Известия НАН Армении. Математика, том 42, н. 6, 2007, стр. 71-74

О КРАЙНИХ ТОЧКАХ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. И. ПЕТРОСЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: albpet@xter.net

Аннотация. В банаховом пространстве $H^\infty(U)$ функций, голоморфных и ограниченных в единичном круге U, рассматривается выпуклое подмножество функций $H^\infty(U;K)$, значения которых принадлежат компакту K. При довольно общих условиях на K дается описание крайних точек $H^\infty(U;K)$.

1. Пусть B – банахово пространство, $X \subset B$ – его выпуклое подмножество. Точка x называется крайней для множества X, если она не является собственной выпуклой комбинацией никаких двух различных точек из X. То, что x крайняя точка может быть сформулировано следующим образом: если элемент $t \in B$ таков, что $x+t \in X$ и $x-t \in X$, то $t=0$.

Задаче описания крайних точек выпуклого множества посвящено немало работ. Интерес к этой задаче вызван, в частности, и тем, что во многих случаях крайние точки несут в себе достаточную информацию о геометрии этого множества. Например, в конечномерном пространстве всякое замкнутое ограниченное выпуклое множество является выпуклой оболочкой множества своих крайних точек. В случае произвольного банахова пространства это уже не всегда так: например, единичный шар в пространстве l_1 вообще не имеет ни одной крайней точки. Но если B является сопряженным к некоторому банахову пространству, то, как следует из теоремы Крейна-Мильмана (см., например, [1]), единичный шар в B не только имеет крайние точки, но и этих точек достаточно много в том смысле, что шар является слабым замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек..

В данной работе рассматривается случай, когда B является пространством ограниченных голоморфных функций.

2. Пусть U – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. $U=\{z\in\mathbb{C}\colon\ |z|<1\}$, K – выпуклый компакт на плоскости w, $H^\infty(U)$ – пространство голоморфных и ограниченных в U функций, $H^\infty(U;K)$ – множество функций $f(z)\in H^\infty(U)$, для которых $f(U)\subset K$. Очевидно, что $H^\infty(U;K)$ является выпуклым множеством в $H^\infty(U)$.

Если K – круг $|w|\le 1$, то $H^\infty(U;K)$ является единичным шаром в $H^\infty(U)$, а его крайними точками (см. [2], стр. 197) являеются те и только те функции f, которые удовлетворяют условию

$$\int_0^{2\pi} \log\left(1 - \left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|\right) d\theta = -\infty. \tag{1}$$

Целью данной работы является описание крайних точек множества $H^\infty(U;K)$ для довольно широкого класса выпуклых компактов K, а именно, для компактов, удовлетворяющих условию

(P) *Существует натуральное число n такое, что в каждой точке $\zeta \in \partial K$ существует опорная к K прямая l_ζ и парабола порядка $2n$ с вершиной в ζ, касающаяся l_ζ и такая, что в некоторой окрестности D_ζ точки ζ ветви этой параболы охватывают множество $K \cap D_\zeta$.*

Условие (P) означает, что граница ∂K компакта K в каждой своей точке имеет с опорной прямой соприкосновение порядка не выше $2n-1$. Напомним, что опорной к данному множеству K в данной точке $\zeta \in \partial K$ называется прямая, проходящая через ζ и оставляющая K по одну сторону от себя.

В работе [3] описаны крайние точки множества $H^\infty(U;K)$ для компактов, удовлетворяющих некоторому условию, которое, как легко показать, эквивалентно условию (P) при $n=1$.

На множестве K определим неотрицательную функцию:

$$G(w) = \sup\{|\zeta|:\ w \pm \zeta \in K\}, \quad w \in K. \tag{2}$$

Обозначим через $\rho(w,\partial K)$ расстояние между w и ∂K, т.е.

$$\rho(w,\partial K) = \inf_{t\in\partial K} |w-t|.$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для выпуклых компактов K, удовлетворяющих условию (P), имеет место неравенство*

$$G(w) \le C\,\{\rho(w,\partial K)\}^{\frac{1}{n}}, \qquad w \in K, \tag{3}$$

где C не зависит от w.

Доказательство: Окрестности D_ζ, участвующие в условии (P), покрывают всю границу компакта K. Множество

$$K' = K \setminus \left(\bigcup_{\zeta\in\partial K} D_\zeta\right)$$

компактно внутри K, т.е. $\rho(K',\partial K) > 0$. Ввиду того, что K – компакт, из (2) следует, что функция $G(w)$ ограничена некоторой константой: $G(w) \le M$.

Пусть

$$C = \max\left\{1;\ M\left[\rho\left(K',\partial K\right)\right]^{-1/n}\right\}.$$

Для $w \in K'$ имеем

$$G(w) \le M \le C\left[\rho\left(K',\partial K\right)\right]^{1/n} \le C\left[\rho\left(w,\partial K\right)\right]^{1/n}. \tag{4}$$

В случае $w \in K \setminus K'$ выберем $\zeta_0 \in \partial K$ так, чтобы

$$\rho(w,\partial K) = \rho(w,\zeta_0). \tag{5}$$

Опорная прямая к компакту K через точку ζ_0, очевидно, перпендикулярна к прямой d, соединяющей точки w и ζ_0, иначе на ∂K существовали бы точки, расположенные к w ближе, чем ζ_0, что противоречило бы (5). Проведя соответствующую параболу порядка n с осью d и вершиной ζ_0, убеждаемся, что

$$G(w) \le |w-\zeta|^{1/n} = [\rho\,(w, \partial K)]^{1/n}\,. \tag{6}$$

Объединяя (4) и (6), получаем утверждение (3) леммы для всех точек $w \in K$.

Теорема 1. *Пусть K – выпуклый компакт. Для того, чтобы функция $f(z)$ являлась крайней точкой множества $H^\infty(U,K)$, необходимо, чтобы K удовлетворяло условию*

$$\int_0^{2\pi} \log \rho\left(f\left(e^{i\theta}\right), \partial K\right) d\theta = -\infty, \tag{7}$$

и обратно, если K удовлетворяет условиям (P) и (7), то $f(z)$ является крайней точкой множества $H^\infty(U,K)$.

Доказательство: Необходимость будем доказывать от противного. Пусть интеграл в левой части (7) сходится. Функция

$$h(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log\rho\left(f\left(e^{i\theta}\right), \partial K\right) d\theta\right\} \tag{8}$$

голоморфна и ограничена в круге U и для почти всех θ имеет место равенство $|h(e^{i\theta})| = \rho\big(f(e^{i\theta}), \partial K\big)$. Отсюда следует, что $f(e^{i\theta}) \pm h(e^{i\theta}) \in K$ почти всюду, поэтому $f(z) \pm h(z) \in K$, $z \in U$. Поскольку $h(z) \not\equiv 0$, то, значит, $f(z)$ не является крайней точкой.

Отметим, что в [4] рассмотрен случай, когда K является произвольным выпуклым множеством, отличным от полуплоскости и всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, получено необходимое условие

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{\rho\left(f\left(e^{i\theta}\right), \partial K\right)}{\rho\left(f\left(e^{i\theta}\right), \partial K\right)+1} d\theta = -\infty. \tag{9}$$

В случае, если K ограничено, условия (7) и (9) эквивалентны.

Докажем достаточность. Пусть $g(z)$ голоморфна в U и $f(z) \pm g(z) \in K$. В силу определения (2) функции $G(w)$ имеем $|g(z)| \le G\left(f(z)\right)$. Учитывая (3), получим

$$\left|g\left(e^{i\theta}\right)\right| \le G\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right) \le C\left[\rho\left(f\left(e^{i\theta}\right), \partial K\right)\right]^{1/n}.$$

Логарифмируя и интегрируя полученное неравенство, с учетом (7) будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \log\left|g\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta \le \log C + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \log\rho\left(f\left(e^{i\theta}\right), \partial K\right) d\theta = -\infty.$$

Отсюда следует, что $g(z) \equiv 0$, т.е. $f(z)$ является крайней точкой множества $H^\infty(U;K)$. Доказательство завершено.

Заметим, что в случае, когда K – круг, $\rho\big(f(e^{i\theta}), \partial K\big) = 1 - |f(e^{i\theta})|$ и условие (7) сводится к условию (1).

В работе [4] доказана достаточность условия (7) в случае, когда граница выпуклого компакта K является дважды гладкой кривой и имеет положительную кривизну во всех точках. Отсюда следует, что во всех точках эта кривая имеет со своей касательной соприкосновение порядка не выше первого, поэтому в этом случае K удовлетворяет условию (P). Таким образом, указанный результат в [4], как частный случай, следует из теоремы 1.

3. Теорема 1 имеет место и в случае банахова пространства $A(U)$ непрерывных функций в замкнутом круге, аналитических внутри него. Обозначим через $A(U;K)$ множество всех функций из $A(U)$, значения которых лежат в K.

Теорема 2. *Пусть K – выпуклый компакт. Условие* (7) *является необходимым, а для компактов, удовлетворяющих условию* (P)*, также и достаточным для того, чтобы функция $f(z)$ являлась крайней точкой множества $A(U;K)$.*

Доказательство: Достаточность доказывается так же, как в теореме 1. Чтобы доказать необходимость, нужно обеспечить непрерывность граничных значений функции $h(z)$ в формуле (8). Если $f \in A(U;K)$ и $\log\rho\big(f(e^{i\theta}),\partial K\big)$ интегрируем, то можно выбрать непрерывную функцию u на единичной окружности так, что $0 \le u \le \rho\big(f(e^{i\theta}),\partial K\big)$, $\log u$ интегрируем и u непрерывно дифференцируема на каждой открытой дуге множества, где $f \notin \partial K$. Если положить

$$h(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\log u\,d\theta\right\},$$

то функция h имеет непрерывные граничные значения и удовлетворяет условию $\big|h(e^{i\theta})\big| \le \rho\big(f(e^{i\theta}),\partial K\big)$. Отсюда следует, что $f(e^{i\theta}) \pm h(e^{i\theta}) \in K$ для всех θ, поэтому $f(z) \pm h(z) \in K$, $z \in U$. Поскольку $h(z) \not\equiv 0$, это значит, что $f(z)$ не является крайней точкой множества $A(U;K)$.

Отметим, что в [3] рассмотрен также случай, когда K является выпуклым многоугольником. В этом случае крайних точек у $A(U;K)$ оказывается гораздо меньше: крайними являются те и только те функции $f \in A(U;K)$ $(f \ne \text{const})$, для которых $f(e^{i\theta}) \subset \partial K$, иначе говоря, $\rho\big(f(e^{i\theta}),\partial K\big) \equiv 0$.

Abstract. In the Banach space $H^\infty(U)$ of bounded, holomorphic functions in the unit disc U of the complex plane, the paper considers the subset $H^\infty(U;K)$ of functions that take values in a compact K. A description of the extreme points of $H^\infty(U;K)$ is given under rather general conditions on K.

Список литературы

[1] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке* (Мир, Москва, 1968).

[2] К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций* (ИЛ, Москва, 1963).

[3] H. M. Hilden, “A Characterization of the Extreme Points of Some Convex Sets of Analytic Functions”, Duke Math. J. **37**, 715–723 (1970).

[4] Yu. Abu-Muhanna, Th. H. MacGregor, “Extreme Points of Families of Analytic Functions Subordinate to Convex Mappings”, Math. Zeit. **176**, 511-519 (1981).

Поступила 7 июня 2007