

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Т. В. МАРКАРЯН

Российско-Армянский Университет
E-mail: mar_tiko@yahoo.com

Аннотация. В работе исследуются обобщенные пространства Соболева и дифференциальные операторы в этих пространствах. Найдены необходимые и достаточные условия на многогранник $\mathfrak{R}$ при которых функция $h_{\mathfrak{R}}^s$ при достаточно больших s удовлетворяет условию Берлинга. Эти условия совпадают для многогранников из $\mathbb{R}_+^2$. Также исследуется регулярность решений одного класса дифференциальных операторов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и

$$\mathbb{N}_0^n = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_j \in \mathbb{N}_0, j = 1, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{E}^n$ n -мерные евклидовы пространства точек

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n,$$

$$\mathbb{R}_+^n \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}, \quad \mathbb{R}_0^n = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 \dots \xi_n \neq 0\}.$$

Для точек $\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{E}^n, \nu \in \mathbb{R}_+^n, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$, множеств $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$ и числа $t > 0$ положим

$$\|\xi\| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}, \quad (\xi, x) = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n, \quad |\xi|^\nu = |\xi_1|^{\nu_1} \dots |\xi_n|^{\nu_n},$$

$$t\nu = (t\nu_1, \dots, t\nu_n), \quad |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n, \quad tB_1 = \{t\nu, \nu \in B_1\}$$

$$B_1 \oplus B_2 = \{\nu, \nu = \nu^{(1)} + \nu^{(2)}, \quad \nu^{(j)} \in B_j, j = 1, 2\} \quad \text{and} \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n},$$

$$\text{где либо } D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad \text{либо} \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (i^2 = -1).$$

Далее, через $\Pi(\nu)$ обозначим множество точек такое, что

$$\Pi(\nu) = \{\mu \in \mathbb{R}_+^n : \mu \neq \nu, \mu \neq 0, \text{ для каждого } j (1 \leq j \leq n) \mu_j = \nu_j \text{ либо } \mu_j = 0\}.$$

Определение 1. Говорят, что положительная функция $h : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$:

1. является медленно растущей весовой функцией (МРВФ) (см. определение (0.1.1) из [1]), если существуют положительные числа A и a , для которых

$$(1) \quad h(\xi) \leq Ah(\eta)(1 + \|\xi - \eta\|)^a, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

2. является медленно меняющейся весовой функцией (ММВФ) (см. [2]), если с некоторыми положительными постоянными b, χ и r

$$(2) \quad \chi^{-1}h(\eta) \leq h(\xi) \leq \chi h(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi - \eta\| \leq bh^r(\eta).$$

3. удовлетворяет условию Δ (см., например, [3, 8]) если существуют постоянная $c > 0$ и число $\delta \in [0, 1)$ такие, что

$$(3) \quad h(\xi + \eta) \leq c[h(\xi)h^\delta(\eta) + h^\delta(\xi)h(\eta)], \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

4. удовлетворяет условию Берлинга (Б) (см. [4]), если

$$(4) \quad B_h \equiv \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(\eta)}{h(\eta - \xi)h(\xi)} d\xi < \infty.$$

Определение 2. (см [2] или [5]) Пусть D – конечный набор точек из $\mathbb{R}_+^n$. Характеристическим многогранником (ХМ) набора D называется минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(D)$, содержащий множество $D \cup \{0\}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ через Λ^n обозначим множество всех n -мерных выпуклых многогранников $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$. Для любого $\mathfrak{R} \in \Lambda^n$ через $h_{\mathfrak{R}}(\xi)$ обозначим функцию

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi) = \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi|^\nu,$$

где $\mathfrak{R}^0$ – множество вершин многогранника $\mathfrak{R}$. Нетрудно заметить, что для любых $\mathfrak{R} \in \Lambda^n$ и $\mu \in \mathfrak{R}$ (см., например, [5])

$$(5) \quad |\xi|^\mu \leq h_{\mathfrak{R}^0}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Многогранник $\mathfrak{R} \in \Lambda^n$ называется полным (см., например, [2] или [5]), если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат, и отличные от начала координат вершины на каждой оси координат.

Многогранник $\mathfrak{R} \in \Lambda^n$ называется правильным (вполне правильным), если $\mathfrak{R}$ – полный многогранник и координаты внешних относительно $\mathfrak{R}$ нормалей $(n-1)$ -мерных некоординатных граней неотрицательны (положительны) (см., например, [2, 6]).

Пусть $0 \in \mathfrak{R} \in \Lambda^n$, λ^j $j = 1, \dots, k$ – внешние относительно $\mathfrak{R}$ нормали $(n-1)$ -мерных некоординатных граней многогранника. Тогда

$$\mathfrak{R} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) \leq d_j, \quad j = 1, \dots, k\},$$

где $d_j = \max_{\nu \in \mathfrak{R}} (\nu, \lambda^j) \geq 0$, $j = 1, \dots, k$.

Известно (см. [7]), что многогранник $\mathfrak{R}$ – правильный (вполне правильный) тогда и только тогда, когда для любого $\nu \in \mathfrak{R}^0$

$$(6) \quad \Pi(\nu) \subset \mathfrak{R}, \quad (\Pi(\nu) \subset \mathfrak{R} \setminus \partial \mathfrak{R}),$$

где

$$\partial \mathfrak{R} = \left\{ \nu \in \mathfrak{R} : \max_{1 \leq j \leq k} \{(\nu, \lambda^j) - d_j\} = 0 \right\}.$$

Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$ – многочлен с постоянными коэффициентами, где сумма распространяется по конечному набору $(P) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \gamma_{\alpha} \neq 0\}$. Характеристическим многогранником или многогранником Ньютона многочлена P называется ХМ $\mathfrak{R}(P)$ набора (P) .

Определение 3. (см. [1], определение 11.1.2 и теорему 11.1.3) Многочлен P называется гипозелитическим, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1. Если $d_P(\xi)$ – расстояние от точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ до поверхности $\{\zeta : \zeta \in C^n \equiv \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n, \}$, то $d_P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$.
2. Существуют положительные постоянные c и C такие, что при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\|\xi\|^c \leq C d_P(\xi)$.
3. Для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \neq 0$,

$$\frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \equiv \frac{D^{\alpha} P(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\xi\| \rightarrow \infty.$$

4. Существуют положительные постоянные c и C такие, что при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \frac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)} \right| \leq C \|\xi\|^{-c|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

Определение 4. Скажем, что непрерывная функция $h : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$ удовлетворяет слабому условию Δ , если существуют постоянная $c > 0$, число $k \in \mathbb{N}$, множества $e^j \subset \{1, \dots, n\}$ и функции $h_j(\xi^{e^j})$ ($\xi^{e^j} = (\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_r})$ при $e^j = \{j_1, \dots, j_r\}$ $j = 1, \dots, k$), удовлетворяющие условию Δ в соответствующем подпространстве $\mathbb{R}^r$ такие, что

$$\bigcup_{j=1}^k e^j = \{1, \dots, n\}, \quad \inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} h_j(\xi^{e^j}) > 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

и

$$(7) \quad c^{-1} \prod_{j=1}^k h_j(\xi^{e^j}) \leq h(\xi) \leq c \prod_{j=1}^k h_j(\xi^{e^j}), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 1. (см. [11], лемму 1) Пусть $\mathfrak{R}$ – полный многогранник. Тогда неравенство

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi + \eta) \leq c h_{\mathfrak{R}}(\xi) h_{\mathfrak{R}}(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная, имеет место тогда и только тогда, когда многогранник $\mathfrak{R}$ правильный.

Предложение 1. Если функция $h = h_{\mathfrak{R}}$, порожденная многогранником $\mathfrak{R}$, удовлетворяет слабому условию Δ , то $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно показать, что с некоторой постоянной $c_1 = c_1(h_{\mathfrak{R}}) > 0$ выполняется неравенство

$$h(\xi + \eta) \leq c_1 h(\xi) h(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

Пусть (см. определение 4) $k \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{j=1}^k e^{(j)} = \{1, \dots, n\}$ и $h_j(\xi^{e^{(j)}})$ – функции, удовлетворяющие условию Δ с числами $\delta_j \in [0, 1)$ ($j = 1, \dots, k$), для которых с некоторой постоянной $c_2 > 0$ выполняется оценка (7). Тогда в силу оценки (3) с некоторыми постоянными $c_3, c_4, c_5 > 0$ имеет место

$$\begin{aligned} h(\xi + \eta) &\leq c_2 \prod_{j=1}^k h_j(\xi^{e^{(j)}} + \eta^{e^{(j)}}) \\ &\leq c_2 c_3 \prod_{j=1}^k \left[h_j(\xi^{e^{(j)}}) h_j^{\delta_j}(\eta^{e^{(j)}}) + h_j^{\delta_j}(\xi^{e^{(j)}}) h_j(\eta^{e^{(j)}}) \right] \\ &\leq c_4 \prod_{j=1}^k h_j(\xi^{e^{(j)}}) h_j(\eta^{e^{(j)}}) \leq c_5 h(\xi) h(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Примером функции, удовлетворяющей слабому условию Δ , но не удовлетворяющей условию Δ , может служить функция

$$h(\xi_1, \xi_2) = 1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_2^2 = (1 + \xi_1^2)(1 + \xi_2^2).$$

Для весовой функции $h : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$ и числа $s \in \mathbb{R}^1$, через W_{h^s} , $W_{h^s, loc}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}_{h^s}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ – область, обозначим следующие обобщенные пространства Соболева:

$$\begin{aligned} W_{h^s} &\equiv W_{h^s}(\mathbb{E}^n) = \{f \in S'(\mathbb{E}^n) : h^s F(f) \in L_2(\mathbb{R}^n)\}, \\ W_{h^s, loc} &= \{f \in S'(\Omega) : h^s F(\varphi f) \in L_2(\mathbb{R}^n), \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\} \end{aligned}$$

при этом $\overset{\circ}{W}_{h^s}(\Omega)$ – замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства W_{h^s} . Здесь S' – пространство Шварца обобщенных функций, а F – преобразование Фурье.

В работах [3, 4] и [7]–[9] исследованы некоторые алгебраические свойства обобщенных пространств Соболева W_{h^s} , $W_{h^s, loc}(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}_{h^s}(\Omega)$, когда h – функция, порожденная вполне правильным многогранником, и получены результаты регулярности решений эллиптических относительно h дифференциальных уравнений. В работе [10] в терминах многогранника, а также в терминах свойств функции из пространства $W_{h_{\mathfrak{R}}^s}$ найдены необходимые и достаточные условия, при которых функция $h_{\mathfrak{R}}$ удовлетворяет условию Δ .

Целью настоящей работы является нахождение условия на многогранник $\mathfrak{R} \in \Lambda^n$, при которых функция $h_{\mathfrak{R}}^s$ при достаточно больших s будет удовлетворять условию B , а также исследование регулярности решений одного класса дифференциальных уравнений.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

Лемма 2. *Функция $h = h_{\mathfrak{R}}$ является МРВФ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$ – правильный многогранник. Так как $0 \in \mathfrak{R}$, то для любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ в силу неравенства треугольника и оценки (5) имеем

$$\begin{aligned} h(\xi) &= h(\eta + \xi - \eta) = \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\eta + \xi - \eta|^\nu \\ &\leq \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \left(|\eta|^\nu + |\xi - \eta|^\nu + \sum_{\mu \in \Pi(\nu)} |\eta|^\mu |\xi - \eta|^{\nu-\mu} \right) \\ &= h(\eta) + h(\xi - \eta) + \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \sum_{\mu \in \Pi(\nu)} |\eta|^\mu |\xi - \eta|^{\nu-\mu} \\ &\leq h(\eta) + h(\xi - \eta) + h(\eta) \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \sum_{\mu \in \Pi(\nu)} |\xi - \eta|^{\nu-\mu} \end{aligned}$$

$\leq h(\eta) + c_1(1 + \|\xi - \eta\|)^d + c_2 h(\eta)(1 + \|\xi - \eta\|)^d \leq c_3 h(\eta)(1 + \|\xi - \eta\|)^d$, где c_1, c_2 ($c_1 \geq \text{card } \mathfrak{R}^0$, $c_2 \geq 2^{n-1} \text{card } \mathfrak{R}^0$) – некоторые постоянные, $c_3 = 1 + c_1 + c_2$, а $d = \max_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\nu|$, т.е. h является МРВФ.

Пусть теперь h – МРВФ. Покажем, что $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник. Так как $h : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$, то, очевидно, $0 \in \mathfrak{R}^0$. Покажем (см. (6)), что для любого $\nu \in \mathfrak{R}^0$ имеет место $\Pi(\nu) \subset \mathfrak{R}$. Предположим обратное, что существует $\alpha \in \mathfrak{R}^0$, для которого $\Pi(\alpha) \not\subset \mathfrak{R}$, т.е. существует точка $\nu \in \Pi(\alpha) \setminus \mathfrak{R}$. Пусть, ради определенности, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0)$, $\nu = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \neq 0$, $1 \leq r < k \leq n$. Так как $\mathfrak{R}_r \equiv \{\mu \in \mathfrak{R} : \mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0\}$ выпукло и $\nu \notin \mathfrak{R}_r$, то существует вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$, для которого

$$\rho \equiv \sum_{j=1}^r \nu_j \lambda_j > \max_{\beta \in \mathfrak{R}_r} (\beta, \lambda) \geq 0 \quad (0 \in \mathfrak{R}_r),$$

Пусть $\xi^s = (s^{\lambda_1}, \dots, s^{\lambda_r}, 1, \dots, 1)$, $\eta^s = (s^{\lambda_1}, \dots, s^{\lambda_r}, 0, \dots, 0)$, $s = 1, 2, \dots$. Тогда для любого $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$(8) \quad \|\xi^s - \eta^s\| = (n - r)^{1/2}, \quad h_{\mathfrak{R}}(\xi^s) \geq |\xi^s|^\alpha = s^{\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r} \equiv s^\rho,$$

и

$$h(\eta^s) = \sum_{\beta \in \mathfrak{R}^0} |\eta^s|^\beta = \sum_{\beta \in \mathfrak{R}^0 \cap \mathfrak{R}_r} |\eta^s|^\beta \leq (\text{card } \mathfrak{R}^0) \max_{\beta \in \mathfrak{R}_r} s^{(\beta, \lambda)}.$$

Откуда, для любого числа a , учитывая (8), получаем

$$\frac{h(\xi^s)}{h(\eta^s)} (1 + \|\xi^s - \eta^s\|)^a \rightarrow \infty \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Это противоречит тому, что h – МРВФ. Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник, что завершает доказательство.

Лемма 3. Пусть P – положительный многочлен, $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$. Тогда P является ММВФ тогда и только тогда, когда P гипоеллиптичен.

Доказательство. Пусть многочлен P – ММВФ, удовлетворяющая условиям леммы. Тогда существуют положительные числа c, r и χ такие, что

$$(9) \quad \chi^{-1} \leq \frac{P(\xi)}{P(\eta)} \leq \chi, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi - \eta\| \leq cP^r(\eta).$$

Покажем, что из оценки (9) следует гипоеллиптичность многочлена P . В силу оценки (10.4.1) работы [1] с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$(10) \quad \sup_{\|\eta\| \leq cP^r(\xi)} P(\xi + \eta) \geq c_1 \tilde{P}(\xi, cP^r(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где для данного многочлена Q функция $\tilde{Q}$ определяется формулой

$$\tilde{Q}(\xi, t) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|} \right\}^{1/2}.$$

Из оценки (9) в силу (2) имеем

$$\begin{aligned} \chi &\geq \frac{1}{P(\eta)} \sup_{\|\xi - \eta\| \leq cP^r(\xi)} P(\xi) = \frac{1}{P(\eta)} \sup_{\|\xi - \eta\| \leq cP^r(\xi)} P(\eta + \xi - \eta) \\ &\geq c_1 \frac{\tilde{P}(\eta, cP^r(\eta))}{P(\eta)} \geq c_1 \sum_{\alpha} \left| \frac{P^{(\alpha)}(\eta)}{P(\eta)} \right| (cP^r(\eta))^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Так как по условию леммы $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$, то отсюда получаем, что для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha \neq 0$

$$\left| \frac{P^{(\alpha)}(\eta)}{P(\eta)} \right| \leq \frac{\chi}{c_1} [cP^r(\eta)]^{-|\alpha|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\eta\| \rightarrow \infty,$$

т.е. многочлен P гипоеллиптичен.

Пусть теперь многочлен P , удовлетворяющий условиям леммы, гипоеллиптичен. Покажем, что P является ММВФ. Из определения гипоеллиптичности и условия $P(\xi) > 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ следует, что существуют положительные числа c_2 и r такие, что

$$(11) \quad P^r(\xi) \leq c_2 d_P(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|\xi - \eta\| \leq P^r(\xi)$, используя оценки (10.4.1) и (11.1.2) работы [1], в силу оценки (11) с некоторыми постоянными $c_3, c_4 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} P(\eta) = P(\xi + \eta - \xi) &\leq \sup_{\|\zeta\| \leq P^r(\xi)} P(\xi + \zeta) \leq \sup_{\|\zeta\| \leq c_2 d_P(\xi)} P(\xi + \zeta) \\ &\leq c_3 \tilde{P}(\xi, c_2 d_P(\xi)) \leq c_4 P(\xi), \end{aligned}$$

т.е. при любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|\xi - \eta\| \leq P^r(\xi)$ справедливо неравенство

$$\frac{P(\eta)}{P(\xi)} \leq c_4$$

Из оценки (11.1.2) работы [1] непосредственно следует, что с некоторой постоянной $\chi > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$d_P^{|\alpha|}(\xi) \left| P^{(\alpha)}(\xi) \right| \leq \chi |P(\xi)|.$$

Пусть для числа $t_0 > 0$

$$\sum_{\alpha \neq 0} \frac{(t_0 c_1)^{(\alpha)}}{\alpha!} < 1/2\chi.$$

Тогда в силу формулы Тейлора отсюда для любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|\xi - \eta\| \leq t_0 P^r(\xi) \leq t_0 c_1 d_P(\xi)$ имеем

$$\begin{aligned} P(\eta) &= P(\xi + \eta - \xi) = P(\xi) - \sum_{\alpha \neq 0} \frac{P^{(\alpha)}(\xi)(\xi - \eta)^\alpha}{\alpha!} \geq P(\xi) \\ &- \sum_{\alpha \neq 0} \frac{|P^{(\alpha)}(\xi)| \|\xi - \eta\|^{|\alpha|}}{\alpha!} \geq P(\xi) - \sum_{\alpha \neq 0} \frac{|P^{(\alpha)}(\xi)| (c_1 t_0)^{|\alpha|} d_P^{|\alpha|}(\xi)}{\alpha!} \\ &\geq P(\xi) - \chi P(\xi) \sum_{\alpha \neq 0} \frac{(c_1 t_0)^{|\alpha|}}{\alpha!} \geq \frac{1}{2} P(\xi). \end{aligned}$$

Откуда

$$(12) \quad P(\eta) \geq \frac{1}{2} P(\xi), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi - \eta\| \leq t_0 P^r(\xi).$$

Из оценок (11)-(12) следует, что многочлен P является ММВФ. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть многочлен P такой, что $\tilde{P}(\xi) \equiv \tilde{P}(\xi, 1) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$. Тогда функция $\tilde{P}$ является ММВФ тогда и только тогда, когда многочлен P гипоеллиптичен.

Доказательство. Так как, очевидно, что функция $|h|$ является ММВФ тогда и только тогда, когда h^2 является МРВФ, то утверждение следствия непосредственно следует из леммы 3, если его применить к многочлену $\tilde{P}^2$.

Замечание 1. Легко заметить, что для любого многочлена P функция $\tilde{P}$ является МРВФ.

Предложение 2. Пусть $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^{(j)} = (\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j), \quad \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^{(j)} = 1, \quad d_j > 0 \quad \text{для} \quad j = 1, \dots, k$$

и $\mathfrak{R} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^{(j)}) \leq d_j, \quad j = 1, \dots, k\}$. Тогда существует число $\delta \in (0, 1)$, для которого

$$(13) \quad \bigcup_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \Pi(\nu) \subset \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+^n : (\alpha, \lambda^{(j)}) \leq d_j(1 - \delta), \quad j = 1, \dots, k \right\} \equiv \mathfrak{R}^*,$$

и с некоторой константой $c > 0$

$$(14) \quad \sum_{\mu \in \Pi(\nu), \nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi|^\mu \leq c h_{\mathfrak{R}}^{1-\delta}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Утверждение предложения очевидно, если $\bigcup_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \Pi(\nu) = \emptyset$. Поэтому пусть $\bigcup_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \Pi(\nu) \neq \emptyset$. Обозначим

$$\rho_j = \min_{\nu \in \mathfrak{R}^0, \Pi(\nu) \neq \emptyset} \min_{\mu \in \Pi(\nu)} (\mu, \lambda^{(j)}), \quad j = 1, \dots, k \quad \text{и} \quad \delta = \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\rho_j}{d_j} \right\}.$$

Так как для любых $\nu \in \mathfrak{R}^0$ и $\mu \in \Pi(\nu)$

$$0 < (\mu, \lambda^{(j)}) < (\nu, \lambda^{(j)}), \quad j = 1, \dots, k,$$

и множества $\mathfrak{R}^0, \Pi(\nu)$ ($\nu \in \mathfrak{R}^0$) конечны, то $\delta \in (0, 1)$. Кроме того, так как $\beta = \nu - \mu \in \Pi(\nu)$, то для любых $\nu \in \mathfrak{R}^0$, $\mu \in \Pi(\nu)$ и j ($1 \leq j \leq k$) имеем

$$\left(\mu, \lambda^{(j)} \right) = \left(\nu, \lambda^{(j)} \right) - \left(\nu - \mu, \lambda^{(j)} \right) \leq d_j - \rho_j \leq d_j(1 - \delta)$$

Это доказывает вложение (13).

В силу выпуклости многогранника $\mathfrak{R}^*$ имеем с некоторой постоянной $c_1 > 0$ (см. (5))

$$\sum_{\mu \in \Pi(\nu)} |\xi|^\mu \leq c_1 h_{\mathfrak{R}^*}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Так как $\mathfrak{R}^* = (1 - \delta)\mathfrak{R}$, то отсюда получаем оценку (14). Предложение доказано.

Лемма 4. *Функция $h = h_{\mathfrak{R}}$ является ММВФ тогда и только тогда, когда многогранник $\mathfrak{R}$ – вполне правильный.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R}$ – вполне правильный многогранник. Так как для любого многогранника $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$ с некоторыми положительными числами c и ρ

$$(15) \quad h(\xi) \leq c(1 + \|\xi\|^\rho), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то в силу предложения 2, используя неравенство и неравенства (14) и (15), имеем, с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ и числом $\delta \in (0, 1)$ при всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} h(\xi + \eta) &= \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi + \eta|^\nu \leq \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} \left(|\xi|^\nu + |\eta|^\nu + \sum_{\mu \in \Pi(\nu)} |\xi|^\mu |\eta|^{\nu-\mu} \right) \\ &\leq h(\xi) + h(\eta) + c_1 h^{1-\delta}(\xi) h^{1-\delta}(\eta) \leq h(\xi) + c(1 + \|\eta\|^\rho) \\ &\quad + c_2 h^{1-\delta}(\xi) \left(1 + \|\eta\|^{\rho(1-\delta)} \right), \end{aligned}$$

Пусть $t > 0$, $\|\eta\| \leq th^r(\xi)$ и $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$, где $r = \min \left\{ \frac{1}{\rho}, \frac{\delta}{(1-\delta)\rho} \right\}$. Отсюда с некоторой постоянной $c_3 = c_3(t) > 0$ имеем

$$h(\xi + \eta) \leq h(\xi) + c_3(1 + h(\xi)) + c_3 h^{1-\delta}(\xi) (1 + h^\delta(\xi)).$$

Так как $0 \in \mathfrak{R}^0$ (следовательно, $h(\xi) \geq 1$), то отсюда следует, что с некоторой постоянной $c_4 > 0$

$$(16) \quad h(\xi + \eta) \leq c_4 h(\xi), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

как только $\|\eta\| \leq th^r(\xi)$. С другой стороны, в силу (15) и неравенства треугольника имеем при $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$ и $\|\eta\| \leq th^r(\xi)$

$$\begin{aligned} h(\xi + \eta) &\geq h(\xi) - h(\eta) - c_1 h^{1-\delta}(\xi) h^{1-\delta}(\eta) \\ &\geq h(\xi) - c(1 + t^\rho h(\xi)) - cc_1 h^{1-\delta}(\xi) \left(1 + t^{(1-\delta)\rho} h^\delta \right) \\ (17) \quad &\geq \left(1 - ct^\rho - cc_1 t^{(1-\delta)\rho} \right) h_{\mathfrak{R}}(\xi) - c - cc_1 h_{\mathfrak{R}}^{1-\delta}(\xi). \end{aligned}$$

Взяв число $t_0 > 0$ такое, чтобы $1 - ct_0^\rho - cc_1 t_0^{(1-\delta)\rho} \geq 1/2$, из (17) получаем при $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$ и $\|\eta\| \leq t_0 h^r(\xi)$

$$(18) \quad h(\xi + \eta) \geq \frac{1}{2} h(\xi) - c - c_1 h^{1-\delta}(\xi).$$

Так как $h(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$, то из (18) следует, что существует постоянная $c_5 > 0$ такая, что

$$h(\xi + \eta) \geq \frac{1}{4}h(\xi) - c_5, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \|\eta\| \leq t_0 h^r(\xi).$$

Это неравенство вместе с оценкой (16) доказывает, что $h = h_{\mathfrak{R}} - \text{ММВФ}$, так как $h(\tau) \geq 1$ при всех $\tau \in \mathbb{R}^n$ ($0 \in \mathfrak{R}^0$).

Пусть $h = h_{\mathfrak{R}} - \text{ММВФ}$. Покажем, что $\mathfrak{R}$ – вполне правильный многогранник. Предположим обратное, что $\mathfrak{R}$ не является вполне правильным многогранником. Так как $h - \text{ММВФ}$, то для некоторых положительных чисел χ, c_6, r выполняется оценка (2), т.е.

$$(19) \quad \chi^{-1} \leq \frac{h(\xi)}{h(\eta)} \leq \chi, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi - \eta\| \leq c_6 h^r(\eta).$$

Отсюда, в силу предложения 2.1 работы [9] и леммы 1 работы [10] следует, что многогранник $\mathfrak{R}$ – правильный. Следовательно, существуют положительные числа ρ и c_7 , для которых

$$(20) \quad \|\eta\|^\rho \leq c_7 h(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Так как по предположению $\mathfrak{R}$ не является вполне правильным, то в силу вышесказанного существуют $\nu \in \mathfrak{R}^0$ и $\mu \in \Pi(\nu)$ такие, что $\mu \in \partial\mathfrak{R}$. Пусть ради определенности

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k, 0, \dots, 0), \quad \mu = (\nu_1, \dots, \nu_l, 0, \dots, 0), \\ \nu_1 \dots \nu_k \neq 0 \quad (1 \leq l < k \leq n).$$

Так как $\mathfrak{R}$ выпукло и $\mu \in \partial\mathfrak{R}$, то существует вектор $0 \neq \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_+^n$, для которого

$$(21) \quad (\mu, \lambda) \geq \max_{\alpha \in \mathfrak{R}} (\alpha, \lambda).$$

Пусть $\xi^s = (s^{\lambda_1}, \dots, s^{\lambda_l}, s^\varepsilon, \dots, s^\varepsilon)$ и $\eta^s = (s^{\lambda_1}, \dots, s^{\lambda_l}, 0, \dots, 0)$, для любого $s = 1, 2, \dots$, где $0 < \varepsilon < \max_{1 \leq j \leq l} \{\lambda_j \rho r\} \equiv \varepsilon_0$. Тогда в силу (20) и (21) получаем

$$\|\xi^s - \eta^s\|/h^r(\eta^s) \leq c_7^r \frac{s^\varepsilon (n-1)^{1/2}}{\|\eta^s\|^{\rho r}} \leq c_7^r \frac{s^\varepsilon (n-1)^{1/2}}{s^{\varepsilon_0}} \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty$$

и отсюда

$$\frac{h(\xi^s)}{h(\eta^s)} \geq \frac{|\xi^s|^\nu}{(\text{card } \mathfrak{R}^0) s^{(\mu, \lambda)}} = \frac{s^{(\mu, \lambda) + \varepsilon(\nu_{l+1} + \dots + \nu_k)}}{(\text{card } \mathfrak{R}^0) s^{(\mu, \lambda)}} \rightarrow \infty \quad \text{при } s \rightarrow \infty,$$

что противоречит оценке (19). Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{R}$ – вполне правильный многогранник. Лемма доказана.

Предложение 3. Если МРВФ $h(\xi) = h(\xi_1, \dots, \xi_n)$ удовлетворяет условию Берлинга, то

а) существуют постоянная $c > 0$, для которой

$$(22) \quad h(\xi + \eta) \leq ch(\xi)h(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

б) для любого $s \geq 1$ функция h^s также удовлетворяет условию Берлинга.

с) для любого $k(1 \leq k < n)$

$$\sup_{\eta, \tau''} \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - (\xi', \tau''))h(\xi', \tau'')} d\xi' < \infty,$$

где $\eta' \equiv (\eta_1, \dots, \eta_k)$, $\eta'' \equiv (\eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$ and $\eta = (\eta', \eta'')$.

d) при дополнительном условии

$$h(-\xi) \leq c_1 h(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$h(\xi) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|\xi\| \rightarrow \infty.$$

Отметим, что аналогичные пунктам а) и б) результаты для ММВФ доказаны в [9].

Доказательство. В силу условия предложения (см. (1)) для любых $\tau, \eta \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} B_h &\geq \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - \xi)h(\xi)} d\xi = \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - \xi - \tau)h(\xi + \tau)} d\xi \\ &\geq \frac{1}{A^2} \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - \tau)h(\tau)(1 + \|\xi\|)^{2a}} d\xi. \end{aligned}$$

Откуда

$$0 < \int \frac{1}{(1 + \|\xi\|)^{2a}} d\xi < \infty$$

и

$$(23) \quad \frac{h(\eta)}{h(\eta - \tau)h(\tau)} \leq A^2 B_h \left(\int (1 + \|\xi\|)^{-2a} d\xi \right)^{-1}$$

что доказывает (22).

Пусть $s \geq 1$. Тогда в силу (23)

$$\begin{aligned} \int \frac{h^s(\eta)}{h^s(\eta - \xi)h^s(\xi)} d\xi &\leq \sup_{\eta, \tau} \frac{h^{s-1}(\eta)}{h^{s-1}(\eta - \tau)h(\tau)} \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - \xi)h(\xi)} d\xi \\ &\leq B_h \sup_{\eta, \tau} \frac{h^{s-1}(\eta)}{h^{s-1}(\eta - \tau)h(\tau)} < \infty, \end{aligned}$$

т.е. утверждение пункта б) также доказано.

Покажем справедливость пункта с). В силу оценки (1) и теоремы Фубини имеем для любого $\tau'' \in \mathbb{R}^{n-k}$

$$\begin{aligned} B_h &\geq \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - \xi)h(\xi)} d\xi \geq \frac{1}{A^2} \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - (\xi', \tau''))h(\xi', \tau'')(1 + \|\xi'' - \tau''\|)^{2a}} d\xi \\ &= \frac{1}{A^2} \int \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - (\xi', \tau''))h(\xi', \tau'')} d\xi' \frac{1}{(1 + \|\xi'' - \tau''\|)^{2a}} d\xi'' \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\sup_{\eta, \tau''} \int \frac{h(\eta)}{h(\eta - (\xi', \tau''))h(\xi', \tau'')} d\xi' \leq B_h A^2 \left(\int (1 + \|\xi''\|)^{-2a} d\xi'' \right)^{-1} < \infty,$$

т.е. утверждение пункта с) также доказано.

Докажем утверждение пункта d). Пусть, наоборот, при условиях предложения существуют постоянная $c_2 > 0$ и последовательность $\{\xi^s\}_1^\infty$, $\|\xi^s\| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, для которых $h(\xi^s) \leq c_2$, $s = 1, 2, \dots$. Не умаляя общности, будем считать, что $\|\xi^s - \xi^l\| \geq 2$ при $s \neq l$, $l = 1, 2, \dots$. В силу условия предложения и оценки (1) имеем для любого натурального r

$$\begin{aligned} \int \frac{h(0)}{h(-\xi)h(\xi)} d\xi &\geq \frac{h(0)}{c_1} \int \frac{1}{h^2(\xi)} d\xi \geq \frac{h(0)}{c_1} \sum_{k=1}^r \int_{\|\xi - \xi^s\| < 1} \frac{1}{h^2(\xi)} d\xi \\ &\geq \frac{h(0)}{c_1 A^2} \sum_{k=1}^r \frac{1}{h^2(\xi^s)} \int_{\|\eta\| < 1} d\eta = r \frac{h(0)}{2^{2a} c_1 c_2^2 A^2} |V_1|, \end{aligned}$$

где $|V_1|$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. В силу произвольности r это противоречит тому, что функция h удовлетворяет условию Берлинга. Следовательно, утверждение пункта d) справедливо. Предложение доказано.

Следствие 2. При условиях предложения 3, для любого фиксированного τ'' функция $g(\xi') \equiv h(\xi', \tau'')$ удовлетворяет условию Берлинга.

Доказательство непосредственно следует из утверждения пункта с) предложения 3.

Следствие 3. Если для многогранника $\mathfrak{R}$ и некоторого числа $s > 0$ функция $h = h_{\mathfrak{R}}^s$ удовлетворяет условию Берлинга, то $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник.

Доказательство непосредственно следует из предложения 3 (см. (22)), леммы 2 и предложения 2.1 работы [10], так как с некоторой постоянной $c = c(s) > 0$

$$c^{-1} h_{s\mathfrak{R}}(\xi) \leq h_{\mathfrak{R}}^s(\xi) \leq c h_{s\mathfrak{R}}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 4. Пусть h – МРВФ и для некоторого $s_0 > 0$ $h^{-s_0} \in L_1$. Тогда $h(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Предположим обратное, что при условиях предложения существуют число $c > 0$ и последовательность $\{\xi^s\}_1^\infty$, $\|\xi^s\| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, для которых $h(\xi^s) \leq c$, $s = 1, 2, \dots$. Не умаляя общности будем считать, что $\|\xi^s - \xi^l\| \geq 2$ ($s \neq l$, $l = 1, 2, \dots$). Тогда для любого $r \in \mathbb{N}$ в силу оценки (18)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{h^{s_0}(\xi)} d\xi &\geq \sum_{i=1}^r \int_{\|\xi - \xi^i\| < 1} \frac{1}{h^{s_0}(\xi)} d\xi \\ &\geq \frac{1}{A^{s_0}} \sum_{i=1}^r \frac{1}{h^{s_0}(\xi^i)} \int_{\|\xi - \xi^i\| < 1} \frac{1}{(1 + \|\xi - \xi^i\|)^{as_0}} d\xi \geq \frac{1}{(2^a A)^{s_0}} |V_1| r \frac{1}{c^{s_0}}, \end{aligned}$$

где $|V_1|$ – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. В силу произвольности числа r полученное неравенство противоречит условию $h^{-s_0} \in L_1$.

Следствие 4. При условиях предложения 4 существует число $\varepsilon = \varepsilon(h) > 0$ такое, что $h(\xi) \geq \varepsilon$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство непосредственно следует из предложения 4, так как функция h непрерывна и положительна.

Предложение 5. Пусть $\varepsilon > 0$ и $s_0 > 0$ – произвольные числа, функция $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [\varepsilon, +\infty)$ удовлетворяет оценке (3) (т.е. условию Δ) и $h^{-s_0} \in L_1$. Тогда при $s > \frac{s_0}{1-\delta}$, где δ – число из оценки (3), функция h^s удовлетворяет условию Берлинга.

Доказательство. Пусть $s > s_0/(1-\delta)$. В силу оценки (3) и условия предложения, имеем с некоторой постоянной $c = c(s) > 0$ и для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} & \int \frac{h^s(\eta)}{h^s(\eta-\xi)h^s(\xi)} d\xi \leq c \int \frac{h^s(\eta-\xi)h^{s\delta}(\xi) + h^{s\delta}(\eta-\xi)h^s(\eta-\xi)}{h^s(\eta-\xi)h^s(\eta)} d\xi \\ (24) \quad & \leq c \int [h^{-s(1-\delta)}(\eta-\xi) + h^{-s(1-\delta)}(\xi)] d\xi \leq 2c\varepsilon^{s_0-s(1-\delta)} \|h^{-s_0}\|_{L_1} \end{aligned}$$

т.е. функция h^s удовлетворяет условию Берлинга.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon > 0$, $s_1, s_2 > 0$ и $h_1(\xi_1, \dots, \xi_k) \geq \varepsilon$, $h_2(\xi_l, \dots, \xi_n) \geq \varepsilon$ ($l \leq k+1$, $l, k \leq n$) обе являются МРВФ, причем $h_1^{-s_1}, h_2^{-s_2} \in L_1$.

Если функции h_1 и h_2 удовлетворяют условию Δ , то при достаточно больших $s > 0$ функция

$$h^s(\xi_1, \dots, \xi_n) = h_1^s(\xi_1, \dots, \xi_k) h_2^s(\xi_l, \dots, \xi_n)$$

удовлетворяет условию Берлинга.

Доказательство. В силу предложения 5 функции h_1^s и h_2^s удовлетворяют условию Берлинга соответственно при $s \geq s_1/(1-\delta_1)$ и $s \geq s_2/(1-\delta_2)$, где $\delta_1, \delta_2 \in [0, 1)$ – числа, при которых для h_1 и h_2 выполняется оценка (3). Если $l = k+1$ ($1 < l \leq n$), то в силу теоремы Фубини и оценки (24), при $s \geq \max\{s_1/(1-\delta_1), s_2/(1-\delta_2)\}$ имеем с некоторой постоянной $c = c(s) > 0$ и при любых $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} & \int \frac{h^s(\eta)}{h^s(\eta-\xi)h^s(\xi)} d\xi = \\ & \int \frac{h_1^s(\eta_1, \dots, \eta_k) h_2^s(\eta_{k+1}, \dots, \eta_n)}{h_1^s(\eta_1 - \xi_1, \dots, \eta_k - \xi_k) h_1^s(\xi_1, \dots, \xi_k) h_2^s(\eta_{k+1} - \xi_{k+1}, \dots, \eta_n - \xi_n) h_2^s(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)} d\xi \\ & \leq 4c^2 \varepsilon^{s_1+s_2-s(2-\delta_1-\delta_2)} \|h_1^{-s_1}\|_{L_1} \|h_2^{-s_2}\|_{L_1}, \end{aligned}$$

т.е. h^s удовлетворяет условию Берлинга при $l = k+1$.

Пусть $l = 1$ и $s > s_2/(1-\delta_2)$. Тогда в силу пункта а) предложения 3 и предложения 5 с некоторой постоянной $c_1 = c_1(s) > 0$ и при всех $\eta \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} & \int \frac{h^s(\eta)}{h^s(\eta-\xi)h^s(\xi)} d\xi \\ & \leq \sup_{\eta_1, \dots, \eta_k, \xi_1, \dots, \xi_k} \frac{h_1^s(\eta_1, \dots, \eta_k)}{h_1^s(\eta_1 - \xi_1, \dots, \eta_k - \xi_k) h_1^s(\xi_1, \dots, \xi_k)} \int \frac{h_2^s(\eta)}{h_2^s(\eta-\xi)h_2^s(\xi)} d\xi \leq c_1 \end{aligned}$$

т.е. h^s удовлетворяет условию Берлинга при $l = 1$.

Если же $k = n$, то доказательство получается аналогично случаю $l = 1$, с заменой h_1 на h_2 и h_2 на h_1 при $s > s_1/(1-\delta_1)$. Пусть поэтому $1 \leq l < k+1 \leq n$. Положим $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{l-1})$, $\xi'' = (\xi_l, \dots, \xi_k)$ и $\xi''' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$. Тогда в

силу пункта с) предложения 3, теоремы Фубини и предложения 5 с некоторой постоянной $c_2 = c_2(s) > 0$ ($s > \max\{\frac{s_1}{(1-\delta_1)}, \frac{s_2}{(1-\delta_2)}\}$) при всех $\eta \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} & \int \frac{h^s(\eta)}{h^s(\eta - \xi)h(\xi)} d\xi \\ &= \int \frac{h_1^s(\eta', \eta'')h_2^s(\eta'', \eta''')}{h_1^s((\eta', \eta'') - (\xi' - \xi''))h_1^s(\xi', \xi'')h_2^s((\eta'', \eta''') - (\xi'' - \xi'''))h_2^s(\xi'', \xi''')} d\xi \\ &\leq \int \int \frac{h_1^s(\eta', \eta'')}{h_1^s((\eta', \eta'') - (\xi', \xi''))h_1^s(\xi', \xi'')} d\xi' d\xi'' \\ &\quad \times \sup_{\Theta'', \Theta''', \tau''} \int \frac{h_2^s(\Theta'', \Theta''')}{h_2^s((\Theta'', \Theta''') - (\tau'', \xi'''))h_2^s(\tau'', \xi''')} d\xi''' \leq c_2, \end{aligned}$$

т.е. h^s удовлетворяет условию Берлинга и в случае $1 \leq l < k + 1 \leq n$. Этим теорема доказана.

Замечание 2. Утверждение теоремы остается верным и в случае $h(\xi) = h_1(\xi^{e^1}), \dots, h_k(\xi^{e^k})$, где $\bigcup_{j=1}^k e^j = \{1, \dots, n\}$, функции $h_i \geq \varepsilon > 0$ удовлетворяют условию Δ и с некоторым $s_i > 0$, $h_i^{-s_i} \in L_1$, $i = 1, \dots, k$.

Замечание 3. Пусть функция $h_{\mathfrak{R}}$ удовлетворяет слабому условию Δ . Тогда существует число $s_0 = s_0(\mathfrak{R}) > 0$ такое, что $h_{\mathfrak{R}}^s$ при $s > s_0$ удовлетворяет условию Берлинга.

Доказательство непосредственно следует из замечания 2 и предложения 1.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^2$ ($n = 2$). Для того, чтобы функция $h_{\mathfrak{R}}^s$ при достаточно больших s удовлетворяла условию Берлинга необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{R}$ был правильным многогранником.

Доказательство. Пусть $h_{\mathfrak{R}}$ удовлетворяет условию Берлинга. Тогда в силу пункта а) предложения 3, леммы 1 работы [10] и леммы 2 для любого $s > 0$ $s\mathfrak{R}$ (а, следовательно, и $\mathfrak{R}$) – правильный многогранник.

Пусть теперь $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^2$ – правильный многогранник и $\{\nu^{(j)}\}_{j=0}^k = \mathfrak{R}^0$. Будем предполагать, что вершины пронумерованы в следующем порядке

$$\nu^{(0)} = (0, 0), \quad \nu_1^{(1)} \geq \nu_1^{(2)} > \dots > \nu_1^{(k)} = 0, \quad \nu_2^{(k)} \geq \nu_2^{(k-1)} > \dots > \nu_2^{(1)} = 0.$$

Пусть M_i – многогранник с вершинами

$$(0, 0), \quad (\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)}, 0), \quad (0, \nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)}), \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Тогда $\mathfrak{R} = \bigoplus_{i=1}^{k-1} M_i$ и, следовательно, с некоторой постоянной $c_1 > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} & c_1^{-1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 + |\xi_1|^{\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)}} + |\xi_2|^{\nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)}} \right) \leq h_{\mathfrak{R}}(\xi) \\ & \leq c_1 \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 + |\xi_1|^{\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)}} + |\xi_1|^{\nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)}} \right). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned}
h_i(\xi_1, \xi_2) &= 1 + |\xi_1|^{\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)}} + |\xi_2|^{\nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)}} \text{ удовлетворяет условию } \Delta \text{ и} \\
&\text{является МРВФ при } \nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)} \neq 0, \nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)} \neq 0, 1 \leq i \leq n, \\
h_i(\xi_1, \xi_2) &= 1 + |\xi_1|^{\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)}} \text{ удовлетворяет условию } \Delta \text{ и является МРВФ} \\
&\text{при } \nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)} = 0, 1 \leq i \leq n, \\
h_i(\xi_1, \xi_2) &= 1 + |\xi_2|^{\nu_2^{(i+1)} - \nu_2^{(i)}} \text{ удовлетворяет условию } \Delta \text{ и является МРВФ} \\
&\text{при } \nu_1^{(i)} - \nu_1^{(i+1)} = 0, 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Следовательно, в силу теоремы 1 и замечания 2 функция при достаточно больших $s > 0$ $h_{\mathfrak{R}}^s$ удовлетворяет условию Берлинга. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$ – правильный многогранник, для которого при любом $i (1 \leq i \leq n)$ функции

$$h_i(\xi^i) \equiv h_{\mathfrak{R}}(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, 0, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)$$

удовлетворяют условию Δ . Тогда при достаточно больших s функция $h_{\mathfrak{R}}$ удовлетворяет условию Берлинга.

Доказательство. Очевидно, для любого $s > 0$ существует постоянная $c = c(s) > 0$ такая, что $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(25) \quad c^{-1} \left[\sum_{i=1}^n h_i^s(\xi^i) + \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0 \cap \mathbb{R}_0^n} |\xi|^{s\nu} \right] \leq h^s(\xi) \leq c \left[\sum_{i=1}^n h_i^s(\xi^i) + \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0 \cap \mathbb{R}_0^n} |\xi|^{s\nu} \right].$$

Покажем, что для достаточно больших $s > 0$

$$(26) \quad \sup_{\eta} \int \frac{h_{\mathfrak{R}}^s(\eta)}{h_{\mathfrak{R}}^s(\eta - \xi) h_{\mathfrak{R}}^s(\xi)} d\xi < \infty.$$

Очевидно, для доказательства оценки (26) достаточно показать, что при достаточно больших s

$$(27) \quad \sup_{\eta} \int \frac{h_i^s(\eta^{(i)})}{h_{\mathfrak{R}}^s(\eta - \xi) h_{\mathfrak{R}}^s(\xi)} d\xi < \infty, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(28) \quad \sup_{\eta} \int \frac{|\eta|^{s\nu}}{h_{\mathfrak{R}}^s(\eta - \xi) h_{\mathfrak{R}}^s(\xi)} d\xi < \infty, \quad \nu \in \mathbb{R}^0 \cap \mathbb{R}_0^n.$$

Докажем оценки (27). В силу (25) и условия теоремы имеем с некоторой постоянной $c = c(s) > 0$

$$\begin{aligned}
G_i &\equiv \sup_{\eta} \int \frac{h_i^s(\eta^{(i)})}{h_{\mathfrak{R}}^s(\eta - \xi) h_{\mathfrak{R}}^s(\xi)} d\xi \\
&\leq c \sup_{\eta} \int \frac{h_i^s(\eta^{(i)})}{(h_i^s(\eta^{(i)} - \xi^{(i)}) + |\eta_i - \xi_i|^{sl_i})(h_i^s(\xi^{(i)}) + |\xi_i|^{sl_i})} d\xi, \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

где $0 \neq (0, \dots, 0, l_i, 0, \dots, 0)$ – вершина многогранника $\mathfrak{R}$, лежащая на оси ξ_i (напомним, что $\mathfrak{R}$ – правильный многогранник). Так как функция h_i ($1 \leq i \leq n$) по

условию теоремы удовлетворяет условию Δ , то в силу теоремы Фубини (см. (2)) с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ и $\delta_i \in [0, 1)$ и для произвольных η^i

$$\begin{aligned}
 G_i &\leq c_1 \int \frac{h_i^s(\eta^{(i)})}{\left(h_i^s(\eta^{(i)} - \xi^{(i)}) + |\eta^{(i)} - \xi^{(i)}|^{s l_i}\right) (h_i^s(\xi^{(i)}) + |\xi_i|^{s l_i})} d\xi \\
 &\leq c_2 \int \int \frac{h_i^s(\eta^{(i)} - \xi^{(i)}) h_i^{s \delta_i}(\xi^{(i)}) + h_i^{s \delta_i}(\eta^{(i)} - \xi^{(i)}) h_i^s(\xi^{(i)})}{\left(h_i^s(\eta^{(i)} - \xi^{(i)}) + |\eta^{(i)} - \xi^{(i)}|^{s l_i}\right) (h_i^s(\xi^{(i)}) + |\xi_i|^{s l_i})} d\xi \\
 &\leq c_2 \left[\int \int \frac{h_i^{s(\delta_i-1)}(\xi^{(i)})}{1 + \left(|\xi_i|/h_i^{1/l_i}(\xi^{(i)})\right)^{s l_i}} d\xi^{(i)} d\xi_i \right. \\
 &\quad \left. + \int \int \frac{h_i^{s(\delta_i-1)}(\eta^{(i)} - \xi^{(i)})}{1 + \left(|\eta_i - \xi_i|/h_i^{1/l_i}(\eta^{(i)} - \xi^{(i)})\right)^{s l_i}} d\xi^{(i)} d\xi_i \right] \\
 (29) \quad &\leq 2c_2 \int h_i^{s(\delta_i-1)+1/l_i}(\xi^i) d\xi^i \int \frac{1}{1+t^{s l_i}} dt, \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Так как $\delta_i \in [0, 1)$ и

$$h_i(\xi^{(i)}) \geq 1 + \sum_{j \neq i} |\xi_j|^{l_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то отсюда непосредственно получаем, что при достаточно больших s интегралы, стоящие в правой части (29) сходятся, т.е. верна оценка (27).

Докажем оценки (28). Так как с некоторой постоянной $c_1 > 0$ для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$|\eta|^\nu \leq \prod_{i=1}^n (1 + |\eta_i|)^{\nu_i} \quad \text{и} \quad h_{\mathfrak{R}}(\eta) \geq c_1 \prod_{i=1}^n (1 + |\eta_i|)^{\nu_i},$$

и функция

$$g(\xi) \equiv \prod_{i=1}^n (1 + |\xi_i|)^{\nu_i} \quad (\nu \in \mathbb{R}_0^n)$$

удовлетворяет слабому условию Δ , то в силу теоремы 1 (см. замечание 2) с некоторой постоянной $c_4 = c_4(s) > 0$

$$\sup_{\eta} \int \frac{|\eta|^{s\nu}}{h_{\mathfrak{R}}^s(\eta - \xi) h_{\mathfrak{R}}(\xi)} d\xi \leq c_4 \sup_{\eta} \int g^s(\eta) (g^s(\eta - \xi) g^s(\xi)) d\xi < \infty$$

Этим оценка (28) доказана.

Из оценок (27) и (28) непосредственно следует, что $h_{\mathfrak{R}}^s$ удовлетворяет условию Берлинга. Теорема доказана.

Замечание 4. Из лемм 2, 4, предложений 3, 5 и леммы 2 работы [10] следует, что

$$\Lambda_{S.V.}^n \subset \Lambda_{\Delta}^n \subset \Lambda_B^n \subset \Lambda_T^n,$$

где $\Lambda_T^n = \{\mathfrak{R} \in \Lambda^n : h_{\mathfrak{R}} - \text{МРВ}\Phi\},$

$$\Lambda_{S.V.}^n = \{\mathfrak{R} \in \Lambda^n : h_{\mathfrak{R}} - \text{ММВ}\Phi\},$$

$$\Lambda_{\Delta}^n = \{\mathfrak{R} \in \Lambda^n : h_{\mathfrak{R}} \text{ удовлетворяет оценке (3)}\},$$

$\Lambda_B^n = \{\mathfrak{R} \in \Lambda^n : h_{\mathfrak{R}}^s \text{ удовлетворяет оценке (4) для некоторого } s > 0\}$.
Из теоремы 2 следует, что $\Lambda_T^2 = \Lambda_B^2$.

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Предложение 6. Пусть функция $h = h_{\mathfrak{R}}$ удовлетворяет слабому условию Δ $\Omega \subset \mathbb{E}^n$. Тогда для любого числа $s > s_0(h)$ (см. замечание 3) существует постоянная $c = c(s) > 0$ такая, что

$$(30) \quad \|uv\|_{W_{h^s}} \leq c \|u\|_{W_{h^s}} \|v\|_{W_{h^s}}, \quad u, v \in W_{h^s},$$

$$(31) \quad \|uv\|_{\dot{W}_{h^s}(\Omega)} \leq c \|u\|_{\dot{W}_{h^s}(\Omega)} \|v\|_{\dot{W}_{h^s}(\Omega)}, \quad u, v \in \dot{W}_{h^s}(\Omega),$$

$$(32) \quad uv \in W_{h^s,loc}(\Omega), \quad u, v \in W_{h^s,loc}(\Omega).$$

Доказательство. Мы докажем только оценку (30), доказательства (31) и (32) проводятся аналогичным образом. Так как при $s > s_0$ (см. теорему 1 и замечания 2, 3) функция h^s удовлетворяет условию Берлинга, т.е.

$$B_h \equiv \sum_{\eta} \int \frac{h^s(\eta)}{h^s(\eta - \xi)h^s(\xi)} d\xi < \infty,$$

то в силу равенства Парсеваля для любых $u, v \in W_{h^s}$

$$\begin{aligned} \|uv\|_{h^s}^2 &= \left\| h^s(\xi) \int (Fu)(\xi - \eta)(Fv)(\eta) d\eta \right\|_{L_2}^2 \\ &= \int \left| \int \frac{h^s(\xi)}{h^s(\xi - \eta)h^s(\eta)} (h^s(\xi - \eta)(Fu)(\xi - \eta))(h^s(\eta)(Fv)(\eta)) d\eta \right|^2 d\xi \\ &\leq \left(\sup_{\xi} \int \frac{h^s(\xi)}{h^s(\xi - \eta)h^s(\eta)} d\eta \right)^2 \|h^s Fu\|_{L_2}^2 \|h^s Fv\|_{L_2}^2 = B_h^2 \|u\|_{W_{h^s}}^2 \|v\|_{W_{h^s}}^2 \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Предложение 7. Пусть $\mathfrak{R} \in \Lambda^n$ – правильный многогранник, $M \in \Lambda^n$ – многогранник, для которого функция h_M удовлетворяет слабому условию Δ и $\alpha^1, \alpha^2 \in (\mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}) \cap \mathbb{N}_+^n$. Тогда существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $c_0 = c_0(s) > 0$ такие, что для любого $s > s_0$ (где число s_0 то же, что и в предложении 6) и при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $j_1, j_2 \in \mathbb{N}_0$ справедливы неравенства:

$$(33) \quad \left\| (D^{\alpha_1} u)^{j_1} (D^{\alpha_2} u)^{j_2} \right\|_{W_{h_M^{s+\varepsilon}}} \leq c_0^{j_1+j_2} \|u\|_{W_{h_M^s}}, \quad u \in W_{h_M^s},$$

$$(34) \quad \left\| (D^{\alpha_1} u)^{j_1} (D^{\alpha_2} u)^{j_2} \right\|_{\dot{W}_{h_M^{s+\varepsilon}}} \leq c_0^{j_1+j_2} \|u\|_{\dot{W}_{h_M^s}}, \quad u \in \dot{W}_{h_M^s}(\Omega),$$

$$(35) \quad (D^{\alpha_1} u)^{j_1} (D^{\alpha_2} u)^{j_2} \in W_{h_M^{s+\varepsilon},loc}, \quad u \in W_{h_M^s,loc}(\Omega),$$

где $h = h_{\mathfrak{R}}$, функция, порожденная многогранником $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Докажем только утверждение пункта (33), так как доказательства пунктов (34) и (35) проводятся аналогично.

Из правильности многогранника $\mathfrak{R}$ и условий $\alpha^1, \alpha^2 \in (\mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}) \cap \mathbb{N}_+^n$, следует, что можно выбрать число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$(36) \quad \{\{\nu : \nu \in \mathbb{R}_+^n, \nu \leq \alpha^1\} \cup \{\nu : \nu \in \mathbb{R}_+^n, \nu \leq \alpha^2\}\} \oplus \varepsilon_0 M \subset \mathfrak{R}.$$

Так как при $s > s_0$, $W_{h_M^s}$ является кольцом (см. предложение 6), и в силу (36) с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$\left(\prod_{i=1}^n (1 + |\xi_i|^{\alpha_i^1}) + \prod_{i=1}^n (1 + |\xi_i|^{\alpha_i^2}) \right) h_M^{s+\varepsilon}(\xi) \leq c_1 h(\xi) h_M^s(\xi)$$

для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Так как $D^{\alpha^j} u \in W_{h_M^{s+\varepsilon}}$ ($j = 1, 2$), то в силу предложения 6 имеем

$$\begin{aligned} \left\| (D^{\alpha^1} u)^{j_1} (D^{\alpha^2} u)^{j_2} \right\|_{W_{h_M^{s+\varepsilon}}} &\leq B_{h_M}^{j_1+j_2} \left\| (D^{\alpha^1} u) \right\|_{h_M^{s+\varepsilon}}^{j_1} \left\| D^{\alpha^2} u \right\|_{h_M^{s+\varepsilon}}^{j_2} \\ &\leq (B_{h_M} c_1^2)^{j_1+j_2} \|u\|_{h_M^s}^{j_1+j_2}, \quad u \in W_{h_M^s}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Следствие 5. Пусть $f(\xi_1, \dots, \xi_k)$ ($f(0) = 0$) – целая функция, $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$ – правильный многогранник, а $M \subset \mathbb{R}_+^n$ – многогранник, для которого функция h_M удовлетворяет слабому условию Δ , и $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in (\mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}) \cap \mathbb{N}_+^n$. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$ что для любого $s > s_0$

$$\begin{aligned} f(D^{\alpha^1} u, \dots, D^{\alpha^k} u) &\in W_{h_M^{s+\varepsilon_0}}, \quad u \in W_{h_{\mathfrak{R}} h_M^s}, \\ f(D^{\alpha^1} u, \dots, D^{\alpha^k} u) &\in \mathring{W}_{h_M^{s+\varepsilon_0}}(\Omega), \quad u \in \mathring{W}_{h_{\mathfrak{R}} h_M^s}(\Omega), \\ f(D^{\alpha^1} u, \dots, D^{\alpha^k} u) &\in W_{h_M^{s+\varepsilon_0}, loc}(\Omega), \quad u \in W_{h_{\mathfrak{R}} h_M^s, loc}(\Omega). \end{aligned}$$

Доказательство непосредственно следует из предложения 7.

Определение 5. (см. [5, 6]). Линейный дифференциальный оператор

$$P(D) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}(P)} \gamma_\alpha D^\alpha$$

с характеристическим многогранником $\mathfrak{R}$ называется невырожденным (регулярным), если его характеристический многочлен является невырожденным (регулярным), т.е. с некоторой постоянной $c > 0$ для любого $\alpha \in \mathfrak{R}$

$$|\xi|^\alpha \leq c(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 8. Пусть $P(D)$ – линейный регулярный дифференциальный оператор с правильным характеристическим многогранником $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}_+^n$, $M \subset \mathbb{R}_+^n$ – правильный многогранник, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^1$ и $\theta = \max\{\theta_1, \theta_2\}$. Тогда

$$\left\{ u \in W_{hh_M^{\theta_1}} : P(D)u \in W_{hh_M^{\theta_2}} \right\} = \left\{ u \in W_{hh_M^{\theta}} \right\},$$

$$\left\{ u \in \overset{\circ}{W}_{hh_M^{\theta_1}}(\Omega) : P(D)u \in \overset{\circ}{W}_{hh_M^{\theta_2}}(\Omega) \right\} \subset \left\{ u \in \overset{\circ}{W}_{hh_M^{\theta}}(\Omega) \right\},$$

$$\left\{ u \in W_{hh_M^{\theta_1}, loc}(\Omega) : P(D)u \in W_{hh_M^{\theta_2}, loc}(\Omega) \right\} \subset \left\{ u \in W_{hh_M^{\theta}, loc}(\Omega) \right\},$$

где $h = h_{\mathfrak{R}}$ – функция, порожденная многогранником $\mathfrak{R}$.

Доказательство непосредственно получается с помощью равенства Парсеваля, если заметить, что с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ и для любых $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^1$

$$c_1 \left(h(\xi)h_M^{\theta_1}(\xi) + |P(\xi)|h_M^{\theta_2}(\xi) \right) \leq h(\xi)h_M^{\theta}(\xi)$$

$$\leq c_2 \left(h(\xi)h_M^{\theta_1}(\xi) + |P(\xi)|h_M^{\theta_2}(\xi) \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 4. Пусть $k \in \mathbb{N}_0$ и $Q(D) = P(D) + f(D^{\alpha_1}, \dots, D^{\alpha_k})$, где $P(D)$ – линейный регулярный дифференциальный оператор с правильным характеристическим многогранником $\mathfrak{R}$, $f(z_1, \dots, z_k)$, $f(0) = 0$ – целая функция, $\alpha^1, \dots, \alpha^k \subset (\mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}) \cap \mathbb{N}_+^n$, $M \subset \mathbb{R}_+^n$ – многогранник, для которого функция h_M удовлетворяет слабому условию Δ и $s_1 > s_0$, где s_0 – число из предложения 6, $s_2 \in \mathbb{R}^1$ и $s = \max\{s_1, s_2\}$. Тогда

$$\left\{ u \in W_{hh_M^{s_1}} : Q(D)u \in W_{hh_M^{s_2}} \right\} \subset W_{hh_M^s},$$

где $h = h_{\mathfrak{R}}$ – функция, порожденная многогранником $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Так как при $s_1 > s_0$, в силу следствия 5 $f(D^{\alpha_1}u, \dots, D^{\alpha_k}u) \in W_{hh_M^{s_1+\varepsilon}}$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$ и при всех $u \in W_{hh_M^{s_1}}$, то утверждение теоремы очевидно, если $s_1 \geq s_2$.

Пусть $s_1 < s_2$. Так как в силу следствия 5 для любого $u \in W_{hh_M^{s_2}}$ ($s_2 > s_1 > s_0$) $f(D^{\alpha_1}u, \dots, D^{\alpha_k}u) \in W_{h_M^{s_2+\varepsilon}}$ и $P(D)u \in W_{h_M^{s_2}}$ (i.e. $Q(D)u \in W_{h_M^{s_2}}$), то

$$W_{hh_M^{s_2}} \subset \left\{ u \in W_{hh_M^{s_1}} : Q(D)u \in W_{h_M^{s_2}} \right\}.$$

Покажем теперь, что при $s_1 < s_2$

$$(37) \quad \left\{ u \in W_{hh_M^{s_1}} : Q(D)u \in W_{h_M^{s_2}} \right\} \subset W_{hh_M^{s_2}}.$$

Пусть $u \in W_{hh_M^{s_1}}$ и $Q(D)u \equiv g \in W_{h_M^{s_2}}$. Тогда в силу следствия 5 для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ $f(D^{\alpha_1}u, \dots, D^{\alpha_k}u) \in W_{h_M^{s_1+\varepsilon_0}}$, следовательно,

$$P(D)u = g + f(D^{\alpha_1}u, \dots, D^{\alpha_k}u) \in W_{h_M^{s_2}} \cup W_{h_M^{s_1+\varepsilon_0}}.$$

Если $\varepsilon_0 + s_1 \geq s_2$, то $g + f(D^{\alpha_1}u, \dots, D^{\alpha_k}u) \in W_{h_M^{s_2}}$, следовательно, в силу предложения 8 $u \in W_{hh_M^{s_2}}$. Если же $s_1 + \varepsilon_0 < s_2$, то снова в силу предложения 8 $u \in W_{hh_M^{s_1+\varepsilon_0}}$. Так как число ε_0 зависит лишь от M , $\mathfrak{R}$ и $\alpha^1, \dots, \alpha^k$, то, повторяя эти рассуждения r раз (где число $r \in \mathbb{N}$ определяется из условия $(s_2 - s_1)/\varepsilon_0 \leq r < 1 + (s_2 - s_1)/\varepsilon_0$) мы получим вложение (37).

Следствие 6. При условиях теоремы 4 и предположениях $f \in C^\infty$ и $s > s_0$, все решения и уравнения $Q(D)u = f$ из класса $W_{hh_M^s}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями, т.е. при $s > s_0$

$$\{u \in W_{hh_M^s} : Q(D)u \in C^\infty\} \subset C^\infty.$$

Доказательство следует из теоремы 4.

Замечание 5. Утверждение теоремы 4 остается верным, если пространство W_h заменить соответственно пространствами $\mathring{W}_h(\Omega)$ или $W_{h,loc}(\Omega)$.

Abstract. The paper considers differential operators in the generalized Sobolev spaces. Differing necessary and sufficient conditions on the polyhedron $\mathfrak{R}$ are found, under which the function $h_{\mathfrak{R}}^s$ satisfies the Beurling condition for s great enough. They coincide (become necessary and sufficient) for polyhedrons in $\mathbb{R}_+^2$. The regularity of a class of differential equations is investigated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными* 2 (Мир, Москва, 1986).
- [2] S. Gindikin and L. Volevich, *The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations* (Kluwer, Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1992).
- [3] N. Kumano-Go, *Pseudo Differential Operators* (Math. Press, Cambridge, MA, 1981).
- [4] A. Beurling, "Construction and Analysis of Some Convolutions Algebras", *Ann. Inst. Fourier* **14**, 1-32 (1964).
- [5] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", *Труды МИАН СССР* **91**, 59-81 (1967).
- [6] Г. Г. Казарян, "Операторы постоянной силы с оценкой снизу через производные и формально гипоеллиптические операторы", *Analysis Matematica* **3**, 263-289 (1977).
- [7] V. N. Margaryan and G. O. Hakobyan, "On Gevrey Class Solutions of Hypoelliptic Equations", *Izv. Akad. Nauk Armenii, Matematika* [Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)] **33** (1), 1-13 (1998).

- [8] G. Garelo and L. Rodino, "Nonlinear Microlocal Analysis", 67-82 (World Scientific, Singapore, New-Jersey, London, Hong-Kong, 1999).
- [9] G. Garelo, "Generalized Sobolev Algebras and Regularity for Solutions", Com. Appl. Analysis **3** (4), 563-574 (1999).
- [10] G. Garelo, "Pseudo Differential Operators With Symbols in Weighted Sobolev Spaces and Regularity for Non Linear Partial Differential Equations", Math. Nach., 239-240, 62-79 (2002).
- [11] Т. В. Маргарян, В. Н. Маргарян, "О некоторых алгебраических свойствах обобщенных пространств Соболева-Лиувилля", Изв. НАН Армении, Математика **40** (2), 61-70 (2005).

Поступила 8 июня 2007