Известия НАН Армении. Математика, том 43, н. 2, 2008, стр. 3-16

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ОКРУЖНОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ФИКСИРОВАННЫМИ ПОЛЮСАМИ II

А. Б. АБРАМЯН

Ванадзорский Государственный Педагогический Институт, Ванадзор, Армения

Аннотация. Настоящая работа посвящена алгебраическим свойствам рациональных функций, ортогональных на единичной окружности, с фиксированными полюсами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($|z_k| < 1$, $k = 0, 1, \ldots$) – произвольная последовательность комплексных чисел. Рассмотрим систему Такенака–Мальмквиста рациональных функций $\{r_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$r_0(z) = \frac{(1-|z_0|^2)^{1/2}}{1-\overline{z_0}z},$$

$$r_n(z) = \frac{(1-|z_n|^2)^{1/2}}{1-\overline{z_n}z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z_k - z}{1-\overline{z_k}z} \varepsilon_k,$$

где

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{|z_k|}{z_k}, & z_k \neq 0 \\ -1, & z_k = 0 \end{cases}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Ортогонализируя упорядоченную последовательность $\{r_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ на единичной окружности $T = \{\xi : |\xi| = 1\}$ относительно меры $(2\pi)^{-1} d\mu(\vartheta)$, где $\mu(\vartheta)$ – произвольная ограниченная неубывающая функция на отрезке $(0, 2\pi)$ с бесконечным множеством точек роста, получим последовательность рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям, определяющим функции этой последовательности единственным образом:

$$\varphi_n(z) = \alpha_n r_n(z) + \ldots, \quad \alpha_n > 0, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{i\vartheta}) \overline{\varphi_m(e^{i\vartheta})} d\mu(\vartheta) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \quad n, m = 0, 1, \ldots$$

Рациональные функции $\{\varphi_k(z)\}$ были введены М. М. Джрбашяном в работе [1], где и были получены аналоги некоторых хорошо известных соотношений теории ортогональных на единичной окружности многочленов.

Настоящая работа посвящена изучению ортогональной системы $\{\varphi_k(z)\}$. Установленные здесь теоремы сводятся к соответствующим известным утверждениям теории ортогональных на единичной окружности в предельном случае, когда все полюсы системы $\{\varphi_k(z)\}$ отождествляются с бесконечностью.

Пусть $z_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Тогда $\varphi_k(z) = \alpha_k z^k + \ldots$. Обозначим

$$\overline{e_k} = -\frac{\varphi_{k+1}(0)}{\alpha_{k+1}}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Числа e_k называются параметрами ортогональной системы $\{\varphi_k(z)\}$ и были впервые введены С. Верблюнским [2]. Как было замечено Е. М. Никишиным в работе [9], “параметры e_k являются весьма полезными, поскольку в их терминах удобно формулировать достаточные, а иногда необходимые и достаточные условия на меру μ”. Параметрам ортогональных систем посвящено много работ (см., например, [3]–[9]).

Во второй части настоящей работы введен аналог параметров e_k для рациональных функций и доказана теорема об абсолютной непрерывности меры ортогональности (теорема 6).

В работе потребуются некоторые соотношения, см. [10].

1. Для любого $n = 0, 1, \ldots$

$$\varphi_{n+1}(z) = a_n \varepsilon_{n+1} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_{n+1}} z} \varphi_n(z) + b_n \frac{1 - \overline{z_n} z}{1 - \overline{z_{n+1}} z} \varphi_n^*(z),$$

(1.1)

$$\varphi_{n+1}^*(z) = \overline{a_n} \frac{1 - \overline{z_n} z}{1 - \overline{z_{n+1}} z} \varphi_n^*(z) + \overline{b_n} \varepsilon_{n+1} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_{n+1}} z} \varphi_n(z),$$

где

$$\varphi_0(z) = \gamma (1 - \overline{z_0} z)^{-1}, \quad \gamma^{-1} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{d\mu(\vartheta)}{|\xi - z_0|^2} \right\}^{1/2}, \quad \xi = e^{i\vartheta},$$

$$\varphi_n^*(z) = \frac{B_n(z)}{z} \overline{\varphi_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}, \quad B_n(z) = \prod_{k=0}^{n} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k} z} \varepsilon_k,$$

$$\overline{a_n} = \frac{1 - \overline{z_{n+1}} z_n}{1 - |z_n|^2} \frac{\varphi_{n+1}^*(z_n)}{\varphi_n^*(z_n)}, \quad b_n = \frac{1 - \overline{z_{n+1}} z_n}{1 - |z_n|^2} \frac{\varphi_{n+1}(z_n)}{\varphi_n^*(z_n)}.$$

2. Справедливы соотношения:

$$c_0 \mathrm{Re}\left\{\frac{\psi_n(\xi)}{\varphi_n(\xi)}\right\} = \frac{1-|z_n|^2}{|\xi - z_n|^2}\frac{1}{|\varphi_n(\xi)|^2}, \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.2}$$

$$c_0 \psi_k(z) = \frac{1}{2\pi}\int_T \frac{\xi + z}{\xi - z}\big[\varphi_k(\xi) - \varphi_k(z)\big]d\mu + \frac{1}{2\pi}\int_T \varphi_k(\xi)d\mu, \tag{1.3}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_T d\mu, \quad k = 0, 1, \ldots$$

3. Для любого $n = 0, 1, \ldots$

$$|a_n|^2 - |b_n|^2 = \frac{1-|z_{n+1}|^2}{1-|z_n|^2}. \tag{1.4}$$

2. АНАЛОГИ НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Следующее утверждение доказывается как соответствующий аналог для ортогональных многочленов для случая $z_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, см. [11]

Теорема 1. *Пусть рациональные функции*

$$\varphi_{n,k}(z) = \alpha_{n,k} r_k(z) + \ldots, \quad \alpha_{n,k} > 0, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

ортонормальны на единичной окружности T относитено меры

$$d\nu_n = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|z_n|^2}{|\xi - z_n|^2}\frac{d\vartheta}{|\varphi_n(\xi)|^2}, \quad \xi = e^{i\vartheta},$$

где $n \geq 0$ – зафиксировано. Тогда

$$\varphi_{n,k}(z) = \varphi_k(z), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\varphi_{n,k}(z) = \chi_{n,k} c_{n,k} \frac{1-\overline{z_n}z}{1-\overline{z_k}z}\varphi_n(z)\prod_{i=n}^{k-1}\frac{z_i - z}{1-\overline{z_i}z}\varepsilon_i, \quad k = n, n+1, \ldots,$$

где

$$|\chi_{n,k}| = 1 \quad and \quad c_{n,k} = \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-|z_n|^2}\right)^{1/2}, \quad k = n, n+1, \ldots$$

Следствие 1. 1. *Справедливо соотношение*

$$\int_T r_i(\xi)\overline{r_j(\xi)}d\nu_n(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_T r_i(\xi)\overline{r_j(\xi)}d\mu(\vartheta), \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

2. *Если $z_0 = 0$, то*

$$\int_T r_i(\xi)d\nu_n(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_T r_i(\xi)d\mu(\vartheta), \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Доказательство следует из первого равенства теоремы 1.

Заметим, что аналогичное утверждение доказано в [12], когда $z_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$|B_n(z)| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1-|z|}{1+|z|}\sum_{k=0}^{n}(1-|z_k|)\right\}, \quad |z| \leq 1, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Доказательство следует из неравенств $\ln t \leq t - 1$ $(t > 0)$ и из тождества

$$\left|\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}\right|^2 = 1 - \frac{(1-|z|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z_k}z|^2}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Для случая, когда $z_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ следующая теорема доказана в работе [12].

Теорема 2. *Если*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1 - |z_k|) = +\infty,$$

то равномерно внутри круга $|z| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1-|z_n|^2}\ \frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} = \frac{1}{2\pi c_0}\int_T \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu.$$

Доказателство. Так как

$$\frac{\sqrt{1-|z_n|^2}}{|\varphi_n^*(z)|} \leq \frac{|1-\overline{z_n}z|}{\sqrt{1-|z_n|^2}}\frac{1}{|\varphi_0^*(z)|} \leq \frac{4}{\gamma}\frac{1}{(1-r)^{1/2}}, \quad |z| = r < 1,$$

то из (1.3) следует

$$\left|\sqrt{1-|z_n|^2}\ \frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} - \frac{1}{2\pi c_0}\int_T \frac{\xi+z}{\xi-z}d\mu\right| \leq \frac{8\sqrt{c_0}}{\gamma}\frac{|B_n(z)|}{(1-r)^{3/2}}.$$

Утверждение теоремы следует теперь из леммы 1. Теорема доказана.

Теорема 3. *Справедливы равенства:*

$$\overline{e_n}^k = \frac{1}{2\pi}\int_T \frac{1-|z_{n+1}|^2}{|\xi - z_{n+1}|^2}\left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 \lambda_n^k(\xi)d\vartheta, \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad n, k = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\overline{e_n} = -\frac{b_n}{a_n}, \quad \lambda_n(\xi) = \varepsilon_{n+1}\frac{z_n - \xi}{1-\overline{z_n}\xi}\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^*(\xi)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Из (1.1) при $|\xi| = 1$ следует

$$\left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 = \left|\frac{\xi - z_{n+1}}{\xi - z_n}\right|^2 \left|\overline{a_n} + \overline{b_n}\lambda_n(\xi)\right|^{-2}$$

$$= \left(|a_n|^2 - |b_n|^2\right)^{-1} \left|\frac{\xi - z_{n+1}}{\xi - z_n}\right|^2 \operatorname{Re}\left\{\frac{1 + e_n\lambda_n(\xi)}{1 - e_n\lambda_n(\xi)}\right\}$$

$$= \frac{1 - |z_n|^2}{1 - |z_{n+1}|^2} \left|\frac{\xi - z_{n+1}}{\xi - z_n}\right|^2 \operatorname{Re}\left\{\frac{1 + e_n\lambda_n(\xi)}{1 - e_n\lambda_n(\xi)}\right\}. \tag{2.1}$$

Следовательно,

$$\frac{1 - |z_{n+1}|^2}{|\xi - z_{n+1}|^2} \left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 = \frac{1 - |z_n|^2}{|\xi - z_n|^2} \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} (e_n\lambda_n(\xi))^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{(e_n\lambda_n(\xi))^k}\right\}. \tag{2.2}$$

То, что $|e_n| < 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ следует из того, что все нули $\varphi_n(z)$ лежат внутри единичного круга (см. [10]). Так как

$$\lambda_n^k(\xi)\overline{\lambda_n^p(\xi)} = \lambda_n^{k-p}(\xi) = \varepsilon_{n+1}^{k-p} \left(\frac{z_n - \xi}{1 - \overline{z_n}\xi}\right)^{k-p} \left(\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^*(\xi)}\right)^{k-p},$$

то, считая для определенности $k \ge p$, с учетом того, что $\varphi_n^*(z) \ne 0$ $(|z| < 1)$, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_T \lambda_n^k(\xi)\overline{\lambda_n^p(\xi)}\, \frac{1 - |z_n|^2}{|\xi - z_n|^2} d\vartheta = \delta_{k,p}, \quad p = 0, 1, \ldots, k. \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие 2. Последовательность рациональных функций

$$R_n(z) = \frac{(1 - |z_n|^2)^{1/2}}{1 - \overline{z_n}z} \frac{(1 - |e_n|^2)^{1/2}}{1 - e_n\lambda_n(z)} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\overline{e_k} - \lambda_k(z)}{1 - e_k\lambda_k(z)}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

ортонормальна на единичной окружности T относительно меры $(2\pi)^{-1}d\vartheta$.

Доказательство. Так как при $|\xi| = 1$ (см. (1.1))

$$|1 - e_n\lambda_n(\xi)|^2 = |a_n|^{-2} \left|\frac{\xi - z_{n+1}}{\xi - z_n}\right|^2 \left|\frac{\varphi_{n+1}(\xi)}{\varphi_n(\xi)}\right|^2.$$

то

$$|R_n(\xi)|^2 = \frac{1 - |z_n|^2}{|\xi - z_{n+1}|^2}|a_n|^2(1 - |e_n|^2) \left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 = \frac{1 - |z_{n+1}|^2}{|\xi - z_{n+1}|^2} \left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2.$$

Следовательно, из теоремы 3 вытекает

$$\frac{1}{2\pi} \int_T |R_n(\xi)|^2\, d\vartheta, \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Далее, пусть $n > m$. Тогда

$$R_n(\xi)\overline{R_m(\xi)} = \gamma_{n,m} \frac{\xi\varphi_n(\xi)}{(1 - \overline{z_n}\xi)(1 - \overline{z_m}\xi)\varphi_m^*(\xi)}$$

$$\times \frac{1}{1 - e_n\lambda_n(\xi)} \frac{1}{1 - e_m\lambda_m(\xi)} \prod_{k=m+1}^{n-1} \frac{\overline{e_k} - \lambda_k(\xi)}{1 - e_k\lambda_k(\xi)},$$

где

$$\gamma_{n,m} = \varepsilon_{m+1}\big[(1-|z_n|^2)(1-|z_m|^2)(1-|e_n|^2)(1-|e_m|^2)\big]^{1/2}.$$

Откуда следует

$$\frac{1}{2\pi}\int_T R_n(\xi)\overline{R_m(\xi)}d\vartheta = 0, \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad m = 0,1,\dots,n-1.$$

Лемма доказана.

Следствие 3. *Пусть* $z_k = 0$ $(k = 0,1,\dots)$, *тогда*

(a) $|e_n| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \left|1 - \left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|\right| d\vartheta, \quad n = 0,1,\dots,$

(b) $e_n^k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \overline{\lambda_n^k(\xi)}\frac{\Phi_n^*(\xi)}{\Phi_{n+1}(\xi)}d\vartheta, \quad \Phi_n^*(\xi) = \frac{\varphi_n^*(\xi)}{\alpha_n}, \quad n,k = 0,1,\dots,$

(c) $(n+1)\overline{e_n} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \lambda_n(\xi)\frac{K_n(\xi)}{|\varphi_{n+1}(\xi)|^2}d\vartheta, \quad K_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(\xi)|^2,$

(d) $|e_n| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \left|1 - \frac{1}{n+1}\frac{K_n(\xi)}{|\varphi_{n+1}(\xi)|^2}\right| d\vartheta, \quad n = 0,1,\dots,$

(e) $-\overline{e_n}e_{n-1} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \xi\left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 d\vartheta, \quad n = 1,2,\dots,$

(f) $\overline{e_n} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \overline{\xi}^{n-1}\varphi_n^2(\xi)d\mu(\vartheta), \quad n = 0,1,\dots,$

(g) $-\overline{e_{n-1}} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^*(\xi)}\left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 d\vartheta, \quad n = 1,2,\dots,$

(h) $|e_{n-1}| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_T \left|\left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 - \left|\frac{\varphi_{n-1}(\xi)}{\varphi_n(\xi)}\right|^2\right| d\vartheta, \quad n = 1,2,\dots$

Доказательство. Если $z_k = 0$ $(k \ge 0)$, то $\varphi_n(z)$ – обыкновенный многочлен от z и

$$\lambda_n(\xi) = \xi\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^*(\xi)}.$$

Тогда, учитывая, что

$$\int_T \lambda_n(\xi)d\vartheta = 0$$

из теоремы 3 имеем

$$\overline{e_n} = \frac{1}{2\pi}\int_T \left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 \lambda_n(\xi)d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_T \lambda_n(\xi)\left(\left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2 - 1\right)d\vartheta.$$

Учитывая, что если $|\xi| = 1$, то $|\lambda_n(\xi)| = 1$, из этого неравенства получаем неравенство пункта (a). Доказательства остальных пунктов аналогичны.

Отметим, что пункт (a) доказан в работе [7] в виде

$$|e_n| \le \text{const}\int_T \left|1 - \left|\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right|^2\right| d\vartheta,$$

с использованием теоремы Колмогорова о сопряженных функциях.

3. ТЕОРЕМА ОБ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ МЕРЫ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

Обозначим через $C(T)$ пространство непрерывных на T комплексных функций. Пусть $\nu(\vartheta)$ – неубывающая на отрезке $[0,2\pi]$ функция и $f\in C(T)$. Часто нам будет удобно трактовать интеграл $\int_T f(e^{i\vartheta})d\nu(\vartheta)$ как интеграл по конечной мере ν (или $d\nu(\vartheta)$), заданной на окружности T. Саму эту меру отождествим с линейным непрерывным функционалом на $C(T)$. Под нормой меры ν будем понимать норму соответствующего функционала:

$$\|d\nu\| = \sup_{|f|\le 1}\left|\int_T f\,d\nu\right| = \int_T d\nu.$$

Отметим (см., например, [13]) что любая такая мера может быть разложена на абсолютно непрерывную и сингулярную относительно меры Лебега на $[0,2\pi]$ составляющие $P(\vartheta)d\vartheta + d\nu_s$.

Пусть ν и ν_n $(n=1,2,\ldots)$ – конечные положительные меры на T. Символом $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$ будем обозначать слабую сходимость мер, т.е. соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\int_T f\,d\nu_n = \int_T f\,d\nu, \quad f\in C(T).$$

Пусть данная последовательность равномерно ограничена по норме, т.е. $\|d\nu_n\|\le c$ $(n=1,2,\ldots)$. Если семейство функций $\Lambda\subset C(T)$ плотно в $C(T)$, то из теоремы о слабой сходимости в сопряженном пространстве (см. [13]) вытекает, что если для любой функции $f\in\Lambda$

$$\lim_{n\to\infty}\int_T f\,d\nu_n = \int_T f\,d\nu,$$

то $d\nu_n \xrightarrow{*} d\nu$.

Докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2. *Если*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n(0)}{|\varphi_n^*(0)|} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\int_T d\nu_n = \int_T d\mu,$$

где

$$d\nu_n = \frac{1-|z_n|^2}{|\xi - z_n|^2}\frac{d\vartheta}{|\varphi_n(\xi)|}, \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad n=0,1,\ldots$$

Доказательство. Из (1.3) следует

$$c_0\frac{\psi_n^*(0)}{\varphi_n^*(0)}=\frac{1}{2\pi}\int_T d\mu-\frac{B_n(0)}{\varphi_n^*(0)}\frac{1}{\pi}\int_T\overline{\xi\varphi_n(\xi)}d\mu,\quad n=0,1,\ldots \tag{3.1}$$

Заметим, что

$$\left|\int_T \xi\varphi_n(\xi)d\mu\right|\le\left\{\int_T d\mu\int_T|\varphi_n(\xi)|^2d\mu\right\}^{1/2}=2\pi\sqrt{c_0}. \tag{3.2}$$

Так как рациональные функции $\{\varphi_k^*(z)\}_{k=0}^{\infty}$ не имеют нулей в замкнутом круге $|z|\le 1$, то из формулы Шварца следует

$$c_0\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)}=i\beta_n+\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{\xi+z}{\xi-z}d\nu_n,$$

$$\beta_n=\operatorname{Im}\left\{c_0\frac{\psi_n^*(0)}{\varphi_n^*(0)}\right\},\quad n=0,1,\ldots \tag{3.3}$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{Re}\left\{c_0\frac{\psi_n^*(0)}{\varphi_n^*(0)}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_T d\nu_n,\quad n=0,1,\ldots$$

Тогда из (3.1) и (3.3) получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_T d\nu_n=\frac{1}{2\pi}\int_T d\mu-B_n(0)\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\varphi_n^*(0)}\frac{1}{\pi}\int_T\overline{\xi\varphi_n(\xi)}d\mu\right\}.$$

Учитывая (3.2), из (3.3) следует

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_T d\nu_n-\frac{1}{2\pi}\int_T d\mu\right|\le\sqrt{c_0}\,\frac{B_n(0)}{|\psi_n^*(0)|},$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Если* $|z_k|\le 1-\alpha$ $(k=0,1,\ldots)$, $0<\alpha\le 1$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_T\xi^k d\nu_n=\int_T\xi^k d\mu,\quad |k|=1,2,\ldots$$

Доказателство. Из (1.2) и (3.3) следует

$$i\beta_n+\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{1+\overline{\xi}z}{1-\overline{\xi}z}d\nu_n=\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{1+\overline{\xi}z}{1-\overline{\xi}z}d\mu-\frac{B_n(z)}{\varphi_n^*(z)}\frac{1}{\pi}\int_T\frac{\overline{\xi\varphi_n(\xi)}}{1-\overline{\xi}z}d\mu.$$

Перепишем это выражение в виде

$$i\beta_n+\frac{B_n(z)}{\varphi_n^*(z)}\frac{1}{\pi}\int_T\frac{\overline{\xi\varphi_n(\xi)}}{1-\overline{\xi}z}d\mu=\frac{1}{2\pi}\int_T\frac{1+\overline{\xi}z}{1-\overline{\xi}z}d\sigma_n, \tag{3.4}$$

где $d\sigma_n=d\mu-d\nu_n$. Так как

$$\frac{1+\overline{\xi}z}{1-\overline{\xi}z}=1+2\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{\xi}z\right)^k+2\frac{\left(\overline{\xi}z\right)^{n+1}}{1-\overline{\xi}z}$$

то из (3.4) следует, что

$$i\beta_n + \frac{B_n(z)}{\varphi_n^*(z)} \frac{1}{\pi} \int_T \frac{\overline{\xi \varphi_n(\xi)}}{1-\overline{\xi} z} d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_T d\sigma_n$$
$$+2\sum_{k=1}^{n} c_k\left(d\sigma_n\right) z^k + 2z^{n+1} \frac{1}{\pi} \int_T \frac{\overline{\xi}^{n+1}}{1-\overline{\xi} z} d\nu_n,$$

где

$$c_k\left(d\sigma_n\right) = \frac{1}{2\pi} \int_T \overline{\xi}^k d\sigma_n, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$ $(0<r<1)$, тогда получим

$$c_k\left(d\sigma_n\right) r^k = \frac{1}{\pi} \int_T \frac{e^{-ik\varphi} B_n\left(re^{i\varphi}\right)}{\varphi_n^*\left(re^{i\varphi}\right)} \left(\frac{1}{\pi} \int_T \frac{\overline{\xi \varphi_n(\xi)}}{1-r\overline{\xi} e^{i\varphi}} d\mu(\vartheta)\right) d\varphi.$$

откуда с учетом (3.2) следует

$$\left|c_k\left(d\sigma_n\right)\right| r^k \leq \frac{2\sqrt{c_0}}{1-r} \frac{1}{2\pi} \int_T \left|\frac{B_n\left(re^{i\varphi}\right)}{\varphi_n^*\left(re^{i\varphi}\right)}\right| d\varphi, \quad k=1,2,\ldots,n. \tag{3.5}$$

Так как,

$$\frac{1}{|\varphi_n^*(z)|} \leq \frac{|1-\overline{z_n} z|}{(1-|z_n|^2)^{1/2}} \frac{1}{(1-|z|^2)^{1/2}} \frac{1}{|\varphi_0(z)|} \leq \frac{4}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1-r}} \frac{1}{\sqrt{1-|z_n|^2}},$$

то из (3.5) имеем

$$\left|c_k\left(d\sigma_n\right)\right| r^k \leq \frac{8\sqrt{c_0}}{\gamma} \frac{1}{(1-r)^{3/2}} \frac{1}{(1-|z|^2)^{1/2}} \frac{1}{2\pi} \int_T \left|B_n\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi,$$

и применение леммы1 дает

$$\lim_{n\to\infty} \left|c_k\left(d\sigma_n\right)\right| = 0, \quad k=0,1,\ldots.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *Если* $|z_k| \leq 1-\alpha$ $(k=0,1,\ldots)$, $0<\alpha\leq 1$, *то* $d\nu_n \xrightarrow{*} d\mu$.

Доказательство. Так как семейство функций $\left\{e^{ik\vartheta}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ плотно в $C(T)$, то утверждение теоремы следует из лемм 2 и 3.

Лемма 4. *Имеет место равенство:*

$$\int_T u_n^2(\vartheta) d\vartheta + \int_T u_{n+1}^2(\vartheta) d\vartheta$$
$$= \frac{2|a_n|^2}{|a_n|^2-|b_n|^2} \int_T u_n(\vartheta) u_{n+1}(\vartheta) d\vartheta + \Delta_n, \quad n=0,1,\ldots,$$

где

$$u_n(\vartheta) = \frac{1-|z_n|^2}{|\xi-z_n|^2} \frac{1}{|\varphi_n(\xi)|^2}, \quad \xi = e^{i\vartheta},$$
$$\Delta_n = 4\pi(1-|z_n|^2)^2 \mathrm{Re}\left\{I_n^2(0)\right\},$$

$$I_n(0)=\frac{\varepsilon_{n+1}\overline{b_n}B_n(0)}{\varphi_n^*(0)\varphi_{n+1}^*(0)}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $z=\xi$, $|\xi|=1$. Перепишем (1.1) в виде

$$\frac{\overline{a_n}}{1-\overline{z_{n+1}}\xi}\frac{1}{\varphi_{n+1}^*(\xi)}=\frac{1}{1-\overline{z_n}\xi}\frac{1}{\varphi_n^*(\xi)}+\overline{b_n}\varepsilon_{n+1}\frac{\xi-z_n}{1-\overline{z_n}\xi}\frac{1}{1-\overline{z_{n+1}}\xi}\frac{\varphi_n(\xi)}{\varphi_n^*(\xi)\varphi_{n+1}^*(\xi)}.$$

Откуда следует

$$\frac{|a_n|^2-|b_n|^2}{|\xi-z_{n+1}|^2}\frac{1}{|\varphi_{n+1}(\xi)|^2}-\frac{1}{|\xi-z_n|^2}\frac{1}{|\varphi_n(\xi)|^2}=I_n(\xi)+\overline{I_n(\xi)}, \tag{3.7}$$

где

$$I_n(\xi)=\overline{b_n}\varepsilon_{n+1}\frac{B_n(\xi)}{(1-\overline{z_n}\xi)(1-\overline{z_{n+1}}\xi)}\frac{1}{\varphi_n^*(\xi)\varphi_{n+1}^*(\xi)}.$$

Из (3.7) получим

$$\int_T\frac{\left(|a_n|^2-|b_n|^2\right)^2}{|\xi-z_{n+1}|^4}\frac{d\vartheta}{|\varphi_{n+1}(\xi)|^4}+\int_T\frac{d\vartheta}{|\xi-z_n|^4|\varphi_n(\xi)|^4}$$
$$=2\mathrm{Re}\left\{I_n^2(0)\right\}+2|a_n|^2\int_T\frac{d\vartheta}{|\xi-z_n|^2|\xi-z_{n+1}|^2|\varphi_{n+1}(\xi)\varphi_n(\xi)|^2}.$$

Доказательство следует из этого равенства, с учетом (1.4) и (3.6).

Лемма 5. *Справедливо равенство:*

$$\int_T u_n(\vartheta)u_{n+1}(\vartheta)d\vartheta=\int_T u_n^2(\vartheta)d\vartheta+2\int_T\mathrm{Re}\left\{e_n\lambda_n(\xi)\right\}u_n^2(\vartheta)d\vartheta$$
$$+4\pi(1-|z_n|^2)^2B_n^2(0)\mathrm{Re}\left\{\frac{e_n^2\overline{a_n}\varepsilon_{n+1}^2}{\varphi_n^*(0)\left(\varphi_n^*(0)\right)^3}\right\},\quad n=0,1,\dots$$

Доказательство. Так как

$$\frac{1+e_n\lambda_n(\xi)}{1-e_n\lambda_n(\xi)}=1+2e_n\lambda_n(\xi)+2\frac{\left(e_n\lambda_n(\xi)\right)^2}{1-e_n\lambda_n(\xi)},$$

то из (2.1) имеем

$$u_{n+1}(\vartheta)=u_n(\vartheta)\mathrm{Re}\left\{\frac{1+e_n\lambda_n(\xi)}{1-e_n\lambda_n(\xi)}\right\}.$$

Следовательно,

$$\int_T u_n(\vartheta)u_{n+1}(\vartheta)d\vartheta=\int_T u_n^2(\vartheta)\mathrm{Re}\left\{\frac{1+e_n\lambda_n(\xi)}{1-e_n\lambda_n(\xi)}\right\}d\vartheta$$
$$=\int_T u_n^2(\vartheta)d\vartheta+2\int_T u_n^2(\vartheta)\mathrm{Re}\left\{e_n\lambda_n(\xi)\right\}d\vartheta$$
$$+2\int_T u_n^2(\vartheta)\mathrm{Re}\left\{\frac{\left(e_n\lambda_n(\xi)\right)^2}{1-e_n\lambda_n(\xi)}\right\}d\vartheta.$$

Заметим, что при $|\xi| = 1$

$$\frac{\lambda_n^2(\xi)}{|\varphi(\xi)|^4} = \varepsilon_{n+1}^2 \left(\frac{z_n - \xi}{1 - \overline{z_n}\xi}\right)^2 \frac{B_n^2(\xi)}{\xi^2 \left(\varphi_n^*(\xi)\right)^4}$$

и

$$u_n^2(\vartheta)\lambda_n^2(\xi) = \varepsilon_{n+1}^2 \frac{(1 - |z_n|)^2}{(1 - \overline{z_n}\xi)^4} \frac{B_n^2(\xi)}{\left(\varphi_n^*(\xi)\right)^4}.$$

Следовательно,

$$\int_T u_n^2(\vartheta) \mathrm{Re} \left\{ \frac{\left(e_n \lambda_n(\xi)\right)^2}{1 - e_n \lambda_n(\xi)} \right\} d\vartheta$$

$$= \mathrm{Re} \left\{ \varepsilon_{n+1}^2 (1 - |z_n|^2)^2 \int_T \frac{1}{(1 - \overline{z_n}\xi)^4} \frac{e_n^2}{1 - e_n\lambda_n(\xi)} \frac{B_n^2(\xi)}{\left(\varphi_n^*(\xi)\right)^4} d\vartheta \right\}$$

$$= 2\pi (1 - |z_n|^2)^2 B_n^2(0) \mathrm{Re} \left\{ \frac{\varepsilon_{n+1}^2 e_n^2}{\left(1 - e_n\lambda_n(0)\right) \left(\varphi_n^*(0)\right)^4} \right\}.$$

Теперь заметим, что при $z = 0$ (1.1)

$$\varphi_{n+1}^*(0) = \overline{a_n} \varphi_n^*(0) \left(1 - e_n \lambda_n(0)\right).$$

Следовательно, имеем окончательно

$$\int_T u_n^2(\vartheta) \mathrm{Re} \left\{ \frac{\left(e_n \lambda_n(\xi)\right)^2}{1 - e_n \lambda_n(\xi)} \right\} d\vartheta = 2\pi (1 - |z_n|^2)^2 B_n^2(0) \mathrm{Re} \left\{ \frac{\varepsilon_{n+1}^2 \overline{a_n} e_n^2}{\varphi_{n+1}^*(0) \left(\varphi_n^*(0)\right)^3} \right\}.$$

Лемма доказана.

Теорема 5. *Справедливо равенство:*

$$\int_T u_{n+1}^2(\vartheta) d\vartheta = \frac{1 + |e_n|^2}{1 - |e_n|^2} \int_T u_n^2(\vartheta) d\vartheta$$

$$+ \frac{4}{1 - |e_n|^2} \int_T u_n^2(\vartheta) \mathrm{Re} \left\{ e_n \lambda_n(\xi) \right\} d\vartheta + \Omega_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где

$$\Omega_n = 4\pi (1 - |z_n|^2)^2 B_n^2(0) \mathrm{Re} \left\{ \frac{\varepsilon_{n+1}^2 \overline{b_n}^2}{\left(\varphi_{n+1}^*(0) \varphi_{n+1}^*(0)\right)^2} \right\}$$

$$+ \frac{8\pi (1 - |z_n|^2)^2 B_n^2(0)}{1 - |e_n|^2} \mathrm{Re} \left\{ \frac{\varepsilon_{n+1}^2 e_n^2 \overline{a_n}}{\varphi_{n+1}^*(0) \left(\varphi_n^*(0)\right)^3} \right\}.$$

Доказателство следует из лемм 4, 5.

Следующее утверждение доказывается в [14].

Лемма 6. *Пусть неотрицательная функция $F(x)$ такая, что*

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}F(x) = +\infty.$$

Предположим, что неотрицательные функции $f_n(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\int_0^{2\pi} F\left(f_n(t)\right) dt \le \text{const}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Если $f_n(t) \xrightarrow{*} d\sigma(t)$ при $n \to \infty$, где $\sigma(t)$ – мера на $[0, 2\pi]$, то мера $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна.

Теорема 6. *Пусть $z_0 = 0$ и существует натуральное число n_0 такое, что*

$$\int_T \text{Re}\left\{e_n\lambda_n(\xi)\right\} u_n^2(\vartheta)d\vartheta \le 0, \quad \xi = e^{i\vartheta}, \quad n \ge n_0.$$

Если $|z_k| \le 1 - \alpha$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $0 < \alpha \le 1$ и бесконечное произведение

$$\prod_{k=n_0}^{\infty} \frac{1 + |e_k|^2}{1 - |e_k|^2}$$

сходится, то мера $\mu(\vartheta)$ абсолютно непрерывна.

Доказательство. Из условия $z_0 = 0$ следует, что $\Omega_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. В силу теоремы 5 следует, что

$$\int_T u_{n+1}^2(\vartheta)d\vartheta \le \frac{1 + |e_n|^2}{1 - |e_n|^2} \int_T u_n^2(\vartheta)d\vartheta, \quad n \ge n_0.$$

Следовательно,

$$\int_T u_n^2(\vartheta)d\vartheta \le \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{1 + |e_k|^2}{1 - |e_k|^2} \int_T u_{n_0}^2(\vartheta)d\vartheta, \quad n \ge n_0.$$

Пусть

$$c_1 = \max_{0\le k\le n_0} \int_T u_k^2(\vartheta)d\vartheta, \quad c_2 = c_{n_0} \prod_{k=n_0}^{\infty} \frac{1 + |e_k|^2}{1 - |e_k|^2},$$

$$c_{n_0} = \int_T u_{n_0}^2(\vartheta)d\vartheta \quad \text{и} \quad c = \max\{c_1, c_2\}.$$

Тогда

$$\int_T u_n^2(\vartheta)d\vartheta \le c, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Учитывая следствие 1, из условий теоремы следует, что

$$\int_T d\nu_n = \int_T d\mu, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где

$$d\nu_n = \frac{1 - |z_n|^2}{|\xi - z_n|^2} \frac{d\vartheta}{|\varphi_n^*(\xi)|^2}, \quad \xi = e^{i\vartheta},$$

а из теоремы 4 имеем $d\nu_n \xrightarrow{*} d\mu$, Утверждение теоремы следует теперь иь леммы 6. Теорема доказана.

Следствие 4. Пусть $z_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, и $\{e'_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, подчиненная условию $|e'_k| < 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$, а n_0 – произвольное фиксированное натуральное число. Рассмотрим многочлены $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, соответствующие параметрам $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$, где

$$e_k = e'_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1,$$

$$e_k = -|\mathrm{Re}\ e'_k| \,\mathrm{sign}\ \mathrm{Re}\ \nu_k + i\,|\mathrm{Im}\ e'_k| \,\mathrm{sign}\ \mathrm{Im}\ \nu_k, \quad k = n_0, n_0 + 1, \ldots,$$

$$\nu_k = \int_0^{2\pi} \xi \frac{\varphi_k(\xi)}{\varphi_k^*(\xi)} \frac{d\vartheta}{|\varphi_k(\xi)|^4}, \quad \xi = e^{i\vartheta}.$$

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} |e'_k|^2 < \infty,$$

то мера $\mu(\vartheta)$, соответствующая параметрам $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ абсолютно непрерывна.

Доказательство. Так как многочлен $\varphi_k(z)$ зависит только от параметров e_i $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$, то ν_k не зависит от параметра e_k. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{e_k \xi \frac{\varphi_k(\xi)}{\varphi_k^*(\xi)}\right\} \frac{d\vartheta}{|\varphi_k(\xi)|^4} = |\mathrm{Re}\ e'_k|\,|\mathrm{Re}\ \nu_k| - |\mathrm{Im}\ e'_k|\,|\mathrm{Im}\ \nu_k| \le 0$$

при $k = n_0, n_0+1, \ldots$ и $\xi = e^{i\vartheta}$. Учитывая, что $|e_k| = |e'_k|$ то из теоремы 6 при $z_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ получаем утверждение следствия. Доказательство завершено.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. А. Саакяну и С. Г. Рафаеляну за ценные замечания.

Abstract. The paper is devoted to the algebraic properties of rational functions which are orthogonal on the unit circle and have fixed poles.

Список литературы

[1] М. М. Джрбашян, "Ортогональные системы рациональных функций на окружности," Изв. АН Арм. ССР, Математика, **1**, 3-24 (часть I), **1**, 106-125 (часть II) (1966).
[2] S. Verblinskii, "On Positive Harmonic Functions. II," Proc. London Math. Soc., **40**, 290-320 (1935).
[3] G. Baxter, "A Convergence Equivalence Related to Polynomials Orthogonal on the Unit Circle," Trans. Amer. Math. Soc., **99** (3), 471-487 (1961).
[4] Б. Л. Голинский, И. А. Ибрагимов, "О предельной теореме Г. Сеге," Изв. АН СССР, Мат., **35** (2), 408-427 (1971).
[5] Б. Л. Голинский, "О связи между порядком убывания параметров ортогональных многочленов и свойствами соответствующей функции распределения," Изв. АН Арм. ССР, Математика, **15** (2), 127-144 (1980).

[6] Е. А. Рахманов, "Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II," Мат. сборник, **118 (160)** (1(5)), 104-117 (1977).
[7] Attila Máaté, Paul Nevai and Vilmos Totik, "Asymptotic for the Ratio of Leading Coefficients of Orthonormal Polynomials on the Unit Circle," Constr. Approx, **1**, 63-69 (1985).
[8] Е. М. Никишин, "Об одной оценке ортогональных многочленов," Acta Sci. Math. Szeged, **48** (1-4), 395-399 (1985).
[9] Е. М. Никишин, "Дискретный оператор Штурма-Лиувилля и некоторые задачи теории функций," Труды семинара им. И. Г. Петровского, **10**, 3-78 (1984).
[10] А. В. Абрамян, "О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами," Изв. НАН Армении, Математика **41** (3), 1-9 (2006).
[11] У. Гренадер, Г. Сеге, *Теплицевы формы и их приложения* (IL, Moscow, 1961).
[12] Я. Л. Геронимус, *Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке* (Физматгиз, Москва, 1958).
[13] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, Москва, 1981).
[14] П. Кусис, *Введение в теорию пространств* H^p (Мир, Москва, 1984).

Поступила 15 ноября 2006