha$, то $A_0 S(z)$ удовлетворяет однородному условию (1.1). Поэтому для того, чтобы имело место (3.4), необходимы условия $\Phi(\infty) = 0$.

Пусть теперь $\kappa < 0$. Тогда $S(z)$ имеет полюс порядка $-\kappa$ в бесконечно удаленной точке, и поэтому $A_0 S(z)$ не является решением однородной задачи H . Для того, чтобы имело место $\Phi(\infty) = 0$, следует выбрать A_0 по формуле (3.5) и потребовать условия (3.4) для функции f . Теорема доказана.

Из теоремы 3 получаем

Теорема 4. Пусть $\alpha \leq -1$ и $a(t) \in R^\alpha$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (а) если $n + \kappa > 0$, то общее решение однородной задачи H можно представить в виде

$$(3.6) \quad \Phi_0(z) = S(z) (A_0 + A_{-n}(1-z)^{-n} + \dots + A_{\kappa-1}(1-z)^{\kappa-1}),$$

где $A_0, A_{-n}, \dots, A_{\kappa-1}$ – произвольные комплексные числа,

- (б) если $n + \kappa \leq 0$ и $\kappa > 0$, то $\Phi(z) = A_0 S(z)$, где A_0 – произвольное комплексное число;
- (в) если $n + \kappa \leq 0$ и $\kappa < 0$, то однородная задача имеет только тривиальное решение $\Phi(z) \equiv 0$.

5. Задачу H принято называть нетеровой, если количество линейно независимых решений N однородной задачи и количество условий P на f , при которых задача H имеет решение, конечны. Разница $N - P$ называется *индексом задачи* H . Из теорем 1 и 2 следует, что если $\alpha > -1$, то $N = n + \kappa$ при $n + \kappa \geq 0$ и $P = -n - \kappa$ при $n + \kappa < 0$. Это означает, что при $\alpha > -1$ числа N и P зависят только от α и $\kappa = \text{ind } a(t)$. Отметим, что при $\alpha \leq -1$ числа N и P зависят не только от α и κ . В случае, когда $a(t) \in R^\alpha$ и $n + \kappa \geq 0$, мы имеем $N = n + \kappa + 1$. Можно привести примеры, когда $a(t) \notin R^\alpha$ и $N = n + \kappa$.

Теорема 5. Пусть $\alpha \leq -2$, $a(t) = (A + (1-t)^\beta)a_1(t)$, где $\beta \in (0, 1)$, $a_1(t) \in C^1(T)$, $a_1(t) \neq 0$, а число A выбрано так, чтобы функция $A + (1-z)^\beta$ не обращалась в нуль в D^+ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (а) если $n + \kappa \geq 0$, то общее решение задачи H можно представить в виде (3.2), где

$$P(z) = A_{-n}(1-z)^{-n} + \dots + A_{\kappa-1}(1-z)^{\kappa-1}$$

и $A_{-n}, \dots, A_{\kappa-1}$ – произвольные комплексные числа,

- (б) если $n + \kappa < 0$, то задача H разрешима тогда и только тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет условиям (3.4). Решение единственно и $\Phi(z) = K(f, z)$.

Доказательство. Через $S_1^\pm(z)$ обозначим фактор-функцию $a_1(t)$. Если $S^\pm(z)$ фактор-функция $a(t)$, то

$$S(z) = \begin{cases} (A + (1-z)^\beta)S_1^+(z), & z \in D^+ \\ S_1^-(z), & z \in D^-. \end{cases}$$

Так как

$$|S_1^+(rt) - a_1(t)S_1^-(r^{-1}t)| < C(1-r)^\delta,$$

где $\beta < \delta < 1$, то получаем

$$|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)| > (1-r)^\beta,$$

при $|1-t| < c(1-r)$, $c > 0$. Следовательно,

$$\|S^+(rt) - a(t)S^-(r^{-1}t)\|_{L^1(\rho_r)} \rightarrow \infty.$$

Поэтому, повторяя рассуждения теоремы 3, заключаем, что $A_0 = 0$.

Из этой теоремы следует

Теорема 6. Пусть $\alpha \leq -2$ и

$$a(t) = (A + (1-t)^\beta)a_1(t),$$

где $\beta \in (0, 1)$, $a_1(t) \in C^1(T)$, $a_1(t) \neq 0$, а число A выбрано так, чтобы функция $A + (1-z)^\beta$ не обращалась в нуль в D^+ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (а) если $n + \kappa > 0$, то общее решение однородной задачи H можно представить в виде

$$\Phi_0(z) = S(z) (A_{-n}(1-z)^{-n} + \dots + A_{\kappa-1}(1-z)^{\kappa-1}),$$

где $A_{-n}, \dots, A_{\kappa-1}$ — произвольные комплексные числа,

- (б) если $n + \kappa \leq 0$, то $\Phi(z) \equiv 0$.

Abstract. The paper studies a Hilbert boundary value problem in $L^1(\rho)$, where $\rho(t) = |1-t|^\alpha$ and α is a real number. For $\alpha > -1$, it is proved that the homogeneous problem has $n + \kappa$ linearly independent solutions when $n + \kappa \geq 0$, where $a(t)$ is the coefficient of the problem, besides, $\kappa = \text{ind } a(t)$ and $n = [\alpha] + 1$ if α is not an integer, and $n = \alpha$ if α is an integer. Conditions under which the problem is solvable are found for the case when $\alpha > -1$ and $n + \kappa < 0$. For $\alpha \leq -1$ the number of linearly independent solutions of the homogeneous problem depends on the behavior of the function $a(t)$ at the point $t = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. В. Хвеледзе, *Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций, Современные проблемы математики, том. 7*, (Москва, 1975).
- [2] И. П. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов* (Штиинца, Кишнев, 1973).
- [3] К. Казарян, Ф. Сория, И. Спитковский, "Краевая задача Римана в пространствах с весом, допускающим особенности," ДАН СССР, **353** (6), 717-719 (1997).
- [4] Г. М. Айрапетян, "О разрешимости задачи Дирихле с граничными функциями из пространств с весом," Мат. заметки, **76**, 643-650 (2004).

- [5] Г. М. Айрапетян, П. Э. Меликсетян, “Граничная задача Гильберта в полуплоскости в пространствах с весом,” Изв. НАН Армении, Математика **38** (6), 17-32 (2003).
- [6] Н. И. Мусхелешвили, *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, Москва, 1968).
- [7] Г. М. Айрапетян, “Задача Дирихле в весовых пространствах,” Изв. НАН Армении, Математика **36** (3), 22-44 (2001).
- [8] Г. М. Айрапетян, “Граничная задача сопряжения со смещением в классе L^1 ,” Изв. НАН Армении, Математика **22**, 238-252 (1987).

Поступила 15 ноября 2006