

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ФОН НЕЙМАНА-ГАЙНЦА И ПРИМЫКАЮЩИЕ К НЕЙ НЕРАВЕНСТВА

Л. З. ГЕВОРГЯН

Государственный Инженерный Университет Армении
E-mail: *levgev@hotmail.com*

Аннотация. В настоящей заметке приводится количественная форма теоремы фон Неймана, а также некоторые родственные неравенства, позволяющие оценить снизу расстояние между началом координат и нормализованным числовым образом оператора.

1. В связи с теорией спектральных множеств линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ фон Нейман доказал [6] следующее утверждение.

Теорема А. Пусть функция u аналитична в некоторой области, охватывающей замкнутый единичный круг $\overline{D}$ и удовлетворяет неравенству $|u(z)| \leq 1$, $z \in \overline{D}$. Тогда для любого оператора A такого, что $\|A\| \leq 1$ имеет место неравенство $\|u(A)\| \leq 1$.

В дальнейшем в [5] было установлено, что теорема А может быть легко получена из следующего результата.

Теорема В. Пусть функция u аналитична в некоторой области, охватывающей замкнутый единичный круг $\overline{D}$ и отображает $\overline{D}$ в правую полуплоскость $\mathbb{C}^+ = \{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$. Тогда для любого оператора A , $\|A\| \leq 1$ и любого элемента $x \in H$ имеет место неравенство $\operatorname{Re} \langle u(A)x, x \rangle \geq 0$.

Следует отметить, что приведенные выше формулировки взяты из [7] (глава 11, 153, §2).

Сначала мы докажем количественный вариант второго из этих утверждений. Затем будут установлены некоторые неравенства для нормы трансляций произвольного оператора.

В конце оценивается снизу норма некоторой функции от оператора, что в комбинации с уже полученным результатом позволяет судить о величине зазора между началом координат и так называемым нормализованным числовым образом оператора.

Подобные оценки играют важную роль при определении скорости сходимости различных итерационных методов решения линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве [3].

Прежде чем перейти к изложению этих результатов, заметим, что условия, что *функция u аналитична в U и $\|A\| \leq 1$* можно заменить на *аналитичность функции u в открытом единичном круге D и $\|A\| < 1$* . Действительно, границы множеств $\overline{D}$ и U лежат на некотором положительном расстоянии m . Тогда функция, определяемая формулой $f(z) = u((1+m)z)$ будет аналитична внутри единичного круга и норма оператора $B = A/(1+m)$ будет строго меньше единицы 1.

Предложение 1. Пусть f - функция, аналитичная в открытом единичном круге D и отображает его в правую полуплоскость. Тогда для любого оператора B , $\|B\| < 1$

$$(1) \quad \operatorname{Re} \langle f(B)x, x \rangle \geq \frac{1 - \|B\|}{1 + \|B\|} \|x\|^2 \operatorname{Re} \{f(0)\}, \quad x \in H.$$

Доказательство. Пусть r - число, удовлетворяющее неравенствам $\|B\| < r < 1$. Согласно формуле Шварца

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{f(re^{it})\} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} dt, \quad |z| < r.$$

Откуда

$$\operatorname{Re} f(B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{it}) \operatorname{Re} \left((re^{it}I + B)(re^{it}I - B)^{-1} \right) dt,$$

и

$$\langle \operatorname{Re} f(B)x, x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{f(re^{it})\} \operatorname{Re} \left\langle (re^{it}I + B)(re^{it}I - B)^{-1} x, x \right\rangle dt$$

или, что то же самое

$$\langle \operatorname{Re} \{f(B)\} x, x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{f(re^{it})\} \operatorname{Re} \left\langle (re^{it}I + B)y_t, (re^{it}I - B)y_t \right\rangle dt,$$

где $y_t = (re^{it}I - B)^{-1} x$. Очевидно

$$\operatorname{Re} \left\langle (re^{it}I + B)y_t, (re^{it}I - B)y_t \right\rangle = r^2 \|y_t\|^2 - \|By_t\|^2 \geq (r^2 - \|B\|^2) \|y_t\|^2.$$

Так как

$$\|y_t\| \geq \frac{\|x\|}{\|re^{it}I - B\|} \geq \frac{\|x\|}{r + \|B\|},$$

то

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\langle (re^{it} + B) y_t, (re^{it}I - B) y_t \right\rangle \\ & \geq (r^2 - \|B\|^2) \frac{\|x\|^2}{(r + \|B\|)^2} = \frac{r - \|B\|}{r + \|B\|} \|x\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re} \langle f(B)x, x \rangle \geq \frac{r - \|B\|}{r + \|B\|} \|x\|^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{it}) dt.$$

Так как для аналитической функции ее действительная часть является гармонической функцией, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{it}) dt = \operatorname{Re}\{f(0)\}$$

и

$$\operatorname{Re} \langle f(B)x, x \rangle \geq \frac{r - \|B\|}{r + \|B\|} \|x\|^2 \operatorname{Re}\{f(0)\}.$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow 1$ получим (1).

Пример 1. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad 0 < b < a < 1, \quad f(z) = \frac{1-z}{1+z}.$$

Тогда $\|B\| = a$ и

$$f(B) = \begin{pmatrix} \frac{1-a}{1+a} & 0 \\ 0 & \frac{1-b}{1+b} \end{pmatrix}.$$

Числовой образ $W(B) = \{\langle Bx, x \rangle : \|x\| = 1\}$ оператора B равен $[b, a]$, а

$$W(f(B)) = \left[\frac{1-a}{1+a}, \frac{1-b}{1+b} \right],$$

т.е. неравенство (1) по крайней мере для оператора B является точным.

Напомним, что числовым радиусом оператора A называется величина

$$w(A) = \sup_{\lambda \in W(A)} |\lambda|.$$

Лемма 1. Для любого оператора A и произвольного комплексного числа $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(2) \quad \|A - \lambda I\| \leq w(A) + \sqrt{w^2(A) + |\lambda|^2}.$$

Доказательство. Согласно теореме 2 из [1], условия

$$w(B) \leq 1, \quad \|B - \lambda I\| \leq 1 + \sqrt{1 + |\lambda|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

эквивалентны. Пусть $B = A/w(A)$. Тогда

$$\left\| \frac{A}{w(A)} - \mu I \right\| \leq 1 + \sqrt{1 + |\mu|^2}$$

и

$$\|A - w(A)\mu I\| \leq w(A) + \sqrt{w^2(A) + w^2(A)|\mu|^2}.$$

Заметим, что в силу формулы из [2]

$$\lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow +\infty \\ \arg \lambda = \phi}} (|\lambda| - \|A - \lambda I\|) = \inf \operatorname{Re} \{W(e^{-i\phi} A)\}.$$

Если имеет место неравенство

$$\|A - \lambda I\| \leq a + \sqrt{a^2 + |\lambda|^2} \quad (a > 0),$$

то $w(A) \leq a$, т.е. оценка (2) для любого оператора является точной.

Пример 2. Пусть J_2 – двумерная клетка Жордана

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Простой подсчет показывает, что

$$w(J_2) = 1/2 \quad \text{и} \quad \|J_2 - \lambda I\| = 1/2 + \sqrt{1/4 + |\lambda|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, неравенство (2) для J_2 превращается в тождество.

Оказывается, что этот результат справедлив также для более широкого класса операторов.

Лемма 2. Пусть $A^2 = 0$. Тогда $D(0, \|A\|/2) \subset W(A) \subset \overline{D}(0, \|A\|/2)$.

Доказательство. Как хорошо известно, гильбертово пространство H может быть разложено в ортогональную сумму:

$$H = N(A^*) \oplus \overline{R}(A),$$

где $N(A)$ – ядро, а $R(A)$ – образ оператора A . Пусть $h = f + g$, где $f \in N(A^*)$ и $g \in \overline{R}(A)$. Очевидно, что

$$Ah = Af, \quad \langle Ah, h \rangle = \langle Af, f + g \rangle = \langle f, A^*(f + g) \rangle = \langle f, A^*g \rangle = \langle Af, g \rangle.$$

Откуда

$$|\langle Ah, h \rangle| = |\langle Af, g \rangle| \leq \|A\| \|f\| \|g\| \leq \frac{1}{2} \|A\| (\|f\|^2 + \|g\|^2) = \frac{1}{2} \|A\| \|h\|^2.$$

Так как $\|A\| \leq 2w(A)$, то $\|A\| = 2w(A)$. Тогда существует последовательность $\{h_n\}$ такая, что $\langle Ah_n, h_n \rangle \rightarrow \|A\|e^{i\alpha}/2$. Пусть $h_n = f_n + g_n$ — ортогональное разложение элемента h_n . Тогда

$$\langle Ah_n, h_n \rangle = \langle Af_n, g_n \rangle \quad \text{и} \quad \left\langle Af_n, e^{i(\alpha-\beta)}g_n \right\rangle \longrightarrow \frac{\|A\|}{2}e^{i\beta}.$$

Предложение 2. Пусть $A^2 = 0$. Тогда

$$\|A - \lambda I\| = w(A) + \sqrt{w^2(A) + |\lambda|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Имеем

$$\|(A - \lambda I)h\|^2 = \|Af\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle Af, \lambda g \rangle + |\lambda|^2\|h\|^2.$$

Тогда, если $\|h\| = 1$, это выражение подходящим выбором элемента g может быть сведено к виду

$$\|Af\|^2 + 2|\lambda|\|Af\|\|g\| + |\lambda|^2 \leq \|A\|^2\|f\|^2 + 2|\lambda|\|A\|\|f\|\sqrt{1 - \|f\|^2} + |\lambda|^2.$$

Максимум правой части этого выражения, как функции от $\|f\|$, достигим и равен

$$\frac{\|A\|^2}{2} + \|A\|\sqrt{\frac{\|A\|^2}{4} + |\lambda|^2} + |\lambda|^2 = \left(\frac{\|A\|}{2} + \sqrt{\frac{\|A\|^2}{4} + |\lambda|^2} \right)^2.$$

За счет выбора элемента f , разность между левой и правой частями неравенства можно сделать сколь угодно малой. Тогда

$$\|(A - \lambda I)h\| \longrightarrow \frac{\|A\|}{2} + \sqrt{\frac{\|A\|^2}{4} + |\lambda|^2} = w(A) + \sqrt{w^2(A) + |\lambda|^2},$$

что завершает доказательство.

Оказывается, что в некоторых случаях, если в (2) для значения $\lambda = 0$ имеет место равенство (т.е. если $\|A\| = 2w(A)$), то оно сохраняется также для всех остальных значений $\lambda \in \mathbb{C}$.

Предложение 3. Пусть оператор A достигает своей нормы и $\|A\| = 2w(A)$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|A - \lambda I\| = w(A) + \sqrt{w^2(A) + |\lambda|^2}.$$

Доказательство. Так как это равенство однородно, то можно дополнительно предположить, что $\|A\| = 1$. Согласно теореме из [8] J_2 есть прямое слагаемое для оператора A , т.е.

$$A = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где $W(B) \subset W(J_2)$. Тогда

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |\lambda|^2} = \|J_2 - \lambda I\| \leq \|A - \lambda I\| \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |\lambda|^2},$$

влекущее

$$\|A - \lambda I\| = w(A) + \sqrt{w^2(A) + |\lambda|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Предложение 4. *Оператор A достигает своей нормы на элементе x тогда и только тогда, когда x является собственным элементом оператора A^*A , отвечающим собственному значению $\|A\|^2$.*

Доказательство. Пусть $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$. Тогда

$$\|A\|^2\|x\|^2 = \|Ax\|^2 = \langle A^*Ax, x \rangle \leq \|A^*A\|\|x\|^2 = \|A\|^2\|x\|^2.$$

Таким образом, неравенство превращается в равенство, откуда $A^*Ax = \|A\|^2x$.

Следовательно, множество элементов, на котором оператор достигает своей нормы, пополненное нейтральным элементом, образует подпространство.

Следующий пример призван проиллюстрировать это предложение.

Пример 3. Пусть V – оператор, действующий в пространстве $L^2(0, 1)$ по формуле

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \|V\| &= \frac{2}{\pi}, \quad \left\| \cos \pi \frac{x}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}, \quad V \cos \pi \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} \sin \pi \frac{x}{2}, \\ \left\| V \cos \pi \frac{x}{2} \right\|^2 &= \frac{2}{\pi^2}, \quad V^*V \cos \pi \frac{x}{2} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \cos \pi \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Покажем, что два условия предложения 4 независимы. Очевидно, что из достижимости нормы не следует $\|A\| = 2w(A)$ (для этого можно взять любой нормальный оператор, достигающий своей нормы, в частности, нормальный оператор, действующий в конечномерном пространстве).

Следующий пример показывает невозможность обратной импликации.

Пример 4. Пусть $H = \oplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^2$, а A является ортогональной суммой жордановых клеток

$$\begin{pmatrix} 0 & 2^{-\frac{1}{n}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что $\|A\| = 1$ и $W(A) = \{z : |z| < 1/2\}$, так что $w(A) = 1/2$. Равенство $\|A\| = 2w(A)$ для этого оператора выполняется, но A не достигает своей нормы.

Замечание 1. *Оценка*

$$(3) \quad \|A - \lambda I\| \leq \|A\| + |\lambda|$$

является более точной, чем (2) для операторов, удовлетворяющих условию $\|A\| = w(A)$, а оценка (2) точнее, чем (3) для операторов, удовлетворяющих $\|A\| = 2w(A)$. Если $c\|A\| = w(A)$, где $1/2 < c < 1$, то из неравенства

$$c\|A\| + \sqrt{c^2\|A\|^2 + |\lambda|^2} \leq \|A\| + |\lambda|$$

будем иметь

$$|\lambda| \geq \frac{c - 0.5}{1 - c} \|A\|,$$

означающее, что при малых $|\lambda|$ оценка (2) точнее, чем (3), а при больших $|\lambda|$ – наоборот, оценка (3) точнее, чем (2).

Предложение 5. Пусть оператор B , действующий в гильбертовом пространстве H , удовлетворяет условию $w(B) < 1$. Пусть функция f аналитична в круге D и отображает его в правую полуплоскость $\mathbb{C}^+$. Тогда

$$(4) \quad \|f(B)x\| \leq \left(|\operatorname{Im}\{f(0)\}| + \frac{w(B) + \sqrt{w^2(B) + 1}}{1 - w(B)} \operatorname{Re}\{f(0)\} \right) \|x\|.$$

Доказательство. Согласно формуле Шварца при $w(B) < r < 1$

$$f(B) = i \operatorname{Im} f(0) I + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{f(re^{it})\} (re^{it} I + B) (re^{it} I - B)^{-1} dt.$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} \|f(B)x\| &\leq |\operatorname{Im} f(0)| \|x\| \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{f(re^{it})\} \left\| (re^{it} I + B) (re^{it} I - B)^{-1} x \right\| dt \\ &\leq \left(|\operatorname{Im} f(0)| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{f(re^{it})\} \|re^{it} I + B\| \left\| (re^{it} I - B)^{-1} \right\| dt \right) \|x\| \\ &\leq \left(|\operatorname{Im} f(0)| + \frac{w(B) + \sqrt{w^2(B) + r^2}}{2\pi} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{f(re^{it})\} \left\| (re^{it} I - B)^{-1} \right\| dt \right) \|x\|. \end{aligned}$$

Хорошо известно (см., напр., [4], Лемма 6.1 о росте резольвенты оператора), что

$$\|(B - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(\lambda, \overline{W(B)})}, \quad \lambda \notin \overline{W(B)},$$

где d - расстояние между λ и $\overline{W}(B)$. Таким образом,

$$\left\| (re^{it}I - B)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{d(re^{it}, \overline{W}(B))} \leq \frac{1}{r - w(B)}.$$

Откуда

$$\|f(B)x\| \leq \left(|\operatorname{Im} f(0)| + \frac{w(B) + \sqrt{w^2(B) + r^2}}{r - w(B)} \operatorname{Re} f(0) \right) \|x\|.$$

В пределе получим (4).

Замечание 2. Если $\|B\| < 1$, то неравенство (4) может быть заменено на

$$\|f(B)x\| \leq \left(|\operatorname{Im} f(0)| + \frac{1 + \|B\|}{1 - \|B\|} \operatorname{Re} f(0) \right) \|x\|.$$

Комбинируя это неравенство с (1), будем иметь

$$\frac{\operatorname{Re} \langle f(B)x, x \rangle}{\|f(B)x\| \|x\|} \geq \frac{(1 - \|B\|) \operatorname{Re} f(0)}{|\operatorname{Im} f(0)| (1 - \|B\|) + (1 + \|B\|) \operatorname{Re} f(0)} \frac{1 - \|B\|}{1 + \|B\|}.$$

Abstract. The paper gives a quantitative refinement of von Neumann's theorem with some relevant inequalities permitting to estimate from below the distance between the origin of the coordinate system and the so-called normalized numerical range of an operator acting in the Hilbert space.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. A. Berger, J. G. Stampfli, "Mapping Theorems for the Numerical Range," Amer. J. Math., **89**, 1047-1055 (1967).
- [2] L. Z. Gevorgyan, "On Some Geometric Characteristics of the Numerical Range", Electronic Journal "Investigated in Russia," **53**, 574-582 (2002).
<http://zhurnal.apelarn.ru/articles/2002/053.pdf>
- [3] L. Z. Gevorgyan, "On the Convergence Rate of Iterations and the Normalized Numerical Range," Math. Sci. Res. J., **8**, 16-26 (2004).
- [4] I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction to The Theory of Linear Non-Selfadjoint Operators in Hilbert Space* (AMS, 1995).
- [5] E. Heinz, "Ein Neumannscher Satz Uber Beschränkte Operatoren im Hilbertschen Raum," Gott. Nachr., 5-6 (1952).
- [6] J. Neumann, "Eine Spektraltheorie für Allgemeine Operatoren eines Unitären Raumes," Math. Nachr., **4**, 258-281 (1951).
- [7] F. Riesz, B. Szekely-Nagy, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* (Akademiai Kiado, 1972).
- [8] J. P. Williams, T. Crimmins, "On the Numerical Radius of a Linear Operator," Amer. Math. Monthly, **74**, 832-833 (1974).

Поступила 16 августа 2007