

КОМБИНАТОРНЫЕ ПРИНЦИПЫ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ: ОБЗОР

В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: victo@aua.am

Аннотация. Настоящая статья является обзором основных результатов в стохастической геометрии на плоскости, полученных ереванской исследовательской группой, . В частности, результатов, касающихся второго порядка случайных геометрических процессов, полученных методами интегрирования комбинаторных разложений и инвариантным вложением. Для настоящего обзора были выбраны результаты, касающиеся томографии (или стереологии) случайных процессов прямых, случайных мозаик и булевых моделей (не обязательно пуассоновских) на плоскости. Эти результаты получены при предположении инвариантности или относительно группы **T** параллельных переносов, или относительно группы **M** евклидовых движений плоскости. В каждом из случаев изучаются маркированные точечные процессы пересечений $\{P_i, \Psi_i\}$, индуцированные на тестовой прямой случайной структурой, где $\{P_i\}$ есть точечный процесс пересечений, индуцированный на тестовой прямой направления α , а марка Ψ_i есть угол, под которым происходит пересечение в точке P_i с тестовой прямой направления α . В случае случайного процесса прямых, этот подход приводит к дифференциальным соотношениям между совместными распределениями числа точек пересечений, возникающих на непересекающихся интервалах тестовой прямой, имеющей направление α , и пальмовскими вероятностями первого и второго порядков тех же событий. Анализ этих соотношений дает условия пуассоновости n -мерных распределений для любого $n \geq 1$. В случае случайных мозаик получено распределение длины так-называемого типичного ребра направления α в терминах вероятностного распределения соответствующего маркированного точечного процесса $\{P_i, \Psi_i\}$. Что касается случайных **M**-инвариантных булевских моделей, настоящий обзор включает описание метода, основанного на суммировании тождеств типа Плейеля для реализации внутри конечного круга и дальнейшее вычисление предела, когда радиус круга стремится к бесконечности. Чередующийся процесс маркированных интервалов на прямой называется рекуррентным, если черные маркированные интервалы независимы, а длины белых маркированных интервалов составляют независимую последовательность независимых случайных величин. Одним из ранних результатов в этой области утверждает, что из условия рекуррентности вытекает экспоненциальность распределения длины типичного белого интервала на тестовой прямой.

Комбинаторные разложения; инвариантное вложение; случайные геометрические процессы; случайные мозаики.

1. ВВЕДЕНИЕ

Д. Г. Кендал в [5] определил предмет стохастической геометрии как изучение случайных геометрических процессов инвариантных относительно групп преобразований основного пространства. Так, статьи Р. Давидсона [7] и [8] написанные под влиянием Д. Г. Кендала, были посвящены изучению случайных процессов прямых на плоскости, инвариантных относительно группы M всех евклидовых движений плоскости. Среди работ этого периода отметим работы К. Крикеберга [9], Й. Мекке [17] и О. Каленберга [14], а также [1], которые были посвящены той же теме. Некоторые результаты касающиеся M -инвариантных случайных множеств можно найти также в монографиях Р. В. Амбарцумяна [22] и [32]. Недавно опубликованная работа Й. Мекке, В. Нагеля и В. Вайс [48], о случайных мозаиках была озаглавлена “Распределения длин ребер в плоских стационарных и изотропных STIT мозаиках”. Отметим, что стационарность и изотропность обычно эквивалентна инвариантности относительно евклидовых движений (см. [31]). Тем не менее, в настоящее время стохастическая геометрия включает много работ вне структуры очерченной Д. Г. Кендалом.

В течении десятилетий прошедших со дня публикации сборника статей [5], активное исследование в области очерченной Д. В. Кендалом велось в Ереване, в основном методами предложенными Р. В. Амбарцумяном. На начальном этапе этим аппаратом была комбинаторная интегральная геометрия (см. [2, 15, 18, 4, 6] и [22]) вместе с методом “анализ реализаций” [32]. Позднее, к арсеналу был присоединен так называемый метод инвариантного вложения [41]. Другим важным аппаратом исследования, который также в основном использовался в Ереване, это метод формул Пальма (см. [10]), предложенный в [32]. Систематическое исследование распределений Пальма в стохастической геометрии было начато в [19] выпуске.

Самым последним приобретением является техника случайного многоугольника предложенная в первой статье настоящего выпуска [49] (см. также [47]). Настоящий обзор не касается родственных тематик, таких как общие процессы отрезков [1, 3, 16, 20, 21], и порождение мер в пространствах интегральной геометрии [35]-[40] и [43] исследованных ереванской группой.

Настоящая статья содержит обзор основных результатов стохастической геометрии на плоскости, полученных в Ереване. Мы выбрали для обзора результаты касающиеся томографии (или стереологии) случайных процессов прямых, случайных мозаик и булевых моделей (не обязательно пуассоновских) на плоскости.

Мы требуем инвариантность или относительно группы **T** параллельных переносов, или группы **M**.

В каждом из случаев изучаются маркированные точечные процессы $\{P_i, \Psi_i\} = \{P_i, \Psi_i\}_\alpha$ пересечений, индуцированные случайной реализацией на тестовых прямых: $\{P_i\}_\alpha$ – точечный процесс пересечений, индуцированный на тестовой прямой направления α , а марка Ψ_i есть угол, под которым происходит пересечение тестовой прямой направления α в точке P_i . В случае случайных процессов прямых методы интегрирования комбинаторных разложений и инвариантного вложения приводят к дифференциальным соотношениям между совместными распределениями числа пересечений, возникающих на непересекающихся интервалах тестовой прямой, имеющей направление α , и пальмовскими вероятностями первого и второго порядков тех же событий. Анализируя эти соотношения, получаем условия пуассоновости n -мерных распределений для любого $n \geq 1$. В случае случайных мозаик получено распределение длины типичного ребра направления α в терминах вероятностного распределения соответствующего $\{P_i, \Psi_i\}_\alpha$.

В случае **M**-инвариантных непуассоновских булевых моделей, настоящий обзор включает описание процедуры суммирования тождеств типа Плейеля для части реализации внутри конечного круга и дальнейшее вычисление предела, когда радиус круга стремится к бесконечности. Один из ранних результатов [19] в этой области утверждает, что если чередующийся процесс маркированных интервалов на тестовой прямой (см. §11), марками которых являются углы пересечения в концах интервалов, является рекуррентным, то длина типичного белого интервала имеет экспоненциальное распределение.

Кратко опишем содержание обзора. Необходимые факты из комбинаторной интегральной геометрии представлены в §2, а §3 содержит необходимые сведения из теории трансляционно инвариантных случайных процессов прямых (в основном из работ [23, 32, 41, 42]). §4 посвящен обобщенным формулам Пальма. В §5 описан метод инвариантного вложения, который называется анализом первого порядка. Пример анализа второго порядка приводится в §6; он содержит интегрирование комбинаторного разложения из §2 и получение дифференциального тождества для вероятностного распределения числа пересечений на тестовом отрезке случайными прямыми (аналогичное разложение было использовано в **M**-инвариантном случае в работах [30, 34] и [42]). Аналогичный результат получен в §8 методом инвариантного вложения (см. [45]). В §8 получены условия, из которых следует пуассоновость точечного процесса $\{P_i\}_\alpha$. Имеется существенное методологическое различие между статьями [42] и [45]: анализ второго порядка

в [42] основан на разложениях комбинаторной интегральной геометрии (основными ссылками являются [4, 13] и [32]), в то время как в работах [41] и [42] использовался метод инвариантного вложения. Метод интегрирования комбинаторного разложения описан в §9, где найдено распределение длины типичного ребра направления α для $\mathbf{T}$ -инвариантной случайной мозаики.

В последнем параграфе был использован метод суммирования тождеств типа Плейеля для изучения $\mathbf{M}$ -инвариантных булевых моделей. Если чередующийся процесс маркированных интервалов на прямой рекуррентный, то длина типичного белого интервала на тестовой прямой имеет экспоненциальное распределение.

2. ТРАНСЛЯЦИОННО ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРЯМЫХ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Случайный процесс прямых определяется как случайный точечный процесс в пространстве прямых $\mathbb{G}$ на плоскости (стандартная литература по точечным процессам суть [24] и [31]). Прямую $g \in \mathbb{G}$ можно задавать полярными координатами (φ, p) основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую g (φ – точка на единичной окружности $\mathbf{S}_1$, $p \in [0, +\infty)$). Естественная топология в $\mathbb{G}$ есть топология листа Мебиуса.

Дадим определение процесса прямых. Обозначим через $\mathbf{M}$ пространство **реализаций** процесса прямых

$$\mathbf{M} = \{\mathbf{m} \subset \mathbb{G} : \mathbf{m} \text{ не имеет точек сгущения в пространстве } \mathbb{G}\}.$$

Обозначим через $\mathbf{A}$ минимальную σ -алгебру подмножеств пространства $\mathbf{M}$ относительно которой функции

$$N(\mathbf{m}, B) = \text{card}(\mathbf{m} \cap B)$$

измеримы для всех борелевских $B \subset \mathbb{G}$. Пусть $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, $\omega \in \Omega$. Любое измеримое отображение $\mathbf{m}(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbf{M}$ называется случайным точечным процессом в $\mathbb{G}$. Вместо $\mathbf{m}$ мы часто будем использовать символ $\{g_i\}$, подчеркивая факт, что процесс есть счетное случайное множество прямых. Через $\mathbf{P}$ обозначим вероятностное распределение процесса $\{g_i\}$ (вероятностная мера на $(\mathbf{M}, \mathbf{A})$). Группа $\mathbf{T}$ параллельных переносов $\mathbb{R}^2$ индуцирует группу преобразований множества реализаций $\mathbf{M}$ (группа параллельных переносов множества $\mathbf{M}$). $\{g_i\}$ называется однородным, если его распределение $\mathbf{P}$ инвариантно относительно этой группы ($\mathbf{T}$ -инвариантно).

Примером $\mathbf{T}$ -инвариантного случайного процесса прямых является пуассоновский процесс прямых, управляемый мерой $f(\varphi) \cdot dg$. Здесь и ниже dg обозначает единственную (с точностью до постоянного множителя) меру в пространстве прямых $\mathbb{G}$, инвариантную относительно евклидовых движений $\mathbb{R}^2$ (см. [12, 31] и [32]).

Моментные меры.

Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ обладает первой моментной мерой $m_1(\cdot)$, если

$$m_1(B) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} N(\mathbf{m}, B) < \infty, \quad \text{для } B \in \mathbf{B}_0(\mathbb{G}),$$

где $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}$ – математическое ожидание относительно $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}_0(\mathbb{G})$ – кольцо всех ограниченных борелевских подмножеств. Тогда $\{g_i\}$ называется случайным процессом прямых первого порядка.

Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ обладает второй моментной мерой $m_2(\cdot)$, если

$$m_2(B_1 \times B_2) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} [N(\mathbf{m}, B_1) \cdot N(\mathbf{m}, B_2)] < \infty, \quad \text{для } B_1, B_2 \in \mathbf{B}_0(\mathbb{G}).$$

Тогда $\{g_i\}$ называется случайным процессом прямых второго порядка.

Будем говорить, что прямая g "пересекает" отрезок γ , если $\gamma \cap g$ есть точка из **внутренности** отрезка γ .

Задавая "тестовый отрезок" γ , рассмотрим событие

$$\binom{\gamma}{k} = \{\gamma \text{ пересекается точно } k \text{ прямыми из } \{g_i\}\}.$$

Для заданных n тестовых отрезков $\gamma_1, \dots, \gamma_n \subset g(\alpha)$ и n неотрицательных целых чисел $k_1, \dots, k_n$, будем обозначать $\binom{\gamma_1 \dots \gamma_n}{k_1 \dots k_n} = \bigcap_{i=1}^n \binom{\gamma_i}{k_i} = \binom{\bar{\gamma}}{k}$. Для вероятностей этих событий используем обозначения

$$\mathbf{P} \binom{\gamma}{k} \quad \text{и} \quad \mathbf{P} \binom{\gamma_1 \dots \gamma_n}{k_1 \dots k_n} = \mathbf{P} \binom{\bar{\gamma}}{k}.$$

Определение 1. Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ принадлежит классу ТИ-2 , если его вероятностное распределение $\mathbf{P}$ – $\mathbf{T}$ -инвариантно и первая и вторая моментные меры процесса $\{g_i\}$ имеют вид $f dg$ и (вне $g_1 = g_2$) $f_2 dg_1 dg_2$ соответственно, с непрерывными плотностями $f(g)$ и $f_2(g_1, g_2)$.

2.1. Некоторые свойства процессов класса ТИ-2 . Свойства, которые мы приводим, могут быть доказаны методом трансляционного анализа реализаций (см. [32]).

1. Для случайного процесса прямых из класса ТИ-2 , с вероятностью 1 в реализации нет параллельных прямых.

2. Отрезки, принадлежащие $g(\alpha)$, будем называть горизонтальными, а отрезки, ортогональные к $g(\alpha)$ – вертикальными. Горизонтальные отрезки будем обозначать через h , а вертикальные – через v . Если $|h| = l \rightarrow 0$, то имеем

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda(\alpha) l + o(l), \quad \mathbf{P} \begin{pmatrix} h \\ 2 \end{pmatrix} = O(l^2) \quad \text{и} \quad \mathbf{P} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = o(l^2), \text{ если } k > 2,$$

где $\lambda(\alpha)$ – интенсивность точечного процесса $\{P_i\}_\alpha$.

Аналогичные утверждения справедливы для вертикальных отрезков v , при $|v| \rightarrow 0$.

3. Рассмотрим последовательность событий $\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, предполагая, что отрезки h_i и v_i при $l \rightarrow 0$ стягиваются к некоторым фиксированным точкам $y_i \in g(\alpha)$, $i = 1, 2$. Для пары вертикальных отрезков v_1, v_2 имеем $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \cup B$, где $A \subset \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ происходит, когда **одна и та же прямая** из $\{g_i\}$ пересекает отрезки v_1 и v_2 , а B – дополнение события A в $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ т.е. B обозначает событие, когда отрезки v_1 и v_2 пересекаются **двумя разными прямыми** из $\{g_i\}$. Существуют следующие пределы:

$$(2.1) \quad \lim_{l \rightarrow 0} \left[l^{-2} \mathbf{P} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = c_{y_1, y_2, hh}, \quad \lim_{l \rightarrow 0} [l^{-2} \mathbf{P}(A)] = c_A, \quad \lim_{l \rightarrow 0} [l^{-2} \mathbf{P}(B)] = c_{y_1, y_2, vv}.$$

Распределения Пальма $\mathbf{H}_y$, $\mathbf{H}_{y_1, y_2}$, $\mathbf{V}_y$, $\mathbf{V}_{y_1, y_2}$, и Π_g . Грубо говоря, каждое из этих распределений есть предел условного вероятностного распределения процесса $\{g_i\}$, при условиях $\begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B и A соответственно. Наши обозначения указывают на зависимость вероятностей Пальма от позиции предельных точек. Мы можем говорить о процессе прямых, который соответствует каждому из вышеупомянутых распределений.

Оба вероятностных распределения $\mathbf{H}_y$ и $\mathbf{V}_y$ определены на $\mathbf{M} \times (0, \pi)$, т.е. сосредоточены на множестве реализаций, обладающих прямой, проходящей через точку $y \in g(\alpha)$. Будем рассматривать события типа $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} \times \Theta_1$, где $\Theta_1 \subset (0, \pi)$ обозначает событие $\Psi \in \Theta_1$, где Ψ – направление случайной прямой, пересекающей окно. Значения $\mathbf{H}_y$ и $\mathbf{V}_y$ на одних и тех же событиях, как правило, не совпадают (см. Лемму 1).

Как $\mathbf{H}_{y_1, y_2}$ так и $\mathbf{V}_{y_1, y_2}$ сосредоточены на множестве реализаций, в которых имеются две прямые, проходящие через точки $y_1, y_2 \in g(\alpha)$. Параметризуем последние две прямые углами Ψ_1 и Ψ_2 . Таким образом, $\mathbf{H}_{y_1, y_2}$ и $\mathbf{V}_{y_1, y_2}$ суть вероятностные меры на пространстве $\mathbf{M} \times (0, \pi) \times (0, \pi)$. В частности, $\mathbf{H}_{y_1, y_2}$ и $\mathbf{V}_{y_1, y_2}$

определены на событиях типа $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} \times \Theta_1 \times \Theta_2$, $\Theta_1, \Theta_2 \subset (0, \pi)$. Вновь, $\mathbf{H}_{y_1, y_2}$ и $\mathbf{V}_{y_1, y_2}$ могут принимать различные значения на одних и тех же событиях (см. Лемму 2).

Распределение Пальма Π_g имеет особый статус. В [25] и [32] существование распределения Пальма Π_g доказывается только для $\mathbf{M}$ -инвариантных процессов прямых. Можно дать нестрогое определение распределения Π_g , как условное вероятностное распределение процесса $\{g_i\}$, при условии, что одна из прямых процесса $\{g_i\}$ совпадает с неслучайной прямой g . Одно из точных определений распределения Пальма Π_g для $\{g_i\} \in \text{TI-2}$ состоит в следующем:

$$\Pi_g \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) = \lim_{l \rightarrow 0} [\mathbf{P}(A)]^{-1} \mathbf{P} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap A \right) = c_A^{-1} \lim_{l \rightarrow 0} l^{-2} \mathbf{P} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap A \right).$$

Математические ожидания относительно пальмовских распределений будем записывать в виде интегралов.

Лемма 1. (см. [42]). Пусть $F(\mathbf{m}, \Psi_1)$ – ограниченная функция, определенная на $\mathbf{M} \times (0, \pi)$. Если $\{g_i\} \in \text{TI-2}$, то для каждого направления α и точки $y \in g(\alpha)$ имеем

$$\lambda(\alpha) \int F(\mathbf{m}, \Psi_1) d\mathbf{H}_y \cdot |\cot \Psi_1| = \lambda(\alpha + \pi/2) \int F(\mathbf{m}, \Psi_1) d\mathbf{V}_y,$$

где Ψ_1 – угол между $g(\alpha)$ и случайной прямой, проходящей через точку y .

Лемма 2. (см. [42]). Пусть $F(\mathbf{m}, \Psi_1, \Psi_2)$ – ограниченная функция, определенная на $\mathbf{M} \times (0, \pi) \times (0, \pi)$. Если $\{g_i\} \in \text{TI-2}$, то для каждого направления α и точек $y_1, y_2 \in g(\alpha)$ имеем

$$c_{y_1, y_2, hh} \int F(\mathbf{m}, \Psi_1, \Psi_2) d\mathbf{H}_{y_1, y_2} \cdot |\cot \Psi_1 \cot \Psi_2| = c_{y_1, y_2, vv} \int F(\mathbf{m}, \Psi_1, \Psi_2) d\mathbf{V}_{y_1, y_2},$$

где Ψ_1, Ψ_2 суть углы между $g(\alpha)$ и случайными прямыми, проходящими через точки y_1 и y_2 .

3. ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ПАЛЬМА

Если случайный процесс прямых $\{g_i\}$ класса TI-2, то соответствующий процесс пересечений $\{P_i\}_\alpha = \{g_i\} \cap g(\alpha)$ на тестовой прямой $g(\alpha)$ инвариантен относительно сдвигов вдоль $g(\alpha)$ и имеет конечную интенсивность $\lambda(\alpha)$. Пусть

$$p_k(t, \alpha) = \text{вероятность иметь } k \text{ точек из } \{P_i\}_\alpha \text{ на интервале длины } t$$

и

$$p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha) = \text{совместная вероятность иметь } k_j \text{ точек из } \{P_i\}_\alpha \text{ в } \gamma_j, j = 1, \dots, n,$$

где $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – система непересекающихся интервалов из $g(\alpha)$,

$\bar{k} = (k_1, \dots, k_n)$ – последовательность неотрицательных целых чисел.

Заметим, что вероятность $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$ на самом деле есть функция $2n$ переменных

$$p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha) = p_{k_1, \dots, k_n}(t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_{n-1}, \alpha) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha),$$

где $t_1, \dots, t_n$ – длины отрезков γ_i , а u_i – длина пробела между γ_i и γ_{i+1} .

Формулы Пальма первого порядка.

Для отрезка $\gamma \subset g(\alpha)$ длины t имеем классическую формулу Пальма (см. [32])

$$(3.1) \quad \frac{\partial p_k(t, \alpha)}{\partial t} = \lambda(\alpha) \left[\mathbf{H}_y \left(\frac{\gamma}{k-1} \right) - \mathbf{H}_y \left(\frac{\gamma}{k} \right) \right], \quad \text{где } p_k(t, \alpha) = P \left(\frac{\gamma}{k} \right).$$

Эта формула справедлива для обоих концов y отрезка γ . Здесь и ниже

$$\mathbf{H}_y \left(\frac{\gamma}{-1} \right) = 0.$$

В монографии [32] содержится обобщение формулы Пальма (3.1) для вероятностей $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$ с несколькими интервалами $\gamma_i \subset g(\alpha)$.

Возьмем один из отрезков γ_i и в его правом конце дадим приращение ε_i длины $|\varepsilon_i|$. Пробел между приращенным отрезком и γ_{i+1} становится $u_i - |\varepsilon_i|$. По формуле Тейлора

$$(3.2) \quad \lim_{|\varepsilon_i| \rightarrow 0} \frac{p_{\bar{k}}(t_1, \dots, t_i + |\varepsilon_i|, \dots, t_n, u_1, \dots, u_i - |\varepsilon_i|, \dots, u_n, \alpha) - p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{|\varepsilon_i|} = \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i}.$$

С другой стороны, по формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_i \cap \left(\frac{\gamma_i \cup \varepsilon_i}{k_i} \right) \right) &= \mathbf{P} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap \left(\frac{\varepsilon_i}{0} \right) \right) + P \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_i \cap \left(\frac{\gamma_i}{k_i-1} \quad \frac{\varepsilon_i}{1} \right) \right) + o(|\varepsilon_i|), \\ P \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) &= P \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap \left(\frac{\varepsilon_i}{0} \right) \right) + P \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap \left(\frac{\varepsilon_i}{1} \right) \right) + o(|\varepsilon_i|). \end{aligned}$$

где

$$\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right)_i = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_{i-1} & \gamma_{i+1} & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_{i-1} & k_{i+1} & \dots & k_n \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти формулы в (3.2), получим

$$(3.3) \quad \lambda(\alpha) \Delta_i \mathbf{H}_{r_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) = \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i},$$

где r_i обозначает правый конец отрезка γ_i . Здесь и ниже

$$(3.4) \quad \Delta_i Y_{\bar{k}} = Y_{(k_1, \dots, k_{i-1}, \dots, k_n)} - Y_{(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n)}.$$

Если дадим приращение отрезка γ_i слева, то получим следующую версию формулы (3.3):

$$(3.5) \quad \lambda(\alpha) \Delta_i \mathbf{H}_{l_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) = \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_{i-1}},$$

где l_i левый конец отрезка γ_i .

Формулы Пальма второго порядка. Возьмем два отрезка γ_i, γ_j и дадим приращения слева и справа соответственно, отрезками ε_i и ε_j . Длины отрезков ε_i и ε_j совпадают и равны l . Пробел между приращенными отрезками γ_i и γ_{i+1} будет $u_i - l$, а между γ_j и γ_{j-1} станет $u_{j-1} - l$. По формуле Тейлора предел выражения

$$\begin{aligned} & p_{\bar{k}}(t_1, \dots, t_i + l, \dots, t_j + l, \dots, t_n, u_1, \dots, u_i - l, \dots, u_{j-1} - l, \dots, u_n, \alpha) \\ & - p_{\bar{k}}(t_1, \dots, t_i + l, \dots, t_j, \dots, t_n, u_1, \dots, u_i - l, \dots, u_{j-1}, \dots, u_n, \alpha) \\ (3.6) \quad & - p_{\bar{k}}(t_1, \dots, t_i, \dots, t_j + l, \dots, t_n, u_1, \dots, u_i, \dots, u_{j-1} - l, \dots, u_n, \alpha) + p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha) \end{aligned}$$

умноженный на l^{-2} имеет вид

$$\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_{j-1}} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_j \partial u_i} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_{j-1}}.$$

С другой стороны, можно разлагать вероятности в (3.6), применяя формулу полной вероятности. Используя обозначение $\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_{ij} = \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_i\right)_j$, получаем

$$\begin{aligned} & P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i \cup \varepsilon_i & \gamma_j \cup \varepsilon_j \\ k_i & k_j \end{pmatrix}\right) = \\ & = \sum_{0 \leq s_1 + s_2 \leq 2} P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i - s_1 & k_j - s_2 & s_1 & s_2 \end{pmatrix}\right) + o(l^2). \end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} & P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i \cup \varepsilon_i & \gamma_j \\ k_i & k_j \end{pmatrix}\right) = \sum_{s=0,1,2} P\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \begin{pmatrix} \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ 0 & s \end{pmatrix}\right) + \\ & + \sum_{s=0,1} P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i - 1 & k_j & 1 & s \end{pmatrix}\right) \\ & + P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i - 2 & k_j & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) + o(l^2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j \cup \varepsilon_j \\ k_i & k_j \end{pmatrix}\right) = \sum_{s=0,1,2} \mathbf{P}\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \begin{pmatrix} \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ s & 0 \end{pmatrix}\right) \\ & + \sum_{s=0,1} P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i & k_j - 1 & s & 1 \end{pmatrix}\right) \\ & + P\left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}}\right)_{ij} \cap \begin{pmatrix} \gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ k_i & k_j - 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) + o(l^2). \end{aligned}$$

Наконец,

$$P\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) = \sum_{s_1+s_2 \leq 2} P\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \begin{matrix} \varepsilon_i & \varepsilon_j \\ s_1 & s_2 \end{matrix}\right) + o(l^2).$$

Подставляя в (3.6), получаем

$$(3.7) \quad c_{r_i, l_j, hh} \Delta_{ij}^2 \mathbf{H}_{r_i, l_j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_{j-1}} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_j \partial u_i} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_{j-1}},$$

где

$$(3.8) \quad \Delta_{ij}^2 Y_{\bar{k}} = Y_{\bar{k}_{ij}} - Y_{\bar{k}_i} - Y_{\bar{k}_j} + Y_{\bar{k}},$$

$$\bar{k}_i = (k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_n), \quad \bar{k}_{ij} = (k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_j - 1, \dots, k_n).$$

В частности, для $j = i + 1$, в (3.7) имеем $\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_{j-1}} = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i^2}$. Аналогично

$$(3.9) \quad c_{l_i, r_j, hh} \Delta_{ij}^2 \mathbf{H}_{r_i, l_j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_j \partial u_{i-1}} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_{i-1} \partial u_j}.$$

В случае $i = 1$ или $j = n$, мы должны подставить $\frac{\partial}{\partial u_0} \equiv 0$ и $\frac{\partial}{\partial u_n} \equiv 0$. В частности, для $i = 1$ и $j = n$ имеем

$$(3.10) \quad c_{l_1, r_n, hh} \Delta_{1n}^2 \mathbf{H}_{r_n, l_1} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_1 \partial t_n}.$$

Ниже мы будем использовать формулы для распределений Пальма $\mathbf{H}_y^{(2)}$ второго порядка, определенных условием, что две прямые из реализации процесса $\{g_i\}$ содержат точку $y \in g(\alpha)$. Например, используя формулу Тейлора, получаем

$$(3.11) \quad c_{r_i, h}^{(2)} \Delta_{ii}^2 \mathbf{H}_{r_i}^{(2)} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) = \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} - 2 \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_i} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i^2},$$

где $c_{r_i, h}^{(2)}$ – постоянная, Δ_{ii}^2 – обычная вторая разность по i . Аналогичная формула существует для $\pi_{i, h}^{(2)}$.

4. КОМБИНАТОРНАЯ ФОРМУЛА АМБАРЦУМЯНА

Этот параграф содержит описание конкретного комбинаторного разложения, версии которого были использованы в [2, 4, 13, 32] и [33], а также используются ниже в §§6 и 10. Для полноты, начнем с общего комбинаторного алгоритма, впервые представленного (без доказательства) в [33].

Предположим, что на плоскости задано конечное множество точек $\{P_i\}$ (некоторые тройки точек могут быть коллинеарными). Обозначим через ρ_{ij} отрезок с концами P_i и P_j , а через $|\rho_{ij}|$ его длину. Положим $[\rho_{ij}] = \{g \in \mathbb{G} \mid g \cap \rho_{ij} \neq \emptyset\}$. Пусть $Br\{P_i\}$ минимальное (конечное) кольцо (кольцо Бюффона) подмножеств $\mathbb{G}$, содержащее все множества $[\rho_{ij}]$. Две точки P_i и P_j называются соседними,

если отрезок ρ_{ij} не содержит других точек из множества $\{P_i\}$. Каждой паре соседей P_i, P_j соответствует прямая

$$g_{ij} = \text{прямая проходящая через } P_i \text{ и } P_j$$

и четыре **локально непересекающиеся** подмножества из $\mathbb{G}$:

$$1 = \{g \in \mathbb{G} \text{ все точки из } \{P_i\} \cap g_{ij} \text{ лежат в правой от } g \text{ полуплоскости}\},$$

$$2 = \{g \in \mathbb{G} \text{ все точки из } \{P_i\} \cap g_{ij} \text{ лежат в левой от } g \text{ полуплоскости}\},$$

$$3 = \{g \in \mathbb{G} \text{ точка } P_i \text{ лежит в правой, а } P_j \text{ в левой от } g \text{ полуплоскости}\}.$$

$$4 = \{g \in \mathbb{G} \text{ точка } P_i \text{ лежит в левой, а } P_j \text{ в правой от } g \text{ полуплоскости}\}.$$

Так как прямая $g \in \mathbb{G}$ ненаправленная, то говоря о левой или правой полуплоскостях, ограниченных прямой $g \in \mathbb{G}$, мы подразумеваем следующее: каждой прямой g_{ij} мы приписываем направление, скажем от P_i к P_j , если $i < j$. По непрерывности, оно однозначно определяет направление прямых g из окрестности прямой g_{ij} .

Как обычно $I_A(g) = 1$, если $g \in A$ и 0, в противном случае. Через μ обозначим $\mathbb{M}$ -инвариантную меру в $\mathbb{G}$.

Теорема 1. (Р.В. Амбарцумян [4, 33, 44]). Значение меры $\mu(C)$ для каждого подмножества $C \in Br\{P_i\}$ представимо в виде линейной комбинации расстояний ρ_{ij} между соседними точками P_i и P_j , с целочисленными коэффициентами:

$$(4.1) \quad \mu(C) = \sum_{i < j} c_{ij}(C) |\rho_{ij}|,$$

где сумма $\sum_{i < j}$ берется по всем парам соседних точек из множества $\{P_i\}$. Целые числа c_{ij} вычисляются по формуле:

$$(4.2) \quad c_{ij}(C) = I_C(\overset{+}{i}, \bar{j}) + I_C(\bar{i}, \overset{+}{j}) - I_C(\bar{i}, \bar{j}) - I_C(\overset{+}{i}, \overset{+}{j}).$$

В (4.2)

$$I_C(\overset{+}{i}, \overset{+}{j}) = I_{C \cap 1}(g), I_C(\bar{i}, \bar{j}) = I_{C \cap 2}(g), I_C(\overset{+}{i}, \bar{j}) = I_{C \cap 3}(g), I_C(\bar{i}, \overset{+}{j}) = I_{C \cap 4}(g).$$

Замечание 1. Отметим, что в случае наличия коллинеарных троек в $\{P_i\}$ разложение (4.1) не единственно. Пример различных представлений (4.1) - (4.2) можно найти в статье [49] настоящего выпуска.

Разложение (4.1) - (4.2) было использовано в работе [44] в следующей постановке. Пусть задана система непересекающихся замкнутых интервалов $\gamma_1, \dots, \gamma_n \subset g(\alpha)$ ($g(\alpha)$ – тестовая прямая направления α). Рассмотрим прямоугольник R , основанием которого является минимальный отрезок, содержащий $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

Через $D_i \subset R$ обозначим замкнутый прямоугольник, основание которого есть γ_i , а вертикальные стороны прямоугольников $D_1, \dots, D_n$ обозначим через $v_1, \dots, v_{2n}$, $|v_1| = \dots = |v_{2n}| = l$.

Через τ_{ir} , $r = 1, 2, \dots$ обозначим случайные хорды прямоугольника D_i , образованные прямыми из $\{g_i\}$. Пусть $A = \bigcap_{i=1}^{2n} [v_i] = [v_1] \cap [v_{2n}]$, где $[v] = \{g \in \mathbb{G} : g \cap v \neq \emptyset\}$. Положим $\chi_j(g) = g \cap D_j$, $j = 1, \dots, n$. Определим

$$B_{k_1, \dots, k_m} = B_{\bar{k}} = \{g \in \mathbb{G} : \text{точно } k_j \text{ хорды } \tau_{jr} \text{ пересекают } \chi_j(g), j = 1, \dots, n\}$$

и рассмотрим множества

$$\{P_j\} = \text{множество концов хорд } \tau_{ir} \quad \text{и} \quad \{Q_m\} = \text{вершины прямоугольника } R.$$

Нетрудно доказать, что

$$A \cap B_{\bar{k}} \in Br\{\{P_j\} \cup \{Q_m\}\}.$$

Следовательно, разложение (4.1) можно записать для инвариантной меры $\mu(C)$ множества $C = A \cap B_{\bar{k}}$. Для каждой реализации $\mathbf{m} = \{g_i\}$, для которой

$$\{P_i\} \cap \{Q_m\} = \emptyset$$

и коллинеарными тройками в $\{P_i\} \cup \{Q_m\}$ могут быть или $\{P_i, P_j, P_k\} \subset g_s \in \mathbf{m}$ или $\{Q_m, Q_j, P_k\}$. Тогда разложение (4.1) - (4.2) имеет вид:

$$(4.3) \quad \mu(A \cap B_{\bar{k}}) = \sum_{i=1}^4 \xi_i(\mathbf{m}),$$

где

$$(4.4) \quad \xi_1(\mathbf{m}) = \sqrt{T^2 + l^2} \cdot I_{\bar{k}}(Q_1, Q_4) + \sqrt{T^2 + l^2} \cdot I_{\bar{k}}(Q_2, Q_3) - T \cdot I_{\bar{k}}(Q_1, Q_3) - T \cdot I_{\bar{k}}(Q_2, Q_4),$$

$$(4.5) \quad \xi_2(\mathbf{m}) = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{r \in A} |\tau_{ir}| \cdot \Delta_i I_{\bar{k}}(\tau_{ir}),$$

$$(4.6) \quad \xi_3(\mathbf{m}) = \sum^* |P_i, P_j| \cdot [I_d(P_i, P_j) - I_s(P_i, P_j)] I_A(P_i, P_j) \Delta_{rq}^2 I_{\bar{k}}(P_i, P_j),$$

$$(4.7) \quad \xi_4(\mathbf{m}) = \sum_{Q_m} \sum_{P_j} |Q_m, P_j| \cdot I_A(Q_m, P_j) [I_d(Q_m, P_j) - I_s(Q_m, P_j)] \cdot \Delta_i I_{\bar{k}}(Q_m, P_j).$$

Выше мы использовали следующие обозначения:

T - длина горизонтального основания прямоугольника R ; $I_{\bar{k}}(g) = I_{B_{\bar{k}}}(g)$ - индикатор множества $B_{\bar{k}}$; операторы Δ_i и Δ_{ij}^2 были определены в (3.4) и (3.8).

В двойной сумме, определяющей $\xi_2(\mathbf{m})$, $\sum_{r \in A}$ распространяется по всем хордам τ_{ir} , продолжения которых пересекают отрезки v_1 и v_{2n} , вторая сумма распространяется по всем D_i , $i = 1, \dots, n$. Сумма $\sum^*$, определяющая ξ_3 , распространяется

по всем 2-элементным подмножествам $\{P_i, P_j\} \subset \{P_i\}$, для которых P_i и P_j принадлежат разным прямым из $\{g_i\}$ и лежат на разных вертикальных окнах. Для определения индикаторов I_d и I_s в (4.6), рассмотрим хорды τ_{rl} и τ_{qm} , для которых точки P_i и P_j являются концами. По определению, $I_d(P_i, P_j) = 1$, если хорды τ_{rl} и τ_{qm} лежат в разных полуплоскостях, ограниченных прямой, проходящей через точки P_i и P_j ; $I_s(\cdot) = 1 - I_d(\cdot)$. Символ Δ_{rq}^2 относится к прямоугольникам D_r и D_q , на вертикальных сторонах которых лежат точки P_i и P_j .

В (4.7) индикаторы I_d и I_s имеют аналогичный смысл, отрезок, концом которого является точка Q_m , суть v_1 и v_{2n} . Символ Δ_i относится к прямоугольнику D_i , на вертикальной стороне которого лежит точка P_j . Пары точек или отрезков в аргументе индикаторов $I_{\bar{k}}$, I_A , I_d или I_s обозначают соответствующие прямые из $\mathbb{G}$.

5. АНАЛИЗ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В статье [41] изучаются **T**-инвариантные случайные процессы прямых $\{g_i\}$ на плоскости и маркированный точечный процесс $\{P_i, \Psi_i\}_\alpha$, где случайное множество $\{P_i\}_\alpha$ есть точечный процесс пересечений, индуцированный на тестовой прямой $g(\alpha)$ направления α , а марка Ψ_i есть угол, под которым прямая из реализации пересекает тестовую прямую $g(\alpha)$ в точке P_i .

Для заданной системы непересекающих замкнутых интервалов $\gamma_1, \dots, \gamma_n \subset g(\alpha)$, рассмотрим треугольник, показанный на Рис.1.

Рис. 1

На прямой $g(\alpha + \phi)$ рассмотрим n отрезков $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$, чьи перпендикулярные проекции на $g(\alpha)$ суть начальные отрезки $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Длины γ'_i пусть будут t'_i , а пробелы между γ'_i и γ'_{i+1} обозначим через u'_i . Так как при $\phi \rightarrow 0$, $t'_i - t_i = o(\phi)$ и $u'_j - u_j = o(\phi)$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n - 1$), имеем

$$(5.1) \quad \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{p_{\bar{k}}(\bar{t}', \bar{u}', \alpha + \phi) - p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\phi} = \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha}.$$

Вычислим те же пределы, используя разложения

$$(5.2) \quad \left(\frac{\bar{\gamma}'}{k}\right) = \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n-1} \geq 0} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}'}{k}\right) \cap \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{2n-1} \end{pmatrix} \right),$$

$$(5.3) \quad \left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) = \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n-1} \geq 0} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) \cap \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{2n-1} \end{pmatrix} \right).$$

Лемма 3. (см. [45]).

$$(5.4) \quad \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} = \lim_{\phi \rightarrow 0} \phi^{-1} \left[\sum_{i=1}^{2n-1} P \left(\left(\frac{\bar{\gamma}'}{k}\right) \cap \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \right) - P \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) \cap \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right].$$

Имеем разложение

$$(5.5) \quad \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \cap R \cup \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \cap L,$$

где R – событие $\{\Psi \in (0, \pi/2)\}$ and $L = \{\Psi \in (\pi/2, \pi)\}$.

Замечание 2. Обозначения R и L имеют смысл возможной кинематической интерпретации углов как скоростей точек, движущихся вдоль прямой $g(\alpha)$. Таким образом, R соответствует движению **вправо**, L – **влево**.

Используя (5.4), (5.5) и

$$(5.6) \quad P \left(\begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \lambda(\alpha + \pi/2) y_i \phi + o(\phi), \quad i = 1, \dots, 2n-1,$$

где y_i – координата основания v_i на $g(\alpha)$ (см. Рис. 1), получаем

$$(5.7) \quad [\lambda(\alpha + \pi/2)]^{-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n y_{l_i} \left[\mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap R \right) + \mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap L \right) - \mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap R \right) - \mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap L \right) \right] \\ + \sum_{i=1}^n y_{r_i} \left[\mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap R \right) + \mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap L \right) - \mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap R \right) - \mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap L \right) \right].$$

В (5.7) сумма распространяется на отрезки $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, как и выше l_i – левый, а r_i – правый концы отрезка γ_i . Наконец, $\bar{k}_i = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \dots, k_n)$.

Заменим вертикальные окна горизонтальными. Очевидно,

$$\mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap L \right) - \mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i}\right) \cap R \right) = \int \left(I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) [I_R(\Psi) - I_L(\Psi)] \right) d\mathbf{V}_{l_i},$$

где I – индикаторная функция соответствующего события или множества. Применяя Лемму 1 для

$$F(\mathbf{m}, \Psi) = I\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) [I_R(\Psi) - I_L(\Psi)]$$

и соотношение $[I_R(\Psi) - I_L(\Psi)] \cdot |\cot \Psi| = \cot \Psi$, получаем (сравни с [42])

$$\lambda(\alpha + \pi/2) \left[\mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap L \right) - \mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap R \right) \right] = -\lambda(\alpha) \int \left[I\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) \cdot \cot \Psi \right] d\mathbf{H}_{l_i}.$$

При условии (см. §8 ниже)

а) для каждого направления α , последовательность $\{\cot \Psi_i\}$ некоррелирована с числом точек из $\{P_i\}_\alpha$.

оно равно

$$-\lambda(\alpha) \cdot \int \left[I\left(\frac{\bar{\gamma}}{k}\right) \cdot \cot \Psi \right] d\mathbf{H}_{l_i} = -\lambda(\alpha) \cdot \mathbf{H}_{l_i} \left[\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \right] \cdot \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi.$$

Стационарность дает нам возможность использования упрощенной записи

$$\int \cot \Psi \mathbf{H}_{l_i} = \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi.$$

Аналогично, при условии а)

$$\lambda(\alpha + \pi/2) \left[\mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \cap R \right) - \mathbf{V}_{l_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \cap L \right) \right] = \lambda(\alpha) \cdot \mathbf{H}_{l_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \cdot \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi,$$

$$\lambda(\alpha + \pi/2) \left[\mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap R \right) - \mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cap L \right) \right] = \lambda(\alpha) \cdot \mathbf{H}_{r_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cdot \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi,$$

$$\lambda(\alpha + \pi/2) \left[\mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \cap L \right) - \mathbf{V}_{r_i} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \cap R \right) \right] = -\lambda(\alpha) \cdot \mathbf{H}_{r_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \cdot \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi.$$

Подставляя эти формулы в (5.7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} = & \lambda(\alpha) \sum_{i=2}^n \left\{ y_{l_i} \left[\mathbf{H}_{l_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) - \mathbf{H}_{l_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \right] + \right. \\ & \left. + y_{r_i} \left[\mathbf{H}_{r_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) - \mathbf{H}_{r_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k_i} \right) \right] \right\} \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi. \end{aligned}$$

Из (5.1), (5.3) и (5.5) следует

(5.8)

$$\frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} = \left\{ \sum_{i=2}^n y_{l_i} \left[\frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_{i-1}} \right] - \sum_{i=1}^{n-1} y_{r_i} \left[\frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i} \right] - y_{r_n} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_n} \right\} \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi.$$

Лемма 4. (впервые доказано в [41], см. также [42] and [45]).

$$(5.9) \quad \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi = -\frac{\lambda'(\alpha)}{\lambda(\alpha)}.$$

Доказательство: Существует соотношение [42] между $\lambda(\alpha)$ и плотностью первой моментной меры $f(\varphi)$:

$$\lambda(\alpha) = \int_0^\pi |\cos(\varphi - \alpha)| f(\varphi) d\varphi = \int_\alpha^{\alpha+\pi/2} \cos(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi - \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+\pi} \cos(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi.$$

Дифференцируя, получим

$$\lambda'(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+\pi/2} \sin(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi - \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+\pi} \sin(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi.$$

Используя $\Psi = \varphi - \alpha - \pi/2$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\alpha \cot \Psi &= \mathbf{E}_\alpha \cot(\varphi - \alpha + \pi/2) = -\mathbf{E}_\alpha \tan(\varphi - \alpha) \\ &= -\frac{1}{\lambda(\alpha)} \int_0^\pi \tan(\varphi - \alpha) |\cos(\varphi - \alpha)| f(\varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{1}{\lambda(\alpha)} \int_0^\pi \sin(\varphi - \alpha) \operatorname{sign}[\cos(\varphi - \alpha)] f(\varphi) d\varphi \\ &= -\frac{1}{\lambda(\alpha)} \left[\int_\alpha^{\alpha+\pi/2} \sin(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi - \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+\pi} \sin(\varphi - \alpha) f(\varphi) d\varphi \right] = -\frac{\lambda'(\alpha)}{\lambda(\alpha)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Так как $y_{r_i} - y_{l_i} = t_i$ and $y_{r_{i+1}} - y_{r_i} = u_i$, то (5.8) можно переписать в виде

$$(5.10) \quad \frac{\lambda(\alpha)}{\lambda'(\alpha)} \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial \alpha} - \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} - \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i} = 0.$$

Первые интегралы этого однородного в частных производных дифференциального уравнения первого порядка суть

$$\lambda(\alpha) t_i = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \lambda(\alpha) u_j = b_j, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, мы приходим к заключению:

$$(5.11) \quad p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = q_{\bar{k}}(\lambda(\alpha) \bar{t}, \lambda(\alpha) \bar{u}),$$

где $q_{\bar{k}}$ суть некоторые функции от $2n-1$ переменных.

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ. АНАЛИЗ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для $\mathbf{P} \in \text{TI-2}$, комбинаторное разложение (4.3) выполняется с вероятностью $\mathbf{P} = 1$. Таким образом, мы можем усреднить (4.3) относительно распределения $\mathbf{P}$. Для математического ожидания относительно $\mathbf{P}$ будем использовать обозначение $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}$. Величины $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi_i$ ($i = 1, \dots, 4$) зависят от параметра l и при $l \rightarrow 0$ их главные члены имеют порядок l^2 (доказывается методом анализа реализаций). Аналогичное утверждение справедливо для $\mu(A \cap B_{\bar{k}})$ из (4.3). Основываясь на этих фактах, в этом параграфе мы выводим дифференциальное тождество для $p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)$, приравнивая члены, пропорциональные l^2 в правой и левой частях усредненного уравнения (4.3).

Анализ $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\mu(A \cap B_{\bar{k}})$. По теореме Фубини имеем

$$(6.1) \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\mu(A \cap B_{\bar{k}}) = \int_A \mathbf{E}_{\mathbf{P}} I_{\bar{k}}(g) dg = \int_A p_{\bar{k}}(\chi_1(g), \dots, \chi_n(g), \tilde{\alpha}) dg.$$

Здесь $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(g)$ – направление прямой g (так что при $l \rightarrow 0$ множество значений $\tilde{\alpha}$ стягивается к точке α) и

$$(6.2) \quad p_{\bar{k}}(\chi_1(g), \dots, \chi_n(g), \tilde{\alpha}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} I_{\bar{k}}(g) = \mathbf{P}(g \in B_{\bar{k}}) = p_{\bar{k}}(\bar{\chi}(g), \bar{u}(g), \tilde{\alpha}).$$

Используя (2.1), выделим главный член в (6.1)

$$(6.3) \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\mu(A \cap B_{\bar{k}}) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) \cdot \frac{1}{T} \cdot l^2 + o(l^2).$$

Анализ $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi_1(\mathbf{m})$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi_1(\mathbf{m}) = \sqrt{T^2 + l^2} \left[p_{\bar{k}}\left(\frac{\bar{t}}{\cos \phi}, \frac{\bar{u}}{\cos \phi}, \alpha + \phi\right) + p_{\bar{k}}\left(\frac{\bar{t}}{\cos \phi}, \frac{\bar{u}}{\cos \phi}, \alpha - \phi\right) \right] - \\ - 2T p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha), \end{aligned}$$

где $\cos \phi = (1 + l^2/T^2)^{-1/2}$, откуда следует

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi_1(\mathbf{m}) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) \cdot \frac{l^2}{T} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} \frac{t_i}{T} \cdot l^2 + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} \frac{u_i}{T} \cdot l^2 + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} \frac{l^2}{T} + o(l^2). \end{aligned}$$

Анализ $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi_2(\mathbf{m})$. Значение меры m_1 на множестве $[v_1] \cap [v_{2n}]$ равно $f(\alpha) \frac{l^2}{T} + o(l^2)$, следовательно

$$(6.5) \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi_2(\mathbf{m}) = \frac{2f(\alpha)}{T} \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) l^2 + o(l^2),$$

где $\pi_{\bar{k}}(\bar{l}, \bar{u}, \alpha) = \Pi_A \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right)$.

Анализ $\mathbf{E_P} \xi_3(\mathbf{m})$. Нам понадобится следующая простая лемма интегральной геометрии.

Лемма 5. (см. [45]). Пусть x_q, x_r — одномерные координаты точек P_i и P_j на v_q и v_r соответственно, g — прямая, содержащая x_q и x_r . Тогда

$$\int_{v_q} \int_{v_r} |P_i, P_j| I_A(g) dx_q dx_r = \frac{(y_q - y_r)^2}{T} l^2 + o(l^2).$$

Для $P_1 \in v_q$ и $P_2 \in v_r$ имеем

$$I_d(P_1, P_2) - I_s(P_1, P_2) = S(q, r) [I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)],$$

где $S(q, r) = +1$, если y_q — левый конец, а y_r — правый конец γ_r , и $S(q, r) = -1$ в противном случае; $R = (0, \pi/2)$, $L = (\pi/2, \pi)$. По Лемме 5 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E_P} \xi_3(\mathbf{m}) &= \frac{1}{T} \sum_{q < r} (y_q - y_r)^2 c_{q,r,vv} S(q, r) \left[\Delta_{ij}^2 \mathbf{V}_{q,r} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times (R \times R \cup L \times L) \right) \right. \\ (6.6) \quad &\quad \left. - \Delta_{rq}^2 \mathbf{V}_{i,j} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times (L \times R \cup R \times L) \right) \right], \end{aligned}$$

где суммирование распространяется по упорядоченным парам концов $\{y_q\}$ интервалов из системы $\bar{\gamma}$. Мы используем краткие обозначения

$$c_{y_q, y_r, vv} = c_{q,r,vv}, \quad \mathbf{V}_{y_q, y_r} = \mathbf{V}_{q,r}.$$

Анализ $\mathbf{E_P} \xi_4(\mathbf{m})$. Пусть

$$\xi_4(\mathbf{m}) = \sum_{q=1}^{2n} \eta_q(\mathbf{m}),$$

где

$$\eta_q(\mathbf{m}) = \sum_{m=1}^4 \sum_{P_j \in v_q} K(Q_m, P_j),$$

$$K(Q, P) = |Q, P| \cdot I_A(Q, P) [I_d(Q, P) - I_s(Q, P)] \cdot \Delta_i I_{\bar{k}}(Q, P),$$

а Δ_i соответствует отрезку γ_i с концами y_q . Рассмотрим события:

$\begin{pmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ k & 0 \end{pmatrix}$ = вертикальное окно v_q пересекается k прямыми из $\{g_i\}$, а все остальные вертикальные окна (т.е. окна из $\bar{v}_q$) не имеют пересечений;

$\begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A$ = вертикальное окно v_q пересекается одной прямой $g_0 \in \{g_i\}$, которая пересекает, по крайней мере, одно вертикальное окно из $\bar{v}_q$ и ни одна другая прямая из $\{g_i\}$ не пересекает ни одно из вертикальных окон;

$\bigcup_{b \neq q} \begin{pmatrix} v_q & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = вертикальное окно v_q пересекается прямой из $\{g_i\}$ и существует точно одно окно $v_b \neq v_q$, которое пересекается другой прямой из $\{g_i\}$.

Лемма 6. (см. [23] и [42]). Для $\mathbf{P} \in TI\text{-}\mathcal{L}$

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{q=1}^{2n} \left[\begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A \cup_{b \neq q} \begin{pmatrix} v_q & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \right) = 1 - o(l^2).$$

С точностью до случайного слагаемого, математическое ожидание которого есть $o(l^2)$, имеем следующее представление:

$$(6.7) \quad \eta_q(\mathbf{m}) = \eta_{q1}(\mathbf{m}) + \sum_{m=1}^4 \eta_{q2}^{(m)}(\mathbf{m}) + \eta_{qA}(\mathbf{m}) + \sum_{m=1}^4 \sum_{b \neq q} \eta_{qb}^{(m)}(\mathbf{m}),$$

где использованы индикаторные функции I следующих событий:

$$\begin{aligned} \eta_{q1}(\mathbf{m}) &= \sum_{m=1}^4 K(Q_m, P_1) \cdot I \left(\begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right); \\ \eta_{q2}^{(m)}(\mathbf{m}) &= \sum_{P_1, P_2 \in v_q} K(Q_m, P_j) \cdot I \left(\begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right); \\ \eta_{qA}(\mathbf{m}) &= \sum_{m=1}^4 K(Q_m, P_1) \cdot I \left(\begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A \right); \quad \eta_{qb}^{(m)}(\mathbf{m}) = K(Q_m, P_1) \cdot I \left(\begin{pmatrix} v_q & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Анализ $\mathbf{E_P}[\eta_{q1}(\mathbf{m}) + \eta_{qA}(\mathbf{m})]$ (see [42]). Используя $\lambda''(\alpha) + \lambda(\alpha) = 2f(\alpha)$ (см. [32]), получаем

$$(6.8) \quad \mathbf{E_P} \sum_{q=1}^{2n} (\eta_{q1}(\mathbf{m}) + \eta_{qA}(\mathbf{m})) = -4 \frac{f(\alpha)}{T} \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) l^2 + o(l^2).$$

Анализ $\mathbf{E_P} \eta_{qb}^{(m)}(\mathbf{m})$ (см. [42]).

$$(6.9) \quad \mathbf{E_P} \sum_{q=1}^{2n} \sum_{m=1}^4 \sum_{b \neq q} \eta_{qb}^{(m)}(\mathbf{m}) = -2 \mathbf{E_P} \xi_3(\mathbf{m}) - \frac{1}{T} \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) c_{q,b,vv} \Delta_{ij}^2 \Omega(q, b) l^2 + o(l^2),$$

где

$$\Omega(q, b) = \mathbf{V}_{q,b} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times \left(R \times R \bigcup L \times L \right) \right) - \mathbf{V}_{q,b} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times \left(L \times R \bigcup R \times L \right) \right).$$

Анализ $\mathbf{E_P} \eta_{q2}(\mathbf{m})$ (см. [42]).

$$(6.10) \quad \mathbf{E_P} \sum_{q=1}^{2n} \eta_{q2}(\mathbf{m}) = \frac{1}{T} \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) c_{q,q,vv} \Delta_{ii}^2 \Omega(q, q) l^2 + o(l^2).$$

Приравнивая коэффициенты при l^2 , из (6.3) - (6.6) и (6.9), (6.10) получим

$$(6.11) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 2 f(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) + \sum_{i < j} (y_i - y_j)^2 c_{i,j,vv} S(i, j) \Delta_{rq}^2 \Omega(i, j) + \Xi,$$

где

$$(6.12) \quad \Xi = - \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) c_{q,b,vv} \Delta_{ij}^2 \Omega(q, b) + \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) c_{q,q,vv} \Delta_{ii}^2 \Omega(q, q).$$

7. ИНВАРИАНТНОЕ ВЛОЖЕНИЕ. АНАЛИЗ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим прямоугольник R , основанием которого является минимальный отрезок, содержащий $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Пусть T – длина горизонтального основания прямоугольника R , $T = \sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^{n-1} u_i$. Через $D_i \subset R$ обозначим замкнутый прямоугольник, чье основание есть γ_i , вертикальные стороны прямоугольников $D_1, \dots, D_n$ обозначим через $v_1, \dots, v_{2n}$, $|v_1| = \dots = |v_{2n}| = l$ а сторону прямоугольника D_i параллельную γ_i , будем обозначать через γ'_i . Прямую, содержащую отрезки $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ обозначим через $g'(\alpha)$ (см. Рис. 2). Обозначим через d_i , $i = 1, 2$ диагонали прямоугольника R . Пусть $\bar{d}_i = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in})$, где $d_{ij} = d_i \cap D_j$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, 2$. Пробелы на диагонали d_i будем обозначать через $\bar{\delta}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{i(n-1)})$.

Рис. 2.

Используя **T**-инвариантность, получаем

$$\mathbf{P} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) = \mathbf{P} \left(\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{k}} \right) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha), \quad \bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n).$$

Используя формулу Тейлора, получаем, что предел

$$(7.1) \quad \mathbf{L}_2 = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{p_{\bar{k}}(\bar{d}_1, \bar{\delta}_1, \alpha + \phi) + p_{\bar{k}}(\bar{d}_2, \bar{\delta}_2, \alpha - \phi) - 2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\phi^2}$$

равен

$$(7.2) \quad \mathbf{L}_2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2},$$

где ϕ – угол между $g(\alpha)$ и диагональю d_1 .

Тот же предел можно вычислить используя разложения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{d}_i}{k} \right) &= \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n} \geq 0} \begin{pmatrix} \bar{d}_i & v_1 & v_2 & \dots & v_{2n} \\ k & s_1 & s_2 & \dots & s_{2n} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \\ \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) &= \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n} \geq 0} \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & v_1 & v_2 & \dots & v_{2n} \\ k & s_1 & s_2 & \dots & s_{2n} \end{pmatrix}, \\ \left(\frac{\bar{\gamma}'}{k} \right) &= \bigcup_{s_1, \dots, s_{2n} \geq 0} \begin{pmatrix} \bar{\gamma}' & v_1 & v_2 & \dots & v_{2n} \\ k & s_1 & s_2 & \dots & s_{2n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ниже мы будем использовать следующие обозначения:

$\begin{pmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ k & 0 \end{pmatrix}$ = вертикальное окно v_q пересекается k прямыми из $\{g_i\}$, а все другие вертикальные окна (т.е. окна из $\bar{v}_q$) не имеют пересечений;

$\begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A$ = вертикальное окно v_q пересекается одной прямой $g_0 \in \{g_i\}$, которая пересекает, по крайней мере, одно вертикальное окно из $\bar{v}_q$, и ни одна другая прямая из $\{g_i\}$ не пересекает ни одно из вертикальных окон;

$\begin{pmatrix} v_q & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = вертикальное окно v_q пересекается прямой из $\{g_i\}$ и существует точно одно окно $v \neq v_q$ из множества окон $v_1, \dots, v_{2n}$, которая пересекается другой прямой из $\{g_i\}$.

Лемма 7. [45]. Для любого $\mathbf{P} \in TI\text{-}2$ имеем

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{q=1}^{2n} \left[\begin{pmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_q & \bar{v}_q \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A \cup \begin{pmatrix} v_q & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \right) = 1 - o(l^2).$$

Так как $\mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{d}_i & v_1 & \dots & v_{2n} \\ k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & v_1 & \dots & v_{2n} \\ k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, то из Леммы 7 получаем

$$(7.3) \quad \mathbf{L}_2 = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{1}{\phi^2} \left\{ \sum_{q=1}^{2n} \left(\kappa_{q,1} + \kappa_{q,A} + \kappa_{q,2} + \sum_{b \neq q} \kappa_{q,b} \right) \right\},$$

где использованы следующие обозначения

$$\kappa_{q,m} = \sum_{i=1,2} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{d}_i & v_q & \bar{v}_q \\ k & m & 0 \end{pmatrix} - \mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & v_q & \bar{v}_q \\ k & m & 0 \end{pmatrix} - \mathbf{P} \begin{pmatrix} \bar{\gamma}' & v_q & \bar{v}_q \\ k & m & 0 \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2,$$

$$\kappa_{q,A} = \sum_{i=1,2} \mathbf{P} \left(\begin{pmatrix} \bar{d}_i \\ k \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A \right) - \mathbf{P} \left(\begin{pmatrix} \bar{\gamma} \\ k \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A \right) - \mathbf{P} \left(\begin{pmatrix} \bar{\gamma}' \\ k \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A \right),$$

$$\begin{aligned} \kappa_{q,b} = \sum_{i=1,2} \mathbf{P} \left(\begin{array}{cccc} \bar{d}_i & v_q & v_b & \overline{v_q, v_b} \\ \bar{k} & 1 & 1 & \bar{0} \end{array} \right) - \mathbf{P} \left(\begin{array}{cccc} \bar{\gamma} & v_q & v_b & \overline{v_q, v_b} \\ \bar{k} & 1 & 1 & \bar{0} \end{array} \right) - \\ - \mathbf{P} \left(\begin{array}{cccc} \bar{\gamma}' & v_q & v_b & \overline{v_q, v_b} \\ \bar{k} & 1 & 1 & \bar{0} \end{array} \right). \end{aligned}$$

По отдельности проанализируем слагаемые $\kappa_{q,1}$, $\kappa_{q,2}$, $\kappa_{q,A}$ и $\kappa_{q,b}$.

Анализ $\kappa_{q,1}$ и $\kappa_{q,A}$.

Величина $\sum_{q=1}^{2n} (\kappa_{q1} + \kappa_{qA})$ имеет порядок l^2 . А именно

$$(7.4) \quad \sum_{q=1}^{2n} (\kappa_{q1} + \kappa_{qA}) = -2f(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) l^2 + o(l^2),$$

где $\pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = \Pi_A \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right)$.

Анализ $\kappa_{q,b}$. Анализ разбивается на случаи, зависящие от положений точек пересечения $x_q \in v_q$ и $x_b \in v_b$ относительно подразбиений v_q и v_b диагоналями прямоугольника R .

Ниже используем $S(q, b) = +1$, если $y_q = l_i$ (левый конец отрезка γ_i) и $y_b = r_j$ (правый конец отрезка γ_j), и наоборот. В противном случае $S(q, b) = -1$. Также мы будем использовать обозначения для углов $\Theta_a = \{\Psi \in (0, \pi/2)\}$ (острые углы), $\Theta_o = \{\Psi \in (\pi/2, \pi)\}$ (тупые углы).

Величина $\sum_{q=1}^{2n} \sum_{b \neq q} \kappa_{qb}$ имеет порядок l^2 . А именно

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{2n} \sum_{b \neq q} \kappa_{qb} = \sum_{q < b} (y_q - y_b)^2 c_{q,b,vv} S(q, b) \left[\Delta_{ij}^2 \mathbf{V}_{q,b} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times (\Theta_a \times \Theta_a \cup \Theta_o \times \Theta_o) \right) \right. \\ \left. - \Delta_{bq}^2 \mathbf{V}_{i,j} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times (\Theta_o \times \Theta_a \cup \Theta_a \times \Theta_o) \right) \right] \end{aligned}$$

$$(7.5) \quad -\frac{1}{T} \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) c_{q,b,vv} \Delta_{ij}^2 \Omega(q, b) l^2 + o(l^2),$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(q, b) = \mathbf{V}_{q,b} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times (\Theta_a \times \Theta_a \cup \Theta_o \times \Theta_o) \right) - \\ - \mathbf{V}_{q,b} \left(\left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \times (\Theta_o \times \Theta_a \cup \Theta_a \times \Theta_o) \right). \end{aligned}$$

Анализ $\kappa_{q,2}$.

Величина $\sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q,2}$ имеет порядок l^2 . А именно

$$(7.6) \quad \sum_{q=1}^{2n} \kappa_{q,2} = \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) c_{q,q,vv} \Delta_{ii}^2 \Omega(q, q) l^2 + o(l^2).$$

Приравнивая коэффициенты при слагаемых порядка l^2 , из (7.2), (7.4)-(7.6), получаем

$$(7.7) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} = -2f(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) + \sum_{i < j} (y_i - y_j)^2 c_{i,j,vv} S(i, j) \Delta_{rq}^2 \Omega(i, j) + \Xi,$$

где

$$(7.8) \quad \Xi = - \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) c_{q,b,vv} \Delta_{ij}^2 \Omega(q, b) + \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) c_{q,q,vv} \Delta_{ii}^2 \Omega(q, q).$$

8. УСЛОВИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ

Рассмотрим уравнения (5.7), (7.7) при наличии следующих условий на вероятностное распределение $\mathbf{T}$ -инвариантного $\{P_i, \Psi_i\}_\alpha$:

а) Для каждого направления α , последовательность $\{\cot \Psi_i\}$ некоррелирована с числом точек из $\{P_i\}_\alpha$ (см. §5).

б) Последовательность $\{\cot \Psi_i\}$ есть последовательность некоррелированных случайных величин.

с) $\{g_i\}$ удовлетворяет так называемому условию “достаточного перемешивания”, а именно, точечные процессы, индуцированные на тестовой прямой направления α и на “типичной” прямой из $\{g_i\}$ с тем же направлением, имеют одно и то же распределение.

Как показано в [41], решая эти два уравнения, при выполнении условий а), б) и с) следует пуассоновость одномерных распределений $p_k(t, \alpha)$.

В работах [42] и [45] исследовались многомерные вероятности $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$. Так как вероятностное распределение случайного точечного процесса $\{P_i\}_\alpha$ полностью определяется величинами $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$, $n \geq 1$ (см. [24]), изучение величин $p_{\bar{k}}(\bar{\gamma}, \alpha)$ приводит к утверждениям единственности, касающихся вероятностных распределений точечных процессов $\{P_i\}_\alpha$ или даже $\{g_i\}$.

Используя Лемму 2 для

$$F(\mathbf{m}, \Psi_1, \Psi_2) = I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cdot [I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)],$$

произведения $c_{i,j,vv} \Omega(i, j)$ в (6.10), (6.11) можно записать в терминах горизонтальных окон. Получаем

$$(8.1) \quad c_{i,j,vv} \Omega(i, j) = c_{i,j,hh} \times \int \left(I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) [I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)] \right) d\mathbf{H}_{i,j} |\cot \Psi_1 \cdot \cot \Psi_2|.$$

Вместе с элементарным тождеством

$$[I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)] |\cot \Psi_1 \cdot \cot \Psi_2| = \cot \Psi_1 \cdot \cot \Psi_2,$$

из (8.1) и из факторизационных условий а) и б) вытекает

$$(8.2) \quad c_{i,j,vv} \Omega(i, j) = c_{i,j,hh} \left[\int \left(I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cot \Psi_1 \cot \Psi_2 \right) d\mathbf{H}_{i,j} \right], \\ = \int \left(I \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \cot \Psi_1 \cot \Psi_2 \right) d\mathbf{H}_{i,j} =$$

$$(8.3) \quad \mathbf{H}_{i,j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \mathbf{E}_{i,j,hh} (\cot \Psi_1 \cot \Psi_2) = \frac{\lambda'(\alpha)^2}{\lambda(\alpha)^2} \mathbf{H}_{i,j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right),$$

Докажем, что при выполнении условий а) и б) выражение $\Xi = 0$. Действительно, используя обобщенные формулы Пальма, получаем

$$\Xi = - \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \sum_{b \neq q} S(q, b) \left[\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_u} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_j \partial u_\nu} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_u \partial u_\nu} \right] \\ + \sum_{q=2}^{2n-1} y_q (T - y_q) \left[\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_i} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_{i-1}} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_{i-1}} \right],$$

где в двойных суммах, $u = i$, если $q = r_i$ и $u = i - 1$, если $q = l_i$. Аналогично, $v = j$, если $q = r_j$ и $v = j - 1$, если $q = l_j$.

Для любого $i \neq j$, наличие множителя $S(q, b)$ обращает в нуль члены, соответствующие $b = l_j$ и $b = r_j$. Также в двойной сумме, если $i = j$, то y_q и y_b суть концы одного и того же интервала γ_i , поэтому $S(q, b) = S(b, q) = +1$. Так как частные производные в первой и во второй строчках выражения Ξ встречаются с разными знаками, то получаем $\Xi = 0$.

Остается преобразовать слагаемое

$$\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{i < j} (y_i - y_j)^2 c_{i,j,vv} S(i, j) \Delta_{rq}^2 \mathbf{H}_{i,j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) \\ = \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{\substack{\gamma_i, \gamma_j \\ i < j}} \left[(y_{l_i} - y_{r_j})^2 c_{l_i, r_j, hh} \Delta_{ij}^2 \mathbf{H}_{l_i, r_j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{k} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (y_{r_i} - y_{l_j})^2 c_{r_i, l_j, hh} \Delta_{ij}^2 \mathbf{H}_{r_i, l_j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \Big] \\
& - \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{\substack{\gamma_i, \gamma_j \\ i < j}} \left[(y_{r_i} - y_{r_j})^2 c_{r_i, r_j, hh} \Delta_{ij}^2 \mathbf{H}_{r_i, r_j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) + \right. \\
& \quad \left. + (y_{l_i} - y_{l_j})^2 c_{l_i, l_j, hh} \Delta_{ij}^2 \mathbf{H}_{l_i, l_j} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right) \right] \\
& + \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \sum_{i=1}^n t_i^2 c_{l_i, r_i, hh} \Delta_{ii}^2 \mathbf{H}_{l_i, r_i} \left(\frac{\bar{\gamma}}{\bar{k}} \right).
\end{aligned}$$

Используя (6.7), (6.9)-(6.11) и

$$\begin{aligned}
& -(y_{l_i} - y_{l_j})^2 - (y_{r_i} - y_{r_j})^2 + (y_{r_i} - y_{l_j})^2 + (y_{l_i} - y_{r_j})^2 = 2 t_i t_j, \\
& -(y_{r_i} - y_{r_j})^2 + (y_{l_i} - y_{r_j})^2 - (y_{l_i} - y_{l_{j+1}})^2 + (y_{r_i} - y_{l_{j+1}})^2 = -2 t_i u_j, \\
& -(y_{r_i} - y_{r_j})^2 + (y_{r_i} - y_{l_{j+1}})^2 + (y_{l_{i+1}} - y_{r_j})^2 - (y_{l_{i+1}} - y_{l_{j+1}})^2 = 2 u_i u_j
\end{aligned}$$

вышеупомянутое слагаемое можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_j^2} u_j^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} t_i t_j \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_j} t_i u_j + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j \right].
\end{aligned}
\tag{8.4}$$

Таким образом, при выполнении условий а), б) формула (7.7) принимает вид

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 2 f(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i \pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) \\
& + \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_j^2} u_j^2 \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} t_i t_j + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_j} t_i u_j + 2 \sum_{i \neq j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j \right].
\end{aligned}
\tag{8.5}$$

УСЛОВИЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Теперь дополнительно предположим, что выполняется условие с). Аналитически оно имеет вид

$$\pi_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha),$$

и выражение (8.5) сводится к дифференциальному уравнению. Решая это уравнение вместе с начальными условиями

$$p_{\bar{0}}(\bar{0}, \bar{u}, \alpha) = 1 \quad \text{и} \quad p_{\bar{k}}(\bar{0}, \bar{u}, \alpha) = 0, \quad \text{если} \quad \bar{k} \neq \bar{0},$$

приходим к следующей теореме.

Теорема 2. Пусть для случайного процесса прямых $\{g_i\}$ из класса $TI-2$, маркированный точечный процесс $\{P_i, \Psi_i\}_\alpha$ удовлетворяет условию а). Если для некоторого направления α выполнены условия б) и с), то для того же значения α точечный процесс $\{P_i\}_\alpha$ пуассоновский, т.е.

$$p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = \prod_{i=1}^n \frac{[\lambda(\alpha) t_i]^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda(\alpha) t_i}.$$

Доказательство: Используя $p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha) = q_{\bar{k}}(\lambda(\alpha) \bar{t}, \lambda(\alpha) \bar{u})$, см. (5.11), находим

$$(8.6) \quad \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial t_i} = \lambda(\alpha) \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial t_i}, \quad \frac{\partial p_{\bar{k}}}{\partial u_i} = \lambda(\alpha) \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial u_i},$$

и

$$(8.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}(\bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} &= \lambda''(\alpha) \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial u_i} u_i \right] \\ &+ [\lambda'(\alpha)]^2 \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial t_i^2} t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial u_j^2} u_j^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} t_i t_j \right. \\ &\left. + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 q_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_j} t_i u_j + 2 \sum_{i \neq j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j \right]. \end{aligned}$$

Подставляя (8.6) и (8.7) в (8.5) и используя $\lambda''(\alpha) + \lambda(\alpha) = 2f(\alpha)$ (см. [32]), получим уравнение для функций $q_{\bar{k}}$:

$$(8.8) \quad [\lambda(\alpha)]^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial t_i} t_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial q_{\bar{k}}}{\partial u_i} u_i \right] = - \sum_{i=1}^n t_i \Delta_i q_{\bar{k}}.$$

Это уравнение не содержит производных по α . В терминах производящих функций

$$\Phi(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} q_{\bar{k}}(\lambda(\alpha) \bar{t}, \lambda(\alpha) \bar{u}) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}$$

(8.8) запишется в виде

$$(8.9) \quad \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial \Phi}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = \lambda(\alpha) \left[\sum_{i=1}^n t_i (z_i - 1) \Phi \right].$$

Решим (8.9) для начальных условий

$$\Phi(z_1, \dots, z_n; 0, \dots, 0; u_1, \dots, u_{n-1}) \equiv 1.$$

Для пуассоновского $\{P_i\}_a$ имеем

$$\Phi(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}) = \exp \left[\lambda(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i (z_i - 1) \right],$$

и легко проверить, что это выражение удовлетворяет (8.9). Следовательно, функция

$$\begin{aligned} \exp \left[-\lambda(\alpha) \sum_{i=1}^n t_i (z_i - 1) \right] \Phi(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}) = \\ = F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}) \end{aligned}$$

удовлетворяет

$$(8.10) \quad \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial F}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial F}{\partial u_i} = 0$$

и начальным условиям

$$F(z_1, \dots, z_n; 0, \dots, 0; u_1, \dots, u_{n-1}) \equiv 1.$$

Это хорошо известное уравнение Эйлера для однородных функций порядка 0. Каждое решение уравнения (8.10) при $k > 0$ имеет свойство

$$F(z_1, \dots, z_n; k t_1, \dots, k t_n; k u_1, \dots, k u_{n-1}) = F(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_n; u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Среди них только $F(\bar{t}, \bar{z}) \equiv 1$ удовлетворяет (8.10). Теорема доказана.

9. ОДНОРОДНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ МОЗАИКИ

Метод интегрирования комбинаторных разложений может быть использован для нахождения распределения длины типичного ребра направления α для **T**-инвариантных случайных мозаик.

Мозаика определяется как разбиение плоскости на непересекающиеся выпуклые ограниченные многоугольники с непустыми внутренностями. Мы будем рассматривать только мозаики, не имеющие узлов типа T . Тогда мозаика полностью определяется множеством его ребер $\{S_i\}$. Случайную мозаику можно определить как случайный процесс ребер, т.е., как процесс отрезков на плоскости с вероятностью 1 являющийся мозаикой (см. [1, 3, 19] и [29]). Мы предполагаем, что математическое ожидание квадрата числа ребер мозаики, пересекающих ограниченное борелевское множество конечно. Следовательно, для случайной мозаики определены такие понятия как вероятность **P** и инвариантность относительно группы. Стандартные понятия (см. [21, 23]) первой и второй моментных мер хорошо известные для случайных полей отрезков также применимы к случайным мозаикам ([21, 25] и [32]). Тем не менее мы кратко напомним их.

Отрезок на плоскости определяется тройкой

$$\delta = (g, t, \tau),$$

где g – прямая, на которой лежит отрезок, t – одномерная координата центра отрезка на прямой g , а τ – длина отрезка δ .

Первая моментная мера $\Lambda_1(\cdot)$ процесса ребер **T**-инвариантной случайной мозаики есть мера в соответствующем пространстве. Если предположим, что $\Lambda_1(\cdot)$ имеет плотность относительно $d\delta = dg dt d\tau$, то она necessarily имеет следующий вид

$$\lambda f(\tau, \varphi) dg dt d\tau = \lambda f(\tau, \varphi) d\delta,$$

где φ – направление прямой g . Полагаем, что плотность f непрерывна.

Для $\Lambda_2(\cdot)$ полагаем, что

$$\int_{\Delta_1} \Lambda_2(d\delta_1 d\delta_2) = f_1(g_1, g_2) dg_1 dg_2$$

где

$$\Delta_1 = \{(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) : \nu_i \cap \delta_i \neq \emptyset, \text{ с несущими прямыми } g_i \in [\nu_i], i = 1, 2\},$$

ν_1, ν_2 суть два параллельных отрезка длины l и расстоянием t .

Обозначим

$$B_0 = \{g \in \mathbb{G} : R \cap g \text{ не пересекается ни одним ребром мозаики}\} \text{ и } A = [\nu_1] \cap [\nu_2].$$

Для $\mu(B_0 \cap A)$ запишем комбинаторное разложение (4.3) (для $n = 1$), причем все слагаемые остаются неизменными за исключением слагаемого $\xi_2(\mathbf{m})$, который надо заменить на

$$\xi_2(\mathbf{m}) = -2 \sum_i |\chi_i| I_A(\chi_i),$$

где χ_i – хорды прямоугольника R , порожденные ребрами, а множество $\{P_i\}$ состоит из точек пересечения ребер с ∂R .

Вычисления аналогичные тем, что были проделаны в §§6-8, приводят к следующему выражению для

$$P(|\tau| > t, \alpha) = \int_t^\infty f(\tau, \alpha) d\tau$$

т.е. вероятности, что длина типичного ребра случайной мозаики имеющей направление α будет больше, чем t (см. [30]):

$$P(|\tau| > t, \alpha) = \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial^2 p_0(t, \alpha)}{\partial t^2} + \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \frac{\partial^2 p_0(t, \alpha)}{\partial \alpha^2} \right]$$

$$(9.1) \quad -t \int_0^\pi \int_0^\pi \Pi_{\Psi_1, \Psi_2, t} \left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \right) [I_d - I_s] f_1(t, \alpha, \Psi_1, \Psi_2) \sin \Psi_1 \sin \Psi_2 d\Psi_1 d\Psi_2,$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{\Psi_1, \Psi_2, t} \left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \right) f_1(t, \alpha, \Psi_1, \Psi_2) \sin \Psi_1 \sin \Psi_2 d\Psi_1 d\Psi_2 = \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Delta_1} \Pi_{\Psi_1, \Psi_2, t} \left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \right) \Lambda_2(d\delta_1 d\delta_2), \end{aligned}$$

$f_1(t, \alpha, \Psi_1, \Psi_2)$ – плотность второй моментной меры маркированного точечного процесса пересечений $\{P_i, \Psi_i\}_\alpha$ на тестовой прямой направления α , $\Pi_{\Psi_1, \Psi_2, t} \left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \right)$ – условная вероятность события $\left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \right)$ при условии, что $|P_1, P_2| = t$, а марки в точках P_1 и P_2 равны Ψ_1 и Ψ_2 , соответственно, причем $p_0(t, \alpha) = \mathbf{P} \left(\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} \right)$.

Если случайная мозаика и изотропна, то

$$\frac{\partial^2 p_0(t, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 0,$$

и из (9.1) вытекает соотношение найденное в работе [29] (см. также [3] и [21]). В общем случае не проводился анализ уравнения (9.1). Можно только заметить, что распределение длины типичного ребра мозаики в направлении α_0 можно вычислить, используя значения $p_0(t, \alpha)$ только в некоторой окрестности направления α_0 и распределение маркированного точечного процесса $\{P_i, \Psi_i\}_\alpha$ на тестовой прямой направления α_0 .

10. СТЕРЕОЛОГИЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Булевы модели определяются как объединение областей, принадлежащих процессу случайных выпуклых областей, инвариантному относительно группы евклидовых движений плоскости. Процесс выпуклых областей на $\mathbb{R}^2$ можно определить как точечный процесс в пространстве плоских выпуклых областей. Если в этом пространстве задана некоторая мера, то мы можем говорить о пуассоновском процессе выпуклых областей и соответствующей “булевой модели” (см. [33]). Пуассоновские булевы модели принадлежат классу более общих “эргодических булевых” моделей, определенных как объединения выпуклых областей из случайного процесса областей, обладающих определенными свойствами эргодичности (см. [19] и [21]).

Для удобства, объединение выпуклых областей назовем черным множеством, а его дополнение – белым. Результат, полученный в [19, 21], касается случайных чередующихся последовательностей черно-белых маркированных интервалов, индуцированных на тестовых прямых. Марками вновь являются углы пересечения между тестовой прямой и границей двумерной раскраски. Чередующийся процесс маркированных интервалов на прямой называется рекуррентным, если черные маркированные интервалы независимы, а длины белых интервалов образуют независимую последовательность независимых случайных величин. Подчеркнем асимметричность этого определения. Рекуррентность процесса означает, что белые интервалы независимы от их длин, причем существует возможность, чтобы углы и длины каждого черного маркированного интервала были бы зависимы. Внутри этой структуры получаем и другой случай “принципа независимых углов”: из рекуррентности черных интервалов следует экспоненциальность распределения длины типичного белого интервала на тестовой прямой. Отметим, что в книге Матерона ([11], стр. 140) также приводятся некоторые условия экспоненциальности белого интервала, однако условия из [21] носят совершенно иной характер.

Раскраски четырехугольников. Получим интегро-геометрический результат, касающийся неслучайных раскрасок ограниченных выпуклых четырехугольников.

Пусть $\mathbf{m}$ – открытое черное множество на плоскости, граница которого есть объединение прямолинейных отрезков. Дополнение к $\mathbf{m}$ – белое. Положим

$$\mathbf{m}_R = \mathbf{m} \cap K_R,$$

где K_R – круг радиуса R с центром в начале координат.

Множество $\mathbf{m}_R$ может состоять из нескольких связных (не обязательно выпуклых) компонент; каждая компонента может иметь белые многоугольные дырки, которые могут быть окружены черными многоугольными островками. Единственное требование на $\mathbf{m}$ состоит в том, что число сторон, составляющих границу множества $\mathbf{m}_R$ конечно для любого R .

Ниже предположим, что на любой тестовой прямой $g \subset \mathbb{R}^2$ одномерная раскраска, индуцированная множеством $\mathbf{m}$ обладает определенными свойствами эргодичности. Так мы предполагаем, что математическое ожидание $f(T)$ типичного белого интервала T на тестовой прямой для любой функции f можно вычислить как предел суммы

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T_n),$$

где T_n – белые интервалы на ограниченном отрезке из g , длина которого стремится к бесконечности.

Очевидно

$$(10.1) \quad \int_{[K_R]} \sum_{n=1}^N f(T_n) dg = \sum_{r < s} \int_{[a_r] \cap [a_s]} I_{A_{rs}}(g) f(T^{(r,s)}) dg.$$

Здесь a_r и a_s суть стороны области $\mathbf{m}_R$, а $T^{(r,s)}$ – длина интервала на g , ограниченного точками из a_r и a_s . Полагаем $I_{A_{rs}}(g) = 1$, если этот интервал полностью белый и нулю в противном случае. Рассмотрим интеграл

$$(10.2) \quad \int_{[a_1] \cap [a_2]} I_A(g) f(T) dg,$$

где $A = A_{12}$, $T = T^{(1,2)}$. Интеграл (10.2) зависит от раскраски минимальной выпуклой оболочки D натянутой на отрезки a_1 и a_2 , т.е. множества $\mathbf{m}_{12} = D \cap \mathbf{m}$. Положим $B = [a_1] \cap [a_2] \cap A$, так что

$$\int_{[a_1] \cap [a_2]} I_{A_{12}}(g) f(T) dg = \int_{[D]} I_B(g) f(T) dg.$$

Результат для четырехугольника имеет следующий вид:

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \int_B [f(T) - f'(T)T \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] dg = & - \sum_{a \in \partial \mathbf{m}_{12}} |a| f(T) I_{\partial B}(a) - \sum_{Q_i, Q_j \text{ type } s} |s| f(T) I_{\partial B}(s) \\ & + \sum_{Q_i, Q_j \text{ type } d} |d| f(T) I_{\partial B}(d) - \frac{1}{2} \sum_k \int_{\Phi_k} f'(T) (x_1 - x_2) (x_1 \cot \beta_1 - x_2 \cot \beta_2) I_{\partial B}(T) d\phi \\ & + \sum_{P_i, Q_j \text{ type } s} |s| f(T) I_{\partial B}(s) - \sum_{P_i, Q_j \text{ type } d} |d| f(T) I_{\partial B}(d) - \sum_{P_i, P_j \text{ type } s} |s| f(T) I_{\partial B}(s) \\ & + \sum_{P_i, P_j \text{ type } d} |d| f(T) I_{\partial B}(d) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{[P_i]} f'(T) T^2 \cot \beta I_{\partial B}(T) d\phi, \end{aligned}$$

где $\{P_i\}$ – множество концов отрезков a_1 и a_2 , $\{Q_i\}$ – множество вершин границы $\partial(\mathbf{m})_{12}$, углы α_1 и α_2 лежат в одной полуплоскости относительно T . Область интегрирования Φ_k – множество тех значений ϕ , для которых хорда T из пучка $[Q_k]$ не пересекается с черным множеством. Пара P_i, P_j – типа d (типа s), если a_1 и a_2 лежат в разных (одной и той же) полуплоскостях (полуплоскости) относительно прямой g_{ij} (g_{ij} – прямая, проходящая через точки P_i и P_j). Правило знаков в случае слагаемых $P_i P_j$ такое же как и для слагаемых $Q_i Q_j$. Отметим изменение правила знаков для слагаемых соответствующих парам $P_i Q_j$. Обозначения, использованные в последних слагаемых показаны на Рис. 3.

Рис. 3.**Суммирование по четырехугольникам.**

При вычислении суммы (10.3) мы не выписывали в явной форме слагаемые, вклад которых имеет порядок $o(R^2)$ при $R \rightarrow \infty$. Этим путем мы освобождаемся от “краевых эффектов”.

Суммируя по четырехугольникам из многоугольной раскраски в K_R , получаем (при $R \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned}
 & \int_{[K_R]} \sum_i [f(T_i) - f'(T_i) T_i \cot \alpha_1^{(i)} \cot \alpha_2^{(i)}] dg \\
 &= \int_{\partial^0 \mathbf{m}_R} [f(x_1) + f(x_2) - f(x_1 + x_2) + \frac{1}{2} x_1 f'(x_1) + \frac{1}{2} x_2 f'(x_2)] dl \\
 &+ \sum_{\text{strings in } K_R} [f(x_1 + \rho) + f(x_2 + \rho) - f(\rho) - f(x_1 + x_2 + \rho)] [I_s - I_d] \rho \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial^0 \mathbf{m}_R} [f'(x_1 + x_2) (x_1 - x_2) (x_1 \cot \beta_1 - x_2 \cot \beta_2) - \\
 &\quad - \sum_{i=1,2} f'(x_i) x_i^2 \cot \beta_i] \kappa dl + o(R^2),
 \end{aligned}
 \tag{10.4}$$

где $\partial^0 \mathbf{m}_R = \partial \mathbf{m} \cap K_R$ есть граница с исключением ∂K_R . Заметим, что для справедливости (10.4), нужно предположить, что $\partial \mathbf{m}_R$ не имеет прямолинейных отрезков. Обозначения показаны на Рис. 3.

Эргодические случайные процессы областей.

На этой стадии требуется, чтобы реализации с вероятностью 1 обладали бы необходимыми свойствами на бесконечности (при $R \rightarrow \infty$). В частности, математическое ожидание случайных величин, определенных на случайных касательных прямых или шкивах, можно представить в виде пределов математических

ожиданий, вычисленных относительно распределения маркированной случайной раскраски, индуцированной на прямой. Справедливость такой “интегральной геометрии в малом” можно вывести из принципа ограниченной сходимости (см. [19] и [21]).

При выводе уравнения (10.4) предположили, что можно пренебречь граничными эффектами, т.е. что множество $\mathbf{m}$ обладает следующим свойством (см. [21]):

Свойство 1. Тотальный вклад “лежащих близко” к границе ∂K_R есть $o(R^2)$ при $R \rightarrow \infty$.

Важным вопросом является существуют ли случайные множества $\mathbf{m}$, удовлетворяющие с вероятностью 1 Свойству 1. Возможно простейшим примером таких случайных множеств являются булевы модели, порожденные некоторым случайным процессом выпуклых областей инвариантных относительно группы $\mathbf{M}$.

Анализ показывает, что с вероятностью 1, реализации пуассоновской булевой модели $\mathbf{m}$ обладают также и другими свойствами эргодического типа, из которых мы отметим следующие:

Свойство 2. Главные значения (в обычном смысле анализа) трех функций (скажем, F_1, F_2, F_3) при интегрировании и суммировании знаков в правой части (10.4) при $R \rightarrow \infty$ сходится к пределу, который не зависит от реализации. Обозначим эти пределы через

$$\mathbf{E}_{dl} F_1, \quad \mathbf{E}_{\kappa dl} F_2, \quad \mathbf{E}_{\rho} F_3$$

подчеркивая, что они могут быть интерпретированы как математические ожидания некоторой случайной величины F_i . Индексы в знаке математического ожидания $\mathbf{E}$ указывают на меры возникающие при определении соответствующей случайной касательной или шкива.

Свойство 3. Пределы

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{R \rightarrow \infty} \pi^{-1} R^{-2} |\partial^0 \mathbf{m}_R|, \\ \lambda_2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \pi^{-1} R^{-2} \sum_{\text{strings in } K_R} \rho_i, \\ \lambda_1 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \pi^{-1} R^{-2} \int_{\partial^0 \mathbf{m}_R} \kappa dl \end{aligned}$$

существуют и независят от реализации. Эти величины, очевидно, могут быть интерпретированы как некоторые конкретные плотности.

Свойство 4. Для последовательности белых маркированных отрезков

$\{(T_n, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)})\}$ на прямой, пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n=1}^N F(T_n, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}) = \mathbf{E}F(T, \alpha_1, \alpha_2)$$

существуют и не зависят от реализации. Тройка (T, α_1, α_2) определенная этим уравнением называется **типичным белым маркированным отрезком** на тестовой прямой.

Наконец формально, Свойство 4 эквивалентно

$$\int_{[K_R]} \sum_{n=1}^{N(g)} F(T_n, \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}) = \mathbf{E}F(T, \alpha_1, \alpha_2) |\partial^0 \mathbf{m}_R| + o(R^2)$$

при $R \rightarrow \infty$, где $N(g)$ – число белых отрезков на хорде $g \cap K_R$.

Случайную область, удовлетворяющую Свойствам 1 – 4 будем называть **эргодической**. Для булевой модели $\mathbf{m}$ порожденной эргодическим процессом областей, рассмотрим главный член в (10.4), порядка R^2 . Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[f(T) - f'(T) T \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] \\ &= \mathbf{E}_{dl}[f(x_1) + f(x_2) - f(x_1 + x_2) + 1/2 f'(x_1) + 1/2 f'(x_2)] \\ & - \frac{\lambda_1}{\lambda} \mathbf{E}_{\kappa dl}[f'(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)(x_1 \cot \beta_1 - x_2 \cot \beta_2) - \sum_{i=1,2} f'(x_i) x_i^2 \cot \beta_i] \\ (10.5) \quad & - \frac{\lambda_2}{\lambda} \mathbf{E}_{\rho}[f(\rho + x_1 + x_2) + f(\rho) - f(\rho + x_1) - f(\rho + x_2)][I_s - I_d]. \end{aligned}$$

Рекурентность черных интервалов и экспоненциальность.

Некоторые внутренние свойства процессов черно-белых маркированных интервалов, индуцированных на прямых однородными и изотропными булевыми моделями (и удовлетворяющими всем другим общим условиям приведенным выше) могут быть продемонстрированы преобразуя (10.5).

Определение 2. *Чередующаяся последовательность маркированных черно-белых интервалов $\{(J_i, \Psi_1^{(i)}, \Psi_2^{(i)})\}$ и $\{(T_i, \alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)})\}$, индуцированных на тестовой прямой булевой моделью, называется рекурентной, если*

- (a) *случайные последовательности $\{(J_i, \Psi_1^{(i)}, \Psi_2^{(i)})\}$ и $\{T_i\}$ независимы;*
- (b) *члены последовательности $\{(J_i, \Psi_1^{(i)}, \Psi_2^{(i)})\}$ для различных i независимы;*
- (c) *последовательность $\{T_i\}$ длин белых интервалов есть последовательность независимых случайных величин.*

Отметим асимметричность: из свойств (a) и (b) вытекает, что компоненты T , α_1 , α_2 типичного белого маркированного интервала независимы, хотя вполне возможна зависимость в тройке (J, Ψ_1, Ψ_2) , составляющей типичный черный маркированный интервал.

Уравнение (10.5) упрощается в случае рекуррентности маркированного черного интервала. Во-первых,

$$\mathbf{E}[f'(T) T \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] = \mathbf{E}[f'(T) T] \mathbf{E} \cot \alpha_1 \mathbf{E} \cot \alpha_2 = 0,$$

так как α_i имеет плотность $h(\alpha) = 1/2 \sin \alpha$. Во-вторых, второе и третье слагаемые равны нулю. Оставшееся слагаемое в правой части (10.5), при условии рекуррентности маркированных черных интервалов принимает вид

$$\mathbf{E}_{dl} f(x_i) = \mathbf{E} f(T), \quad i = 1, 2;$$

$$\mathbf{E}_{dl} f(x_1 + x_2) = \mathbf{E} f(T_1 + T_2),$$

где T_1 и T_2 – независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением совпадающим с распределением типичного белого интервала длины T .

Эти упрощения позволяют получить следующий результат. Для функции f , получаем

$$f(x) = \exp(-\lambda x), \quad \text{для некоторого } \lambda > 0.$$

Пусть $y(\lambda)$ обозначает преобразование Лапласа распределения случайной величины T :

$$y(\lambda) = \mathbf{E} \exp(-\lambda T).$$

Тогда уравнение (10.4) сводится к дифференциальному уравнению

$$y(\lambda) = [y(\lambda)]^2 - \lambda \frac{dy(\lambda)}{d\lambda},$$

общим решением которого является

$$y(\lambda) = \frac{1}{1 + C \lambda}.$$

Очевидно, только $C > 0$ имеет смысл. Отсюда следует, что длина типичного белого интервала необходимо экспоненциально распределена.

Теорема 3. (см. [19] и [22].) Пусть черное множество $\mathbf{m}$ является булевой моделью, порожденной с помощью эргодического, однородного и изотропного случайного процесса областей, имеющих ограниченные кривизны, для которых вышеупомянутые математические ожидания существуют. Если индуцированная одномерная черно-белая раскраска на тестовой прямой рекуррентна, то распределение длины типичного белого интервала на тестовой прямой экспоненциальное.

В заключении этого параграфа приведем два примера не пуассоновских многоугольных случайных раскрасок, для которых маркированные черные интервалы на тестовых прямых рекуррентны.

Пример 1. Пусть $\{\pi_i\}$ – случайная мозаика плоскости, порожденная однородным и изотропным пуассоновским процессом прямых. Многоугольники π_i независимо раскрашены или черным (с вероятностью p) или белым цветом (с вероятностью $1 - p$). Здесь очевидно имеем экспоненциальное распределение как для белых так и для черных типичных интервалов на тестовой прямой.

Пример 2. Пусть D – типичный многоугольник в мозаике определенной выше, и пусть $D_1, D_2, \dots$ – последовательность независимых случайных многоугольников с тем же распределением как D . Для заданного пуассоновского процесса $\{M_i\}$ в $\mathbf{M}$ управляемого мерой Хаара, положим

$$X = (\cup M_i D_i)^c.$$

Для этого случайного черного множества $\mathbf{m}$, длина типичного белого интервала не имеет экспоненциального распределения, хотя $\mathbf{m}$ индуцирует рекуррентную черную раскраску на тестовых прямых.

Abstract. The paper contains a review of the main results of Yerevan research group in planar stochastic geometry, in particular the second order random geometrical processes using the methods of integration of combinatorial decompositions and invariant imbedding. For the present review we have chosen the results concerning tomography (or stereology) of random processes of lines, random tessellations (mosaics) and Boolean models (not necessarily Poisson) in the plane. The results are obtained either under the assumption of invariance with respect to the group $\mathbf{T}$ of translations, or the group $\mathbf{M}$ of the Euclidean motions of $\mathbb{R}^2$. In each case the marked point processes $\{P_i, \Psi_i\}$ of intersections induced by the random pattern in question on the test lines are studied, where $\{P_i\}$ is the point process of intersections induced on a test line of direction α , the mark Ψ_i is the angle at which the intersection with the

test line of direction α occurs at point P_i . In the case of random line processes, these approaches lead to differential relations between the joint probabilities for the numbers of intersections that occur in disjoint intervals on a test line having direction α , and the first and the second order Palm probabilities of the similar events. By an analysis of these relations, conditions of Poissonity of n -dimensional distributions for any $n \geq 1$ are derived. In the case of random tessellations the distribution of the length of so-called typical edge of direction α is obtained in terms of the probability distribution of the corresponding $\{P_i, \Psi_i\}$. As regards random $\mathbf{M}$ -invariant Boolean models, the present review includes a description of the method based on summation of Pleijel-type identities for the part of the realization within a finite disc and subsequent calculation of the limit when the radius of the disc tends to infinity. An alternating process of marked intervals on a line is called black-recurrent if the black marked intervals are independent and the lengths of the white intervals constitute an independent sequence of independent random variables. One of the earliest results in the field states that black-recurrence implies an exponential distribution for the length of the typical white interval on a test line.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. V. Ambartzumian, "Random fields of segments and random mosaics on a plane", Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., III, 369–381 (1972).
- [2] R. V. Ambartzumian, "A note on pseudo-metrics on the plane," Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Geb. **29**, 25-31 (1973).
- [3] Р. В. Амбарцумян, "О случайных процессах отрезков и случайных мозаиках на плоскости," Теория Вероятностей и Прим. **18** (3), 515-534 (1973).
- [4] R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon-Sylvester problem in $\mathbb{R}^3$," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, verw. Geb. **27**, 53-74 (1973).
- [5] E. F. Harding and D. G. Kendall (Editors), *Stochastic Geometry* (J. Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1974).
- [6] R. V. Ambartzumian, "Convex polygons and random tessellations," in [5], 176-191 (1974).
- [7] R. Davidson, "Construction of line processes: second order properties," in [5], 55-75 (1974).
- [8] R. Davidson, "Line processes, roads and fibers," in [5], 248-251 (1974).
- [9] K. Krickeberg, "Invariance properties of the correlation measure of line processes," in [5], 76-88 (1974).
- [10] F. Papangelou, "On the Palm probabilities of points and processes of lines," in [5], 114-147 (1974).
- [11] Ж. Маттерон, *Случайные Множества и Интегральная Геометрия*, Москва, Мир, (1976).
- [12] Л. А. Сантало, *Интегральная Геометрия и Геометрические Вероятности*, Москва, Наука, (1983).
- [13] R. V. Ambartzumian, "Stochastic geometry from the standpoint of integral geometry," Adv. Appl. Prob. **9**, 792-823 (1977).
- [14] O. Kallenberg, "A counterexample to R. Davidson's conjecture on line processes," Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **82**, 301-307 (1977).
- [15] R. V. Ambartzumian, "On some topological invariants in integral geometry," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebite **44**, 57-69 (1978).
- [16] В. К. Оганян, "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных полей отрезков," Доклады АН Арм.ССР **68**, 150-154 (1979).
- [17] J. Mecke, "An explicit description of Kallenberg's lattice type point process," Math. Nachr. **89**, 185-195 (1979).
- [18] R. V. Ambartzumian, "A synopsis of combinatorial integral geometry," Adv. in Math. **37** (1), 1-15 (1980).
- [19] Р. В. Амбарцумян (Редактор), *Комбинаторные Принципы в Стохастической Геометрии (Сборник статей)*, Издательство АН Арм.ССР, Ереван, 1980.
- [20] В. К. Оганян, "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных полей отрезков," в [19], 81-106 (1980).
- [21] R. V. Ambartzumian, "Stereology of random planar segment processes," Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino **39** (2), 147-159 (1981).
- [22] R. V. Ambartzumian, *Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology* (John Wiley and Sons, Chichester, 1982).
- [23] R. V. Ambartzumian, "Probability distributions in stereology of random geometrical processes," in Recent Trends in Mathematics, Reinhardbrunn (Collection of papers), BSB, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig **50**, 5-12 (1982).
- [24] К. Маттес, Дж. Керстан и Й. Мекке, *Бесконечно Делимые Точечные Процессы* Москва, Наука, (1982).
- [25] O. Kallenberg, *Random Measures* (Akademie Verlag, Berlin, Reading, Mass., 1983).
- [26] R. V. Ambartzumian, W. Weil (editors), *Stochastic Geometry, Geometric Statistics, Stereology* (Teubner Texte zur Mathematik) **65** (1984).
- [27] R. V. Ambartzumian, "Factorization in integral and stochastic geometry," Teubner Texte zur Mathematik, in [26], 14-33 (1984).
- [28] В. К. Оганян, "On Palm distributions of processes of lines in the plane," in [26], 124-132 (1984).
- [29] В. К. Оганян, "О распределении длины типичного ребра случайной мозаики," Известия НАН Армении, серия Математика, **19**, 248-256 (1984).

- [30] V. K. Oganian, "Combinatorial decompositions and homogeneous geometrical processes," *Acta Appl. Math.*, Holland **9** (1 - 2), 71-81 (1987).
- [31] D. Stoyan, W. S. Kendall and J. Mecke, *Stochastic Geometry and its Applications* (John Wiley, Chichester, 1987).
- [32] R. V. Ambartzumian, *Factorization Calculus and Geometric Probability* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [33] Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **27** (5), 1-21 (1992).
- [34] В. К. Оганян и А. Абдалла, "Маркированные точечные процессы пересечений, порожденные случайными процессами прямых," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **28** (5), 67-77 (1993).
- [35] Г. С. Сукиасян, "О порождении мер случайными функциями флагов," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **28** (2), 61-70 (1993).
- [36] Р. В. Амбарцумян и В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **29** (4), 3-51 (1994).
- [37] Р. Г. Арамян, "Порождение мер в пространстве плоскостей и сферические эйлеровы функционалы," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **29** (4), 58-74 (1994).
- [38] R. V. Ambartzumian with the Appendix by V. K. Oganian, "Measure generation by Euler functionals," *Adv. Appl. Prob. (SGSA)* **27**, 606-626 (1995).
- [39] В. К. Оганян и А. Н. Давтян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, II," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **31** (4), 44-73 (1996).
- [40] R. V. Ambartzumian and V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem," *Israel Math. Journal*. **103** (1), 41-65 (1998).
- [41] Р. В. Амбарцумян, "Инвариантное вложение в стохастической геометрии," *Доклады НАН Армении* **98** (3), 185-196 (1998).
- [42] Р. В. Амбарцумян and V. K. Oganian, "Распределения Пальма в анализе однородных случайных процессов прямых на плоскости," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **33** (4), 31-58 (1998).
- [43] А. Н. Давтян, "Валюации в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **33** (4), 59-78 (1998).
- [44] Р. В. Амбарцумян, "Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии: Обзор," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **34** (6), 2-46 (1999).
- [45] В. К. Оганян, "Анализ однородных случайных процессов прямых на плоскости методом инвариантного вложения," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **34** (6), 59-78 (1999).
- [46] Р. В. Амбарцумян, "Валюации в пространствах интегральной геометрии," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **38** (3), 2-15 (2003).
- [47] Р. В. Амбарцумян, "Исчисление хорд и стохастическая геометрия," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **42** (1), 3-27 (2007).
- [48] J. Mecke, W. Nagel and V. Weiss, "Length distributions of edges in planar stationary and isotropic STIT tessellations," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **42** (1), 39-60 (2007).
- [49] Р. В. Амбарцумян, "Интегрирование комбинаторных разложений при наличии коллинеарностей," *Известия НАН Армении, серия Математика*, **43** (1), 3-28 (2008).

Поступила 18 ноября 2007