

ФАКТОРИЗАЦИЯ МЕРОМОРФНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Р. А. АМИРДЖАНИЯН И А. Г. КАМАЛЯН

*Российско-Армянский Университет
E-mail: hrach2004@mail.ru
Ереванский Государственный Университет
E-mail: kamalyan-armen@yahoo.com*

Аннотация. Рассматривается класс матриц-функций определенных на некотором контуре комплексной плоскости и допускающих мероморфное продолжение во внутреннюю либо внешнюю области контура. Данный класс матриц-функций, вообще говоря, не обладает стандартной факторизацией Винера-Хопфа. В работе для указанных классов матриц-функций исследуется задача индексной факторизации, близкой по своим свойствам к факторизации Винера-Хопфа. Найдены критерии индексной факторизации и точные формулы для частных индексов. Предлагается конструктивный метод, сводящий задачу факторизации к решению конечного числа явно записываемых систем линейных алгебраических уравнений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории краевых задач для аналитических функций и в теории операторов теплицева типа возникает необходимость представления матрицы-функции G порядка $n \times n$, определенной на некотором замкнутом контуре Γ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, в виде

$$(1.1) \quad G(t) = G_-(t)\Lambda(t)G_+^{-1}(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $\Lambda(t) = \text{diag} [t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}]$ ($\kappa_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$), а матрицы-функции $G_{\pm}^{\pm 1}$ являются граничными значениями матриц-функций, аналитических соответственно во внутренней Ω^+ ($\ni 0$) и во внешней Ω^- ($\ni \infty$) областях контура Γ . Числа κ_i ($i = 1, \dots, n$) называются частными индексами G . Предполагается, что $G_{\pm}$ обладают дополнительными граничными свойствами обеспечивающими, в частности, однозначность частных индексов.

Среди факторизаций типа (1.1), наиболее хорошо исследована факторизация, известная в литературе под названием Винера-Хопфа (точное определение см. ниже). В настоящее время критерии существования факторизации Винера-Хопфа известны для широких классов матриц-функций (см. например, [1]-[4]). Несмотря на это, конструктивная теория факторизации Винера-Хопфа (в случае $n > 1$) построена для весьма узких классов матриц-функций. Наиболее полное исследование в этом плане проведено для аналитических (и близких к ним по структуре мероморфных) матриц-функций.

Необходимые и достаточные условия факторизуемости матриц-функций, представляющихся в виде суммы матрицы-функции из класса Смирнова и рациональной матрицы-функции с полюсами вне контура, получены И.М. Спитковским (см. [5] и [4]). Им же предложена рекурсивная процедура построения факторизации. Общий подход построения факторизации аналитических оператор-функций предложен в [6] и основан на теории минимальной факторизации аналитических оператор-функций, развитой авторами этой работы. Явная факторизация для различных классов мероморфных матриц-функций построена в работах [7, 8, 9]. Несмотря на различие методов, результаты всех этих работ формулируются в терминах степенных моментов (относительно контура Γ) матрицы-функции, обратной к факторизуемой.

В работах [10, 11] рассматривается факторизация более общего характера, чем (1.1) и изучается ее связь с векторной задачей Римана.

В работе [13] (см. также [12]) вводится понятие индексной факторизации, позволяющей за счет ослабления требований на граничные значения $G_{\pm}^{-1}$, существенно расширить класс матриц-функций, допускающих представление (1.1). Заметим, что в случаях, когда м.-ф. G допускает факторизацию Винера-Хопфа, ее индексная факторизация существует и одновременно является факторизацией Винера-Хопфа.

Настоящая работа посвящена исследованию индексной факторизации мероморфных матриц-функций.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Пусть Ω_j ($j = 0, 1, \dots, m$) односвязные ограниченные области комплексной плоскости $\mathbb{C}$ такие, что $\overline{\Omega}_j \subset \Omega_0$, $\overline{\Omega}_j \cap \overline{\Omega}_i = \emptyset$ ($i, j = 1, \dots, m$), а границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j$ ($j = 0, \dots, m$) являются замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми. Предполагается, что контур $\Gamma = \bigcup_{j=0}^m \Gamma_j$ ориентирован таким образом, что при его обходе, внутренняя область $\Omega^+ = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{\Omega}_j$ остается слева, а внешняя область $\Omega^- = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}^+$ — справа.

Пусть $E_p^{\pm}$ ($0 < p \leq \infty$) — классы Смирнова областей $\Omega^{\pm}$ (по поводу определений, см. [14]–[16], а также [4]), $\overset{\circ}{E}_p^-$ — класс функций из E_p^- , исчезающих на бесконечности, а $L_p^{\pm}(\overset{\circ}{L}_p^-)$ — множество функций из L_p ($= L_p(\Gamma)$), совпадающих почти всюду на Γ с угловыми предельными значениями некоторой функции из $E_p^{\pm}(\overset{\circ}{E}_p^-)$. Ниже через R будем обозначать множество рациональных функций, а через R_0 — множество рациональных функций с полюсами вне контура Γ . Множество мероморфных в Ω^+ (Ω^-) функций φ , для каждой из которых существует ненулевой многочлен q_+ (существуют ненулевой многочлен q_- и целое число k ($k \geq 0$)) такой (такие), что $q_+\varphi \in (L_p^+)$ ($t^{-k}(q_-\varphi)(t) \in \overset{\circ}{L}_p^-$) будем обозначать через $\widetilde{M}_p^+$ ($\widetilde{M}_p^-$). Мы также будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\mathcal{L}_p := L_p^+ + \overset{\circ}{L}_p^-, \quad M_p^{\pm} := L_p^{\pm} + R_0, \quad L^{\pm} = \bigcup_{p>0} L_p^{\pm}, \quad M^{\pm} = \bigcup_{p>0} M_p^{\pm}.$$

Скажем, что $\Gamma \in \mathcal{S}$, если все области $\Omega_j, C \setminus \overline{\Omega}_j$ ($j = 0, \dots, m$) являются смирновскими (относительно определения смирновской области и достаточных условий для $\Gamma \in \mathcal{S}$ см. [14]-[18], а также [4]).

Ниже пространство вектор-столбцов порядка n (матриц порядка $n \times n$) с элементами из линейного пространства X обозначается через X^n и $(X^{n \times n})$. Вместо часто встречающихся слов матриц-функция и вектор-функция используются сокращения м.-ф. и в.-ф. соответственно.

Под правой факторизацией Винера-Хопфа в пространстве L_p ($1 < p < \infty$) относительно контура Γ (далее $WH(r, p)$ -факторизация) м.-ф. G мы понимаем (см. [4]) представление (1.1), где

$$G_{\pm} \in (L_p^{\pm})^n, \quad G_{\pm}^{-1} \in (L_q^{\pm})^n, \quad q = p/(p-1),$$

$$\Lambda(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}], \quad t \in \Gamma, \quad \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_n, \quad \kappa_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Числа $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ называются правыми частными индексами матриц-функции G (далее $WH(r, p)$ – частные индексы м.-ф. G).

2.2. В работе [13] введены понятия (r_+, p) – частных индексов и (r_+, p) – индексной факторизации м.-ф. G (далее $I(r_+, p)$ -факторизация ($1 \leq p \leq \infty$)). Приведем определения этих понятий и некоторые факты, необходимые в дальнейшем.

Пусть м.-ф. G порядка $n \times n$, элементы которой почти всюду на контуре Γ принимают конечные комплексные значения. Через $\mathcal{D}_p^+(G)$ ($1 \leq p \leq \infty$) обозначим пространство всех в.-ф. $\varphi_+ \in (L_p^+)^n$ таких, что $G\varphi_+ \in \mathcal{L}_p^n$, а через $\mathcal{D}_p^-(G)$ – пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in (L_p^-)^n$, для которых существует $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$ такое, что $\varphi_- = G\varphi$.

Оператор, проектирующий $\mathcal{L}_p$ на L_p^+ или на $\overset{\circ}{L}_p^-$ ($1 \leq p \leq \infty$) параллельно $\overset{\circ}{L}_p^-$ или L_p^+ соответственно обозначим через P_+ или P_- . Действие проекторов $P_{\pm}$ на в.-ф. и м.-ф. понимается покомпонентно.

Пусть $T_p(G)$ – оператор Теплица ($1 \leq p \leq \infty$) с областью определения $\mathcal{D}_p^+(G)$, действующий по формуле

$$T_p(G)\varphi_+ = P_+(G\varphi_+), \quad \tau_{\alpha} \quad (\alpha \in C),$$

и τ_{α}^- ($\alpha \in \overline{C} \setminus \{0\}$) – операторы сдвига, действующие на функцию $f \in$ (соответственно в.-ф. и м.-ф.) по формулам

$$(\tau_{\alpha}f)(t) = (t - \alpha)f(t), \quad \tau_{\alpha}^- = -(\alpha)^{-1}\tau_{\alpha}\tau_0^{-1} \quad (\tau_{\infty}^- = (\tau_0)^{-1}).$$

Обозначим через $N_{p,j}(G)$ ($j \in \mathbb{Z}$) ядра оператора $T_p(\tau_0^{-j}G)$. Следуя [12], подпространство

$$\hat{N}_{p,j}(G) = N_{p,j}(G) + \tau_0 N_{p,j}(G)$$

будем называть $(p, j)_+$ -наследственным подпространством, а его произвольное прямое дополнение $M_{p,j}(G)$ в $N_{p,j+1}^-$ $(p, j)_+$ -индексным подпространством м.-ф. G . Определим числа

$$\mu_p(G, j) = \dim M_{p,j}(G).$$

В [12] доказывается, что

$$\hat{n}(G) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu_p(G, j) \leq n.$$

В случае $\hat{n}(G) = n$ будем говорить, что м.-ф. G допускает конечную (r_+, p) -индексацию.

Пусть

$$\{\eta_1, \dots, \eta_s\} = \{j; \mu_p(G, j) > 0\}, \quad \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_s \quad (s \in N)$$

и $n_j = \mu_p(G, \eta_j)$. Числа $\kappa_1 = \dots = \kappa_{n_1} = \eta_1$ и

$$\kappa_{n_1+1} = \dots = \kappa_{n_1+n_2} = \eta_2, \dots, \kappa_{n_1+n_2+\dots+n_{s-1}+1} = \dots = \kappa_{\hat{n}(G)} = \eta_s$$

будем называть (r_+, p) -частными индексами м.-ф. G . Для каждой точки $z \in \Omega^+$ рассмотрим также подпространства

$$N_{p,j}(G; z) = \{\varphi(z) : \varphi \in N_{p,j}(G)\} \quad \text{и} \quad M_{p,j}(G; z) = \{\varphi(z) : \varphi \in M_{p,j}(G)\}.$$

В работе [12] доказано, что число $\dim N_{p,j}(G; z)$ одновременно для всех $j \leq \eta_1$ и почти для всех $z \in \Omega^+$ является постоянной, которую обозначим через $\mu_p(G; -\infty)$. Там же (см. также [13]) доказывается, что число $\dim N_{p,j}(G; z)$ равно $\mu_p(G; -\infty) + \hat{n}(G)$ одновременно для всех $j > \eta_s$ и почти для всех $z \in \Omega^+$ и, что $\dim N_{p,j}(G; z)$ не превышает $\mu_p(G; -\infty) + \hat{n}(G)$ для остальных z . Определим

$$\mu_p(G; +\infty) := n - \hat{n}(G) - \mu_p(G; -\infty).$$

Отсюда в частности следуют следующие утверждения, необходимые нам в дальнейшем (см. также [12], [13]).

- I. $\mu_p(G; -\infty) = 0$ тогда и только тогда, когда существует $j \in Z$ такое, что $\dim N_{p,j}(G) = 0$.
- II. $\mu_p(G; +\infty) = 0$ тогда и только тогда, когда существуют $j \in Z$ и $z \in \Omega^+$ такие, что $\dim N_{p,j}(G, z) = n$.

В работе [13] доказано, что если $\mu_p(G, -\infty) = 0$, то

$$\dim N_{p,k}(G) = \sum_{j < k} (k - j) \mu_p(j, G), \quad k \in Z.$$

Отсюда, пользуясь стандартными рассуждениями (см., например, [9]), нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

- III. Пусть $\mu_p(G, -\infty) = 0$, а η_0 и η_{s+1} — произвольные целые числа, удовлетворяющие условиям $\eta_0 \leq \eta_1$, $\eta_{s+1} \geq \eta_s$, $\eta_0 < \eta_{s+1}$. Тогда для любых $i = 1, 2, \dots, \hat{n}(G)$ (r_+, p) -частные индексы м.-ф G удовлетворяют равенствам

$$(2.1) \quad \kappa_i = \eta_0 + \text{card}\{j : \dim N_{p,j}(G) - \dim N_{p,j-1}(G) < i, j = \eta_0 + 1, \dots, \eta_{s+1}\}.$$

Скажем, что м.-ф. G допускает (r_+, p) -индексную факторизацию (см. [13]), если G допускает представление (1.1), а факторы $G_{\pm}$ и Λ удовлетворяют условиям:

- а) $G_{\pm} \in (L_p^{\pm})^{n \times n}$,
- б) для любых $z \in \bar{\Omega}^+$ и $V \in C^n$, $V \neq 0$, в.-ф. $\tau_z^{-1} G_+ V$ не принадлежит $\mathcal{D}_p^+(G)$,
- в) для любых $z \in \Omega^-$ и $V \in C^n$, $V \neq 0$, в.-ф. $(\tau_z^-)^{-1} G_- V$ не принадлежит $\mathcal{D}_p^-(G)$,
- г) $\Lambda(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}]$, где $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n$ — целые числа.

Справедливы следующие утверждения (см. [12] и [13]).

IV. Пусть м.-ф. G допускает конечную (r_+, p) -индексацию, $\{\eta_1, \dots, \eta_s\} = \{j, \mu_p(G, j) > 0\}$ ($s \in N$), а $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n - (r_+, p)$ -частные индексы G . Тогда м.-ф. G допускает $I(r_+, p)$ -факторизацию. Кроме того, если $M_{p, \eta_k}(G)$ ($k = 1, \dots, s$) некоторые $(p, \eta_k)_+$ -индексные подпространства м.-ф. G , а столбцы м.-ф. G'_+ являются базисом пространства $M_{p, \eta_1}(G) + \dots + M_{p, \eta_s}(G)$, то представление

$$G = G'_- \Lambda (G'_+)^{-1}, \text{ где } \Lambda = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}] \text{ и } G'_- = GG_+ \Lambda^{-1},$$

является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. G .

V. Пусть $\mu_p(G, -\infty) = 0$ и представление $G = G_- \Lambda G_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. G с $\Lambda(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}]$. Тогда м.-ф. G допускает конечную (r_+, p) -индексацию с (r_+, p) -частными индексами равными $\kappa_1, \dots, \kappa_n$. Если

$$\{\eta_1, \dots, \eta_s\} = \{j, \mu_p(G, j) > 0\} \quad (s \in N), \quad n_j = \mu_p(G, \eta_j) \quad (j = 1, \dots, s),$$

$G_{11}^+, \dots, G_{1n_1}^+, G_{21}^+, \dots, G_{2n_2}^+, \dots, G_{s1}^+, \dots, G_{sn_s}^+$ столбцы матриц-функции G_+ , то $\text{span}\{G_{k1}^+, \dots, G_{kn_k}^+\}$ ($k = 1, \dots, s$) является $(p, \eta_k)_+$ -индексным подпространством м.-ф. G .

VI. Если м.-ф. G обладает тем свойством, что из условий $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$ и $G\varphi = 0$ следует, что $\varphi = 0$, то условие в) $I(r_+, p)$ -факторизации выполняется и для $z \in \Gamma$.

2.3. М.-ф. B , мероморфную в области Ω^+ и имеющую почти всюду на Γ угловые граничные значения, назовем p -допустимой в Ω^+ ($1 \leq p \leq \infty$), если существует ненулевой многочлен g такой, что из условия $\varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+(\mathcal{B})$ следует $gB\varphi_+ \in (L_1^+)^n$. Обозначим множество p -допустимых в Ω^+ м.-ф. через $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$. Обозначим через $\mathcal{F}_p(\Omega^+)$ подмножество $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, состоящее из аналитических в Ω^+ м.-ф.. Нетрудно заметить, что если $B \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$, то из условия $\varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+(\mathcal{B})$ следует, что $B\varphi_+ \in (L_1^+)^n$. Заметим также, что для того, чтобы м.-ф. $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ достаточно выполнение одного из следующих двух условий (см. теоремы 1.11 и 1.25 из [4]):

- 1) $B \in (\widetilde{M}_q^+)^{n \times n}$, $q = p/(p-1)$,
- 2) $\Gamma \in \mathcal{S}$ и $B \in (M^+)^{n \times n}$.

Для м.-ф. G , определенной на контуре Γ , через $\overset{\circ}{D}_p^-(G)$ ($1 \leq p \leq \infty$) обозначим пространство всех в.-ф. $\varphi_- \in (\overset{\circ}{L}_p^-)^n$ таких, что $G\varphi_- \in \mathcal{L}_1^n$. Тогда м.-ф. G , мероморфную в области Ω^- и имеющую почти всюду на Γ угловые граничные значения, назовем p -допустимой в Ω^- , если существуют ненулевой многочлен g и число $k \in \mathbb{Z}$ ($k \geq 0$), такие, что из условия $\varphi_- \in \overset{\circ}{D}_p^-(G)$ следует, что $\tau_0^{-k} g G \varphi_- \in (\overset{\circ}{L}_1^-)^n$. Обозначим множество p -допустимых в Ω^- м.-ф. через $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. Подмножество $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, состоящее из аналитических м.-ф. в Ω^- обозначим через $\mathcal{F}_p(\Omega^-)$. Если $G \in \mathcal{F}_p(\Omega^-)$ и $\varphi_- \in \overset{\circ}{D}_p^-(G)$, то $G\varphi_- \in (\overset{\circ}{L}_1^-)^n$. Заметим также, что для того,

чтобы $G \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ достаточно выполнение одного из следующих двух условий (см. теоремы 1.11 и 1.25 из [4]).

- 1) $G \in \left(\widetilde{M}_q^-\right)^{n \times n}$, $q = p/(p-1)$,
- 2) $\Gamma \in \mathcal{S}$ и $G \in (M^-)^{n \times n}$.

Нетрудно видеть, что из условий $g \in R$ и $G \in \mathcal{MF}_p(\Omega^\pm)$ следует, что $gG \in \mathcal{MF}_p(\Omega^\pm)$. М.-ф. G , мероморфную в области $\Omega^\pm$ и имеющую почти всюду на Γ угловые граничные значения, назовем регулярной в $\Omega^\pm$, если $\det G$ тождественно не равен нулю в $\Omega^\pm$.

Пусть $\mathcal{B}(A)$ регулярная м.-ф. в Ω^+ (Ω^-). Ганкелевы операторы $H_p^+(\mathcal{B}^{-1})$ и $H_p^-(A^{-1})$ с областью определения $\mathcal{D}_p^+(\mathcal{B}^{-1})$ $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_p^-(A^{-1})$ соответственно определим по формулам:

$$H_p^+(\mathcal{B}^{-1})\varphi = P_-(\mathcal{B}^{-1}\varphi), \quad H_p^-(A^{-1})\varphi = P_+(A^{-1}\varphi).$$

Пусть

$$J_s = \left\{ \sum_{k=0}^{s-1} y_k z^k; y_k \in \mathbb{C}^n, z \in \mathbb{C} \right\}, \quad s \in N,$$

$$J_s = \left\{ \sum_{k=s}^{-1} y_k z^k; y_k \in \mathbb{C}^n, z \in \mathbb{C} \right\}, \quad -s \in N,$$

а изоморфизмы $\Psi_s : \mathbb{C}^{n|s|} \rightarrow J_s$ определены по формулам:

$$\Psi_s \bar{y} = \sum_{k=0}^{s-1} y_k z^k,$$

где $\bar{y} = [y_0^T, \dots, y_{s-1}^T]^T$, $y_k \in \mathbb{C}^n$ ($k = 0, \dots, s-1$), $s \in N$, и

$$\Psi_s \bar{y} = \sum_{k=s}^{-1} y_k z^k,$$

где $\bar{y} = [y_{-1}^T, \dots, y_s^T]^T$, $y_k \in \mathbb{C}^n$ ($k = s, \dots, -1$), $-s \in N$.

В данной работе исследуется задача $I(r_+, p)$ -факторизации м.-ф. из класса $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и м.-ф., обратные к которым принадлежат $\mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ ($1 \leq p \leq \infty$).

Справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. Пусть $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$ регулярная м.-ф. в Ω^+ . Тогда $N_{p,s}(\mathcal{B}) = \{0\}$ при $s \leq 0$ и $N_{p,s}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1} \ker \left(H_p^+(\mathcal{B}^{-1})|_{J_s} \right)$ при $s > 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi_+ \in N_{p,s}(\mathcal{B})$. С помощью стандартных рассуждений нетрудно убедиться, что $\varphi_+ = 0$ при $s \leq 0$ и $\mathcal{B}\varphi_+ \in J_s$ при $s > 0$. Поскольку $H_p^+(\mathcal{B}^{-1})\mathcal{B}\varphi_+ = 0$, то $N_{p,s}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}^{-1} \ker \left(H_p^+(\mathcal{B}^{-1})|_{J_s} \right)$ ($s > 0$).

Пусть $\varphi_+ \in \ker \left(H_p^+(\mathcal{B}^{-1})|_{J_s} \right)$ ($s > 0$), т.е. $\varphi_+ \in J_s$ и $\psi_+ = \mathcal{B}^{-1}\varphi_+ \in (L_p^+)^n$. Очевидно, что $\psi_+ \in \mathcal{D}_p^+(\mathcal{B})$ и $T_p(\tau_0^{-s}\mathcal{B})\psi_+ = P_+(\tau_0^{-s}\varphi_+) = 0$.

Предложение 2. Пусть $A \in (L_p^-)^{n \times n}$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-)$. Тогда

$$N_{p,j}(A) = \tau_0^{j-} \ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^{j-} I_n \right) \Big|_{Im H_p^- \tau_0^{j+} A^{-1}} \right),$$

где $j^- = \frac{1}{2}(j - |j|)$, $j^+ = \frac{1}{2}(j + |j|)$ ($j \in \mathbb{Z}$) и I_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

Доказательство. Пусть $\varphi_+ \in N_{p,j}(A)$. Тогда существует $\varphi_- \in \left(\overset{\circ}{L}_p^- \right)^n$ такой, что $\tau_0^{-j} A \varphi_+ = \varphi_-$, т.е. $\tau_0^{j+} A^{-1} \varphi_- = \tau_0^{-j-} \varphi_+ \in (L_p^+)^n$. Отсюда

$$\tau_0^{-j-} \varphi_+ = P_+ \left(\tau_0^{j+} A^{-1} \varphi_- \right) = H_p^- \left(\tau_0^{j+} A^{-1} \right) \varphi_-.$$

С другой стороны,

$$H_p^+ \left(\tau_0^{j-} I_n \right) \left(\tau_0^{-j-} \varphi_+ \right) = 0.$$

Докажем обратное. Пусть

$$\varphi_+ \in \ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^{j-} I_n \right) \Big|_{Im H_p^- \tau_0^{j+} A^{-1}} \right).$$

Тогда существуют $\psi_- \in \overset{\circ}{D}_p^- \left(\tau_0^{j+} A^{-1} \right)$ и $\varphi_- \in \left(\overset{\circ}{L}_1^- \right)^n$ такие, что $\tau_0^{j+} A^{-1} \psi_- = \varphi_+ + \varphi_-$. Поскольку $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-)$, то существует многочлен g такой, что $g\varphi_+ = g\tau_0^{j+} A^{-1} \psi_- - g\varphi_- \in (L_1^+)^n \cap (M_1^-)^n$, где полюсы в.-ф. $g\varphi_+$ находятся в бесконечности, т.е. $g\varphi_+$ является векторным многочленом и, следовательно, $\varphi_+ \in R_0^n$. Поскольку $\varphi_+ \in R_0^n$, $A \in (L_p^-)^{n \times n}$, а правая часть равенства $\tau_0^{-j+} A \varphi_+ = \psi_- - \tau_0^{-j+} A \varphi_-$ аналитична в Ω^- и равна нулю в бесконечно удаленной точке, то $\tau_0^{-j+} A \varphi_+ \in \left(\overset{\circ}{L}_p^- \right)^n$. С другой стороны, $\tau_0^{j-} \varphi_+ \in (L_p^+)^n$ и $A \tau_0^{j-} \varphi_+ \in \mathcal{L}_p^n$, т.е. $\tau_0^{j-} \varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+(A)$. Отсюда

$$T_p \left(\tau_0^{-j} A \right) \tau_0^{j-} \varphi_+ = P_+ \left(\tau_0^{-j+} A \varphi_+ \right) = 0.$$

2.4. Для любых в.-ф. и м.-ф. из класса L_1 , введем следующее обозначение:

$$\langle f \rangle_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-k-1} f(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $B^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$ и $P_-(B^{-1}) \neq 0$. М.-ф. $P_-(B^{-1})$ допускает представление в виде

$$P_-(B^{-1}) = \mathcal{P}_r \mathcal{Q}_r^{-1} = \mathcal{Q}_\ell^{-1} \mathcal{P}_\ell,$$

где $\mathcal{Q}_r$ и $\mathcal{Q}_\ell$ – матричные полиномы с старшими коэффициентами равными единичной матрице I_n , а $\mathcal{P}_r$ и $\mathcal{P}_\ell$ – матричные полиномы удовлетворяющие условиям $\deg \mathcal{P}_r < \deg \mathcal{Q}_r = \nu_r$ и $\deg \mathcal{P}_\ell < \deg \mathcal{Q}_\ell = \nu_\ell$. Очевидно что такого типа представления неоднозначны. Наименьшие числа ν_r и ν_ℓ , при которых возможны такие представления, будем обозначать соответственно через $\nu_r(B^{-1})$ и $\nu_\ell(B^{-1})$. Заметим также, что возможность представлений $P_-(B^{-1}) = \mathcal{P}_r \mathcal{Q}_r^{-1}$ и $P_-(B^{-1}) = \mathcal{Q}_\ell^{-1} \mathcal{P}_\ell$ соответственно эквивалентна существованию матриц

$Q_0^{(r)}, \dots, Q_{\nu_r-1}^{(r)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $Q_0^{(\ell)}, \dots, Q_{\nu_\ell-1}^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, удовлетворяющих соотношениям

$$(2.2) \quad \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-(\nu_r+m)} + \sum_{k=0}^{\nu_r-1} \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-(m+k)} Q_k^{(r)} = 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$(2.3) \quad \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-(\nu_\ell+m)} + \sum_{k=0}^{\nu_\ell-1} Q_k^{(\ell)} \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-(m+k)} = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

В случае, когда $P_-(\mathcal{B}^{-1}) = 0$, будем считать, что $\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1}) = \nu_r(\mathcal{B}^{-1}) = 0$.

Для $\mathcal{B}^{-1} \in (M_1^+)^{n \times n}$ через $\mathcal{H}_s^+$ ($s \in \mathbb{N}$) будем обозначать ганкелеву матрицу:

$$\mathcal{H}_s^+ = \begin{bmatrix} \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-1} & \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-2} & \dots & \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-s} \\ \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-2} & \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-3} & \dots & \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1})} & \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1})-1} & \dots & \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{-\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1})-s+1} \end{bmatrix}$$

Пусть $h_s^+ = \text{rang } \mathcal{H}_s^+$ при $s > 0$ и $h_0^+ = 0$. Учитывая (2.2), нетрудно заметить, что $h_s^+ = h_{\nu_r(\mathcal{B}^{-1})}$ при $s > \nu_r(\mathcal{B}^{-1})$.

Пусть $A^{-1} \in (M_1^+)^{n \times n}$ и $P_+(A^{-1}) \neq 0$. М.-ф. $P_+(A^{-1})$ допускает представление в виде $P_+(A^{-1}) = \mathcal{P}_r \mathcal{Q}_r^{-1} = \mathcal{Q}_\ell^{-1} \mathcal{P}_\ell$, где $\mathcal{Q}_r$, $\mathcal{Q}_\ell$, $\mathcal{P}_r$ и $\mathcal{P}_\ell$ – матричные полиномы удовлетворяющие условиям $\mathcal{Q}_r(0) = \mathcal{Q}_\ell(0) = I_n$, $\deg \mathcal{P}_r \leq \deg \mathcal{Q}_r \leq \nu_r$ и $\deg \mathcal{P}_\ell \leq \deg \mathcal{Q}_\ell \leq \nu_\ell$. Наименьшие числа ν_r , ν_ℓ , для которых возможны соответствующие представления, будем обозначать соответственно через $\nu_r(A^{-1})$, $\nu_\ell(A^{-1})$. Аналогичным образом, возможность таких представлений для $P_+(A^{-1})$ эквивалентна существованию матриц $Q_1^{(r)}, \dots, Q_{\nu_r}^{(r)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $Q_1^{(\ell)}, \dots, Q_{\nu_\ell}^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, удовлетворяющих соотношениям

$$(2.4) \quad \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r+m} + \sum_{k=1}^{\nu_r} \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r+m-k} Q_k^{(r)} = 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$(2.5) \quad \langle A^{-1} \rangle_{\nu_\ell+m} + \sum_{k=1}^{\nu_\ell} Q_k^{(\ell)} \langle A^{-1} \rangle_{\nu_\ell+m-k} = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

В случае, когда $P_+(A^{-1}) = 0$, считаем, что $\nu_r(A^{-1}) = \nu_\ell(A^{-1}) = 0$.

В [19] доказано, что если $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap (M_1^-)^{n \times n}$, то

$$\text{Im } H_1^- \left(\tau_0^j A^{-1} \right) = \text{Im} \left(H_1^- \left(\tau_0^j A^{-1} \right) \Big|_{J_{-(\nu_r(A^{-1})+j)}} \right), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \geq 0.$$

Отсюда, очевидным образом, следует что

$$\text{Im } H_p^- \left(\tau_0^j A^{-1} \right) = \text{Im} \left(H_p^- \left(\tau_0^j A^{-1} \right) \Big|_{J_{-(\nu_r(A^{-1})+j)}} \right), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \geq 0.$$

Пусть $A^{-1} \in (M_1^-)^{n \times n}$. Тогда через $\mathcal{H}_s^-$ ($-s \in N$) будем обозначать ганкелеву матрицу:

$$\mathcal{H}_s^- = \begin{bmatrix} \langle A^{-1} \rangle_1 & \langle A^{-1} \rangle_2 & \dots & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r(A^{-1})} \\ \langle A^{-1} \rangle_2 & \langle A^{-1} \rangle_3 & \dots & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_r(A^{-1})+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle A^{-1} \rangle_{-s} & \langle A^{-1} \rangle_{-s+1} & \dots & \langle A^{-1} \rangle_{-s+\nu_r(A^{-1})-1} \end{bmatrix}$$

Числа h_s^- ($s \in Z$, $s \leq 0$) и пространство F_j ($j \leq 0$) определим следующим образом: $h_s^- = \text{rang } \mathcal{H}_s^-$ при $s < 0$ и $h_0^- = 0$, $F_j = \ker \mathcal{H}_j^-$ при $j < 0$ и $F_0 = C^{\nu_r(A^{-1})}$. Из (2.5) следует, что $h_s^- = h_{-\nu_\ell(A^{-1})}^-$, когда $s < -\nu_\ell(A^{-1})$. Очевидно, что числа h_s^+ , h_s^- зависят от матриц B^{-1} , A^{-1} и контура интегрирования. Эти числа будем обозначать через $h_s^+(\Gamma, B^{-1})$ и $h_s^-(\Gamma, A^{-1})$ соответственно.

3. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ МЕРОМОРФНЫХ ВО ВНУТРЕННЕЙ ОБЛАСТИ КОНТУРА

3.1. Вначале приведем критерий $I(r_+, p)$ -факторизуемости для м.-ф. из класса $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$.

Предложение 3. Если $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ допускает $I(r_+, p)$ -факторизацию, то $\det B^{\pm 1}$ имеет конечное число нулей в Ω^+ .

Доказательство. Пусть представление $B = B_- \Lambda B_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. B . Поскольку $\det B_\pm \neq 0$ в $\Omega^\pm$, то из теоремы единственности следует, что $\det B$ отличен от нуля почти всюду на Γ . Из $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и $B_+ e_k \in \mathcal{D}_p^+(B)$ ($k = 1, \dots, n$), где $e_k = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$ ($k = 1, \dots, n$) – базисные векторы в $\mathbb{C}^n$, следует, что существует ненулевой полином g такой, что $gBB_+ \in (L_1^+)^{n \times n}$. В.-ф. $gB_- \Lambda$ принадлежит $(M_p^-)^{n \times n}$ и может иметь полюс лишь в бесконечности. Поэтому из равенства $gBB_+ = gB_- \Lambda$ следует, что $gBB_+ \in (L_1^+)^{n \times n} \cap (M_p^-)^{n \times n}$. Последнее означает, что gBB_+ является ненулевой полиномиальной матрицей.

Предложение 4. Пусть B – регулярная м.-ф. в Ω^+ . Тогда

- 1) Если $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ ($1 \leq p \leq \infty$), то $\mu_p(B, -\infty) = 0$,
- 2) Если $B^{-1} \in (\widetilde{M}_p^+)^{n \times n}$, то $\mu_p(B, +\infty) = 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+(B)$. Поскольку м.-ф. B из $\mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, то существует ненулевой многочлен g такой, что $gB\varphi_+ \in (L_1^+)^n$. Пусть $\text{If } j \leq -\deg g$. Если $\varphi_+ \in N_{p,j}(B)$, то существует $\varphi_- \in \left(\overset{\circ}{L}_p^-\right)^n$ такое, что $gB\varphi_+ = \tau_0^j g\varphi_-$. Отсюда следует, что $gB\varphi_+ = 0$, и получим $\varphi_+ = 0$ в силу регулярности м.-ф. B . Таким образом, $N_{p,j}(B) = \{0\}$, и 1) следует из утверждения I.

Пусть $B^{-1} \in (\widetilde{M}_p^+)^{n \times n}$, тогда существует ненулевой полином q такой, что $qB^{-1} \in (L_p^+)^{n \times n}$. Заметим, что $qB^{-1}e_k \in \mathcal{D}_p^+(B)$ ($k = 1, \dots, n$). Если $j > \deg q$, то из равенства $\tau_0^{-j} B B^{-1} q e_k = \tau_0^{-j} q e_k$ ($k = 1, \dots, n$) следует, что $B^{-1} q e_k \in N_{p,j}(B)$.

В свою очередь из регулярности $\mathcal{B}$ следует существование точки $z \in \Omega^+$ такой, что $\dim N_{p,j}(\mathcal{B}, z) = n$. Таким образом, утверждение 2) следует из II.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, $1 \leq p \leq \infty$. Для того, чтобы $\mathcal{B}$ допускала $I(r_+, p)$ -факторизацию, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\widetilde{M}_p^+\right)^{n \times n}$.

Доказательство: Пусть $\mathcal{B}$ допускает $I(r_+, p)$ -факторизацию, тогда $\mathcal{B} = \mathcal{B}_- \Lambda \mathcal{B}_+^{-1}$, где $\mathcal{B}_- \in (L_p^-)^{n \times n}$ и $\mathcal{B}_+ \in (L_p^+)^{n \times n}$, $\Lambda(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}]$ ($\kappa_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$). Тогда очевидно, что $\mathcal{B}$ регулярная м.-ф. в Ω^+ . Поскольку существует ненулевой многочлен g такой, что $g\mathcal{B}\mathcal{B}_+ = g\mathcal{B}_-\Lambda \in (L_1^+)^{n \times n}$, то отсюда следует, что $\mathcal{B}_- \in R_0^{n \times n}$. Из представления $\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{B}_+ (\mathcal{B}_- \Lambda)^{-1}$ следует, что $\mathcal{B}^{-1} \in \left(\widetilde{M}_p^+\right)^{n \times n}$. Обратное утверждение следует из предложения 4 и утверждения IV.

Следствие 1. Если $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$ и представление $\mathcal{B}_- \Lambda \mathcal{B}_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. $\mathcal{B}$, то $\det \mathcal{B}_-(z) \neq 0$ для $z \in \Gamma$.

Доказательство: Пусть существует $z_0 \in \Gamma$ такое, что $\det \mathcal{B}_-(z_0) = 0$. Поскольку м.-ф. $\mathcal{B}_-(z)$ – рациональная м.-ф., то существуют ненулевой вектор $V \in \mathbb{C}^n$ и рациональная в.-ф. $\psi_- \in \left(\overset{\circ}{L}_p^-\right)^n$ такие, что в достаточно малой окрестности точки z_0 имеет место представление $\mathcal{B}_-(z)V = (z - z_0)\psi_-(z)$. Отсюда $(\tau_{z_0}^-)^{-1} \mathcal{B}^{-1} \mathcal{B}_- V = \mathcal{B}^{-1}(-z_0)\tau_0 \psi_- \in (\mathcal{L}_p)^n$, т.е. $(\tau_{z_0}^-)^{-1} \mathcal{B}_- V \in \mathcal{D}_p^-(\mathcal{B})$, что в силу VI противоречит условию в) $I(r_+, p)$ -факторизации.

3.2. Приведем теперь явные формулы для (r_+, p) -частных индексов м.-ф. $\mathcal{B} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ в случае, когда $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$.

Предложение 5. Пусть $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$, $s \in \mathbb{N}$ и $\nu_r(\mathcal{B}^{-1}) > 0$. Тогда в.-ф. φ принадлежит $\ker \left(H_p^+(\mathcal{B}^{-1})|_{J_s}\right)$ тогда и только тогда, когда вектор $\Psi_s^{-1}\varphi$ принадлежит $\text{Ker} \mathcal{H}_s^+$. В частности, справедливы равенства

$$(3.1) \quad \dim \ker \left(H_p^+(\mathcal{B}^{-1})|_{J_s}\right) = ns - h_s^+.$$

Доказательство: Пусть $\varphi \in J_s$. Поскольку $H_p^+(\mathcal{B}^{-1})\varphi = H_p^+(P_- \mathcal{B}^{-1})\varphi$, то для достаточно больших $|z|$ имеет место разложение

$$(3.2) \quad (H_p^+(\mathcal{B}^{-1})\varphi)(z) = \sum_{m=-\infty}^{-1} z^m \sum_{k=0}^{s-1} \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{m-k} \langle \varphi \rangle_k.$$

Нетрудно видеть, что если $\varphi \in J_s$, то $\mathcal{B}^{-1}\varphi \in (M_p^+)^{n \times n}$. Учитывая (3.2), получим, что $\varphi \in \ker \left(H_p^+(\mathcal{B}^{-1})|_{J_s}\right)$ тогда и только тогда, когда вектор $\Psi_s^{-1}\varphi = [\langle \varphi \rangle_0^T, \dots, \langle \varphi \rangle_{s-1}^T]^T$ удовлетворяет бесконечной системе уравнений:

$$(3.3) \quad \sum_{k=0}^{s-1} \langle \mathcal{B}^{-1} \rangle_{m-k} \langle \varphi \rangle_k = 0, \quad m = -1, -2, \dots$$

Поскольку существуют матрицы $Q_i^{(\ell)} \in C^{n \times n}$ ($i = 0, 1, \dots, \nu_\ell(\mathcal{B}^{-1}) - 1$), удовлетворяющие (2.3), то для выполнения (3.3) необходимо и достаточно, чтобы вектор $\Psi_s^{-1}\varphi$ принадлежал $\text{Ker } \mathcal{H}_s^+$. Формула (3.1) следует из очевидного равенства:

$$\dim \text{Ker} \left(H_p^+ (\mathcal{B}^{-1})|_{J_s} \right) = \dim \text{Ker } \mathcal{H}_s^+.$$

Теорема 2. Пусть $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$ и $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$. Тогда (r_+, p) -частные индексы м.-ф. $\mathcal{B}$ могут быть определены по формулам

$$\kappa_i = \text{card} \{j \mid n + h_{j-1}^+ - h_j^+ < i; j = 1, 2, \dots, \nu_r(\mathcal{B}^{-1})\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

если $\nu_r(\mathcal{B}^{-1}) \neq 0$ и $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = 0$, если $\nu_r(\mathcal{B}^{-1}) = 0$.

Доказательство: Если $\nu_r(\mathcal{B}^{-1}) = 0$, то доказательство очевидно. Если $\nu_r(\mathcal{B}^{-1}) \neq 0$, то доказательство следует из предложений 1, 4, 5 и из равенства (2.1).

3.3. Перейдем теперь к построению факторизации м.-ф. $\mathcal{B}$ в случае, когда $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$ и $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$.

Обозначим через $\omega_s^1, \omega_s^2 : C^{ns} \rightarrow C^{n(s+1)}$ ($s \in N$) следующие матричные операторы:

$$\omega_s^1 = \begin{pmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & I_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_s^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & I_n \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $\omega_s^i \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ \subset \text{Ker } \mathcal{H}_{s+1}^+$ ($i = 1, 2, s \in N$).

Предложение 6. Пусть $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$, $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$, $\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1}) > 0$, $\theta_0 = \text{Ker } \mathcal{H}_1^+$ и θ_s , $s \in N$ – некоторое прямое дополнение

$$\omega_s^1 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ + \omega_s^2 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+$$

в $\text{Ker } \mathcal{H}_{s+1}^+$. Тогда

$$(3.4) \quad \widehat{N}_{p,s}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1} \Psi_{s+1} (\omega_s^1 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ + \omega_s^2 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+)$$

а $M_{s-1} := \mathcal{B}^{-1} \Psi_s \theta_{s-1}$ является $(p, s-1)_+$ -индексным подпространством м.-ф. $\mathcal{B}$, причем $\dim M_{s-1} = \dim \theta_{s-1}$ ($s \in N$).

Доказательство: В силу предложения 1 и 5, $N_{p,s}(\mathcal{B}) = \{0\}$ при $s \leq 0$ и $N_{p,s}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1} \Psi_s \text{Ker } \mathcal{H}_s^+$ при $s > 0$. Равенство (3.4) следует из легко проверяемых равенств

$$\Psi_s \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ = \Psi_{s+1} \omega_s^1 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ \quad \text{и} \quad \tau_0 \Psi_s \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ = \Psi_{s+1} \omega_s^2 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+.$$

Поскольку $\widehat{N}_{p,0}(\mathcal{B}) = 0$, то очевидно, что M_0 является $(p, 0)_+$ -индексным подпространством.

Пусть $f \in \widehat{N}_{p,s}(\mathcal{B}) \cap M_s$. Тогда существуют векторы $y_1, y_2 \in \text{Ker } \mathcal{H}_s^+$ и $y \in \theta_s$ такие, что

$$f = \mathcal{B}^{-1} \Psi_{s+1} \omega_s^1 y_1 + \mathcal{B}^{-1} \Psi_{s+1} \omega_s^2 y_2 = \mathcal{B}^{-1} \Psi_{s+1} y.$$

Отсюда $\mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}(\omega_s^1 y_1 + \omega_s^2 y_2 - y) = 0$, следовательно, $\omega_s^1 y_1 + \omega_s^2 y_2 = y$, т.е. $y = 0$, поэтому $f = 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} N_{p,s+1}(\mathcal{B}) &= \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1} \text{Ker } \mathcal{H}_{s+1}^+ \\ &= \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1} \left[(\omega_s^1 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ + \omega_s^2 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+) + \theta_s \right] \\ &= \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}\omega_s^1 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ + \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}\omega_s^2 \text{Ker } \mathcal{H}_s^+ + \mathcal{B}^{-1}\Psi_{s+1}\theta_s \\ &= \widehat{N}_{p,s}(\mathcal{B}) + M_s. \end{aligned}$$

Таким образом, очевидно, $\dim M_{s-1} = \dim \theta_{s-1}$, и доказательство завершено. Из утверждения IV и предложения 6 следует теорема.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$, $\mathcal{B}^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$, $\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1}) > 0$ и $\eta_1 < \dots < \eta_s$ пробегает все возможные значения $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n(r_+, p)$ частных индексов м.-ф. $\mathcal{B}$. Пусть $\{X_{\eta_i,1}, \dots, X_{\eta_i,n_i}\}$ – базисы пространств θ_{η_i} ($i = 1, \dots, s$) и

$$U_{\eta_i,j} = \mathcal{B}^{-1}\psi_{\eta_i+1}X_{\eta_i,j}, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n_j.$$

Тогда, если

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_+ &= [U_{\eta_1,1}, \dots, U_{\eta_1,n_1}, U_{\eta_2,1}, \dots, U_{\eta_s,n_s}], \\ \Lambda &= \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}] \quad \text{and} \quad \mathcal{B}_- = \mathcal{B}\mathcal{B}_+\Lambda^{-1} \end{aligned}$$

то представление $\mathcal{B} = \mathcal{B}_-\Lambda\mathcal{B}_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. $\mathcal{B}$. Если $\nu_\ell(\mathcal{B}^{-1}) = 0$, то представление $\mathcal{B} = I_n I_n (\mathcal{B}^{-1})^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. $\mathcal{B}$.

Замечание 1. Пусть $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и $B^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$. Нетрудно заметить, что существует полином q с нулями в Ω^+ , такой, что $qB \in \mathcal{F}_p(\Omega^+)$ и $(qB)^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$. Теоремы 2 и 3 позволяют строить $I(r_+, p)$ -факторизацию м.-ф. qB . Если представление $qB = \tilde{B}_- \tilde{\Lambda} \tilde{B}_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. qB , то легко видеть, что представление $B = B_- \Lambda B_+^{-1}$, где $B_- = \tau_0^k q^{-1} \tilde{B}_-$ ($k = \deg q$), $\Lambda = \tau_0^{-k} \tilde{\Lambda}$ и $B_+ = \tilde{B}_+$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. B . В частности, (r_+, p) -частные индексы м.-ф. B в случае, когда $\nu_r(q^{-1}B^{-1}) > 0$, могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} \kappa_i &= -\deg q + \text{card}\left\{j \mid n + h_{j-1}^+(\Gamma, q^{-1}B^{-1}) - h_j^+(\Gamma, q^{-1}B^{-1}) < i, \right. \\ &\quad \left. j = 1, 2, \dots, \nu_r(q^{-1}B^{-1})\right\}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

В случае $\nu_r(q^{-1}B^{-1}) = 0$ имеем $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = -\deg q$.

Пусть теперь $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и $B^{-1} \in (\widetilde{M}_p^+)^{n \times n}$. Тогда существует полином q_0 , нули которого расположены на контуре Γ и такой, что $q_0 B^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$. Поскольку $q_0^{-1}B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$, то $I(r_+, p)$ -факторизация м.-ф. $q_0^{-1}B$ может быть построена вышеуказанным способом. Факторизация м.-ф. B может быть восстановлена по схеме, предложенной в [20].

3.4. Приведем простую формулу для нахождения (r_+, p) -суммарного индекса $\kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$ м.-ф. B .

Теорема 4. Пусть $1 < p < \infty$, $B \in \mathcal{MF}_p(\Omega^+)$ и $B^{-1} \in (M_p^+)^{n \times n}$. Тогда (r_+, p) -суммарный индекс м.-ф. B равен разности количества нулей и полюсов функции $\det B$ в области Ω^+ с учетом их кратностей.

Доказательство: Обозначим

$$\varepsilon = 2^{-1} \min_{\substack{i, j = 0, \dots, m \\ j \neq i}} d(\Gamma_i, \Gamma_j) \quad \text{и} \quad U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}; |z| < \varepsilon\}.$$

Пусть $\Omega_{i,\varepsilon}$ ($i = 0, \dots, m$) – односвязные области комплексной плоскости с границей $\Gamma_{i,\varepsilon} = \partial\Omega_{i,\varepsilon}$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\Omega_{0,\varepsilon} \subset \Omega_0, \quad \bar{\Omega}_0 \subset \Omega_{0,\varepsilon} + U_\varepsilon, \quad \Omega_i \subset \Omega_{\varepsilon,i}, \quad \bar{\Omega}_{\varepsilon,i} \subset \Omega_i + U_\varepsilon, \quad i = 1, \dots, m.$$

Будем предполагать, что $\Gamma_{i,\varepsilon}$ являются замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми и контур $\Gamma_\varepsilon = \bigcup_{j=0}^m \Gamma_{j,\varepsilon}$ ориентирован таким образом, что при его обходе в положительном направлении внутренняя область $\Omega_\varepsilon^+ = \Omega_{0,\varepsilon} \setminus \bigcup_{j=1}^m \bar{\Omega}_{j,\varepsilon}$ остается слева.

Примеры таких областей могут быть построены с помощью функций, осуществляющих конформное отображение областей Ω_0 и $C \setminus \bar{\Omega}_i$ ($i = 1, \dots, m$) на единичный круг. Заметим, что при этом $\Gamma_{\varepsilon,i}$ ($i = 1, \dots, m$) могут быть выбраны аналитическими. Очевидно, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ м.-ф. B аналитична и обратима в некоторой области, содержащей множество $\Omega^+ \setminus \Omega_\varepsilon^+$. Поскольку $B^{\pm 1} \in M_\infty^+(\Gamma_\varepsilon)$, то в силу теоремы 2.6 [4] м.-ф. B допускает $WH(r, p)$ -факторизацию на Γ_ε . Пусть представление $B = B_- \Lambda \tilde{B}_+^{-1}$ является этой факторизацией и $\Lambda = \text{diag}[\tau_0^{\kappa_1}, \dots, \tau_0^{\kappa_n}]$. В силу той же теоремы число $\kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$ равно разности между количеством нулей и полюсов $\det B$ в Ω_ε^+ . М.-ф. $B_-^{\pm 1} \in R^{n \times n}$ аналитичны в $\Omega_\varepsilon^- = \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon^+$ и непрерывны на Γ_ε . Следовательно, $B_-^{\pm 1}$ аналитичны в Ω^- и непрерывны на Γ . М.-ф. B_+ определим равенством: $B_+ = B^{-1} B_- \Lambda$. Поскольку B_+ совпадает на Ω_ε^+ с $\tilde{B}_+$, то в силу своего определения $B_+ \in (L_p^+(\Gamma))^{n \times n}$ и удовлетворяет условию б) определения $I(r_+, p)$ -факторизации для $z \in \Omega^+$. Пусть $z \in \Gamma$ и существует $V \in C^n$, $V \neq 0$ такой, что $\tau_z^{-1} B_+ V \in (L_p^+(\Gamma))^n$. Поскольку $B \tau_z^{-1} B_+ V = \tau_z^{-1} B_- \Lambda V$ и $\det(B_- \Lambda)(z) \neq 0$, то $\tau_z^{-1} B_- \Lambda V \in \mathcal{L}_p^n$, и потому $\tau_z^{-1} B_+ V \notin \mathcal{D}_p^+(B)$. Таким образом, м.-ф. B_+ удовлетворяет условию б) определения и для $z \in \Gamma$. Отсюда следует, что представление $B = B_- \Lambda B_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. B на контуре Γ . Доказательство теоремы следует из того, что $\det B$ не имеет полюсов и нулей на множестве $\Omega^+ \setminus \Omega_\varepsilon^+$.

4. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ МЕРОМОРФНЫХ ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ КОНТУРА

4.1. По аналогии с предложением 3 нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 7. Если м.-ф. A допускает $I(r_+, p)$ -факторизацию и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, то $\det A^{\pm 1}$ имеет конечное число нулей в Ω^- .

Справедливы также утверждения

Предложение 8. 1) Если $A \in \left(\widetilde{M}_p^-\right)^{n \times n}$, $1 \leq p \leq \infty$, то $\mu_p(A, +\infty) = 0$.
 2) Если A регулярная матриц-функция в Ω^- такая, что $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, то $\mu_p(A, -\infty) = 0$.

Доказательство: Пусть $A \in \left(\widetilde{M}_p^-\right)^{n \times n}$. Тогда существуют ненулевой многочлен q и число $i \in Z$ ($i \geq 0$) такие, что $\tau_0^{-i} q A \in \left(\overset{\circ}{L}_p^-\right)^{n \times n}$. Нетрудно заметить, что $q e_k \in \mathcal{D}_p^+(A)$ ($k = 1, \dots, n$). Если $j \geq i$, то из представления $\tau_0^{-j} A q e_k$ ($k = 1, \dots, n$) следует, что $q e_k \in N_{p,j}(A)$ ($k = 1, \dots, n$). Очевидно, что существует $z \in \Omega^+$ такое, что $\dim N_{p,j}(A, z) = n$. Таким образом утверждение 1) следует из II.

Пусть $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. Если $\varphi_- \in \overset{\circ}{D}_p^-(A^{-1})$, то существуют многочлен g и число $k \in Z$ ($k \geq 0$) такие, что $\tau_0^{-k} g A^{-1} \varphi_- \in \left(\overset{\circ}{L}_p^-\right)^n$. Пусть $j \leq -k$ и $\varphi_+ \in N_{p,j}(A)$. Тогда существует $f_- \in \left(\overset{\circ}{L}_p^-\right)^n$ такая, что $\tau_0^{-j} A \varphi_+ = f_-$. Очевидно, что $f_- \in \overset{\circ}{D}_p^-(A^{-1})$. Поскольку $g \varphi_+ = g \tau_0^j A^{-1} f_-$ и $j \leq -k$ то $g \varphi_+ \in \left(\overset{\circ}{L}_p^-\right)^n \cap (L_p^+)^n$, т.е. $\varphi_+ = 0$. Таким образом, $N_{p,j}(A) = \{0\}$ ($j \leq -k$), и 2) следует из утверждения I.

Теорема 5. Пусть $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, $1 \leq p \leq \infty$. Для того, чтобы м.-ф. A допускала $I(r_+, p)$ -факторизацию необходимо и достаточно чтобы $A \in \left(\widetilde{M}_p^-\right)^{n \times n}$.

Доказательство: Пусть представление $A = A_- \Lambda A_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. A . Так как $A^{-1} A_- = A_+ \Lambda^{-1} \in \mathcal{L}_1^{n \times n}$, то в силу p -допустимости м.-ф. A^{-1} в Ω^- существуют многочлен g и число $m \in Z$ ($m \geq 0$) такие, что $\tau_0^{-m} g A^{-1} A_- \in \left(\overset{\circ}{L}_1^-\right)^{n \times n}$. Из равенства $g A^{-1} A_- \Lambda = g A_+$ следует, что $g A_+ \in (L_p^+)^{n \times n} \cap (M_p^-)^{n \times n}$, где м.-ф. $g A_+$ может иметь полюс лишь в бесконечности. Таким образом м.-ф. $g A_+$ является полиномиальной матрицей. Отсюда следует $A \in \left(\widetilde{M}_p^-\right)^{n \times n}$. Обратное утверждение следует из предложения 8 и IV.

Следствие 2. Если $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, $A \in (M_p^-)^{n \times n}$, представление $A = A_- \Lambda A_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. A , то $\det A_+(z) \neq 0$, $z \in \Gamma$.

Доказательство: проводится аналогично доказательству следствия 1.

4.2. Приведем теперь явные формулы для (r_+, p) -частных индексов м.-ф. A , в случае, когда $A \in (L_p^-)^{n \times n}$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap (M_1^-)^{n \times n}$.

Предложение 9. Пусть $A^{-1} \in (M_1^-)^{n \times n} \cap \mathcal{MF}_1(\Omega^-)$ и $\nu_\ell(A^{-1}) > 0$. Тогда

$$\dim \ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^j I_n \right) \Big|_{Im H_p^-(A^{-1})} \right) = h_{-\nu_\ell(A^{-1})}^- - h_j^-, \quad j \leq 0, \quad j \in Z.$$

Доказательство: Пусть $j < 0$ и $f \in J_{-\nu_r(A^{-1})}$. Следуя [19] нетрудно убедиться, что при достаточно малых $|z|$ справедливо равенство:

$$(H_p^-(A^{-1})f)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=-\nu_r(A^{-1})}^{-1} \langle A^{-1} \rangle_{m-k} \langle f \rangle_k.$$

Следовательно,

$$\left(H_p^+ \left(\tau_0^j I_n \right) H_p^-(A^{-1})f \right)(z) = \sum_{m=0}^{-j-1} z^{m+j} \sum_{k=-\nu_r(A^{-1})}^{-1} \langle A^{-1} \rangle_{m-k} \langle f \rangle_k.$$

Учитывая предложение 3, получим, что

$$\ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^j I_n \right) \Big|_{Im H_p^-(A^{-1})} \right) = \left\{ H_p^-(A^{-1})f; \Psi_{-\nu_r(A^{-1})}^{-1} f \in F_j \right\}.$$

Пусть $S_j = \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} F_j$ ($j < 0$). Поскольку

$$\begin{aligned} Im \left(H_p^-(A^{-1}) \Big|_{S_j} \right) &= \ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^j I_n \right) \Big|_{Im H_p^-(A^{-1})} \right), \\ \ker \left(H_p^-(A^{-1}) \Big|_{S_j} \right) &= \ker \left(H_p^-(A^{-1}) \Big|_{J_{-\nu_r(A^{-1})}} \right), \end{aligned}$$

то

$$(4.1) \quad \dim \ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^j I_n \right) \Big|_{Im H_p^-(A^{-1})} \right) = \dim S_j - \dim \ker \left(H_p^-(A^{-1}) \Big|_{J_{-\nu_r(A^{-1})}} \right).$$

Учитывая (см. [19])

$$(4.2) \quad \dim \ker \left(H_p^-(A^{-1}) \Big|_{J_{-\nu_r(A^{-1})}} \right) = \dim F_{-\nu_\ell(A^{-1})}$$

а также $\dim S_j = \dim F_j = n\nu_r(A^{-1}) - h_j^-$, получим

$$\begin{aligned} &\dim \ker \left(H_p^+ \left(\tau_0^j I_n \right) \Big|_{Im H_p^-(A^{-1})} \right) \\ &= n\nu_r(A^{-1}) - h_j^- - \dim F_{-\nu_\ell(A^{-1})} = h_{-\nu_\ell(A^{-1})}^- - h_j^-. \end{aligned}$$

В случае $j = 0$ доказательство предложения следует из (4.2).

Теорема 6. Пусть $A \in (L_p^-)^{n \times n}$, $1 \leq p \leq \infty$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1(\Omega^-) \cap (M_1^-)^{n \times n}$. Тогда для $\nu_\ell(A^{-1}) > 0$ (r_+, p) -частные индексы м.-ф. A могут быть определены по формулам:

$$\kappa_i = -\nu_\ell(A^{-1}) + \text{card} \{j \mid h_{j-1}^- - h_j^- < i, j = -\nu_\ell(A^{-1}) + 1, \dots, 0\}$$

($i = 1, \dots, n$). Если $\nu_\ell(A^{-1}) = 0$, то $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = 0$.

Доказательство. Доказательство теоремы в случае $\nu_r(A^{-1}) = \nu_\ell(A^{-1}) = 0$, очевидно. Очевидно также, что $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. Отсюда и из предложения 8 следует, что м.-ф. A допускает конечную (r_+, p) -индексацию. Доказательство остальных утверждений теоремы следует из предложений 2, 9 и формулы (2.1).

4.3. Перейдем теперь к построению факторизации м.-ф. A при условиях $A \in (L_p^-)^{n \times n}$ и $A^{-1} \in (M_1^-)^{n \times n} \cap \mathcal{MF}_1(\Omega^-)$.

Пусть $\nu_r(A^{-1}) > 0$. Тогда, в силу предложений 2 и 9 $N_{p,j}(A) = \text{Im } H_p^-(\tau_0^j A^{-1})$ при $j \geq 0$ и $N_{p,j}(A) = \tau_0^j H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} F_j$ при $j < 0$.

Пусть $Q_1, Q_2, \dots, Q_{\nu_r(A^{-1})} \in C^{n \times n}$ – матрицы, которые удовлетворяют соотношениям (2.4). Рассмотрим оператор $\mathcal{K}_Q : C^{n \nu_r(A^{-1})} \rightarrow C^{n \nu_r(A^{-1})}$, действующий следующим образом:

$$\mathcal{K}_Q \bar{y} = \left[(-Q_{\nu_r(A^{-1})} y_{\nu_r(A^{-1})})^T (-Q_{\nu_r(A^{-1})-1} y_{\nu_r(A^{-1})-1} + y_1)^T \right. \\ \left. \dots (-Q_1 y_{\nu_r(A^{-1})} + y_{\nu_r(A^{-1})-1})^T \right]^T,$$

где $\bar{y} = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_{\nu_r(A^{-1})}^T]^T$ и $y_i \in C^n$ ($i = 1, \dots, \nu_r(A^{-1})$). Оператор $\mathcal{K}_Q$ допускает матричное представление:

$$\mathcal{K}_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -Q_{\nu_r(A^{-1})} \\ I_n & 0 & \dots & 0 & -Q_{\nu_r(A^{-1})-1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & I_n & -Q_1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $\mathcal{K}_Q F_j \subset F_{j+1}$ ($j \leq -1$). Нетрудно убедиться (см. также [19]), что при достаточно малых $|z|$ имеет место

$$H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \mathcal{K}_Q \bar{y} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=-\nu_r(A^{-1})}^{-1} \langle A^{-1} \rangle_{m-k} \langle \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \mathcal{K}_Q \bar{y} \rangle_k.$$

Используя соотношения (2.4), получим

$$H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \mathcal{K}_Q \bar{y} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=1}^{\nu_r(A^{-1})} \langle A^{-1} \rangle_{m+k+1} y_k.$$

Отсюда

$$(4.3) \quad \tau_0 H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \mathcal{K}_Q \bar{y} = H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \bar{y} - \mathcal{H}_{-1} \bar{y}.$$

Поскольку $F_j \subset F_{-1}$ ($j \leq -2$), то при $j \leq -1$ имеет место равенство

$$(4.4) \quad H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} F_j = \tau_0 H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \mathcal{K}_Q F_j,$$

Пусть θ_j ($j \leq -1$) – некоторое прямое дополнение $F_j + \mathcal{K}_Q F_j$ in F_{j+1} , а θ_0 – некоторое прямое дополнение $\text{Im } \mathcal{H}_{-1} C^n$.

Предложение 10. Пусть $A \in (L_p^-)^{n \times n}$, $A^{-1} \in (M_1^-)^{n \times n} \cap \mathcal{MF}_1(\Omega^-)$, $1 \leq p \leq \infty$ и $\nu_r(A^{-1}) \neq 0$. Если $j < 0$, то пространства $M_{p,j} = \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} \theta_j$ являются $(p, j)_+$ -индексными подпространствами м.-ф. A , а если $j = 0$, то θ_0 является $(p; 0)_+$ -индексным подпространством м.-ф. A и $\dim M_{p,j} = \dim \theta_j$ ($j < 0$).

Доказательство. Пусть

$$f \in H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}(F_j + \mathcal{K}_Q F_j) \cap H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}\theta_j,$$

где $j < 0$. Тогда существуют $y_1, y_2 \in F_j$ и $\bar{y} \in \theta_j$, такие, что

$$f = H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}\bar{y} = H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}(y_1 + \mathcal{K}_Q y_2),$$

т.е. $H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}(\bar{y} - (y_1 + \mathcal{K}_Q y_2)) = 0$. Тогда, учитывая (2.5) нетрудно заметить, что $\bar{y} - y_1 - \mathcal{K}_Q y_2 \in F_{-\nu_\ell(A^{-1})}$ и потому $\bar{y} - y_1 - \mathcal{K}_Q y_2 \in F_j$. Отсюда получаем, что $\bar{y} \in (F_j + \mathcal{K}_Q F_j) \cap \theta_j$, т.е. $\bar{y} = 0$ и, следовательно, $f = 0$. С другой стороны, в силу предложений 2 и 9 имеем

$$\begin{aligned} N_{p,j+1}(A) &= \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}F_{j+1} \\ &= \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}(F_j + \mathcal{K}_Q F_j) + \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}\theta_j \\ &= \left(\tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}\mathcal{K}_Q F_j + \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}F_j \right) + M_{p,j}. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (4.4),

$$N_{p,j}(A) = \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}\mathcal{K}_Q F_j,$$

$$\tau_0 N_{p,j}(A) = \tau_0^{j+1} H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}F_j,$$

то $M_{p,j}$ ($j < 0$) являются (p, j) -индексным подпространством м.-ф. A .

Пусть $j = 0$. Нетрудно видеть, что $C^n \subset N_{p,1}(A)$ и $\tau_0 N_{p,0}(A) \subset N_{p,1}(A)$. С другой стороны, $C^n \cap \tau_0 N_{p,0}(A) = \{0\}$. Из равенства

$$\dim N_{p,k}(A) = \sum_{j < k} (k - j) \mu_p(G, j), \quad k, j \in Z,$$

(см. [13]) имеем

$$\dim N_{p,1}(A) = n + \kappa \quad (\kappa = |\kappa_1 + \dots + \kappa_n|) \quad \text{и} \quad \dim N_{p,0}(A) = \kappa.$$

Отсюда

$$N_{p,1}(A) = C^n + \tau_0 N_{p,0}(A) = C^n + \tau_0 \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1}).$$

В силу (4.3), пространства

$$\operatorname{Im} H_p^-(A^{-1}) + \tau_0 \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1}), \quad \tau_0 H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}(\mathcal{K}_Q y + x) + \mathcal{H}_{-1}^- y,$$

где y и x — произвольные векторы из $C^{n\nu_r(A^{-1})}$, совпадают. Взяв $x = -\mathcal{K}_Q y$, получим $\operatorname{Im} \mathcal{H}_{-1}^- \subset \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1}) + \tau_0 \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1})$, i.e.

$$N_{p,0}(A) + \tau_0 N_{p,0}(A) = \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1}) + \tau_0 \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1}) = \operatorname{Im} \mathcal{H}_{-1}^- + \tau_0 N_{p,0}(A).$$

Из равенства $N_{p,1}(A) = C^n + \tau_0 \operatorname{Im} H_p^-(A^{-1})$ следует, что $N_{p,1}(A) = \widehat{N}_{p,0}(A) + \theta_0$. Пусть $\bar{y} \in \theta_j$ ($j < 0$) и $H_p^-(A^{-1})\Psi_{-\nu_r(A^{-1})}\bar{y} = 0$. Тогда $\bar{y} = 0$, т.е. $\dim M_{p,j} = \dim \theta_j$.

Из предложения 10 и утверждения IV следует

Теорема 7. Пусть м.ф. $A \in (L_p^-)^{n \times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_1$, $(\Omega^-) \cap (M_1^-)^{n \times n}$, $\nu_r(A^{-1}) \neq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ и $\eta_1 < \dots < \eta_s$ – все возможные значения $\kappa_1 \leq \dots \leq \kappa_n$. Пусть $\{y_{\eta_i,1}, \dots, y_{\eta_i,n_i}\}$ ($i = 1, \dots, s$) – базисы пространств θ_{η_i} ($i = 1, \dots, s$), а в.-ф. $U_{\eta_i,j}$ ($i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, n_i$) определены следующим образом.

$$U_{\eta_i,j} = \tau_0^{\eta_i+1} H_p^-(A^{-1}) \Psi_{-\nu_r(A^{-1})} y_{\eta_i,j} \quad \text{если} \quad \eta_i < 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n_i,$$

$$U_{0,j} = y_{0,j} \quad \text{если} \quad \eta_s = 0, \quad j = 1, \dots, n_s.$$

Тогда, если

$$A_+ = [U_{\eta_1,1}, \dots, U_{\eta_1,n_1}, U_{\eta_2,1}, \dots, U_{\eta_s,n_s}],$$

$$\Lambda(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, \dots, t^{\kappa_n}], \quad A_- = AA_+\Lambda^{-1},$$

то представление $A = A_- \Lambda A_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. A . Если $\nu_r(A^{-1}) = 0$, то представление $A = A I_n I_n$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. A .

4.4. Рассмотрим теперь случай, когда $1 < p < \infty$, $A \in (M_p^-(\Gamma))^{n \times n}$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$.

Пусть $\Omega'_{\varepsilon,i}$ ($i = 0, \dots, m$) односвязные области с границей $\Gamma'_{\varepsilon,i} = \partial\Omega'_{\varepsilon,i}$, удовлетворяющие включениям: $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega'_{\varepsilon,0}$, $\Omega'_{\varepsilon,0} \subset \Omega_0 + U_\varepsilon$, $\overline{\Omega}'_{i,\varepsilon} \subset \Omega_i$, $\overline{\Omega}_i \subset \Omega'_{i,\varepsilon} + U_\varepsilon$ ($i = 1, \dots, m$). Будем предполагать, что $\Gamma'_{i,\varepsilon}$ ($i = 0, \dots, m$) являются замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми и контур $\Gamma'_\varepsilon = \bigcup_{j=0}^m \Gamma'_{\varepsilon,j}$ ориентирован таким образом, что при обходе в положительном направлении его внутренняя область $\Omega'^+_\varepsilon = \Omega'_{0,\varepsilon} \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{\Omega}'_{\varepsilon,j}$ остается слева.

Следующая теорема позволяет восстановить $I(r_+, p)$ -факторизацию м.-ф. A на контуре Γ по ее факторизации на контуре Γ'_ε .

Теорема 8. Пусть $A \in (M_p^-(\Gamma))^{n \times n}$, $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$, $1 < p < \infty$, а целое число $k \geq 0$ и многочлен q , нули которого лежат в Ω^- , таковы, $\tau_0^{-k} q A \in (L_p^-(\Gamma))^{n \times n}$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ м.-ф. $\tau_0^{-k} q A$ допускает $WH(r, p)$ – факторизацию относительно контура Γ'_ε . Если представление $\tau_0^{-k} q A = \tilde{A}_- \tilde{\Lambda} \tilde{A}_+^{-1}$ является $WH(r, p)$ -факторизацией м.-ф. $\tau_0^{-k} q A$ относительно контура Γ'_ε , то $\tilde{A}_+ \in R^{n \times n}$. Если $A_+ = \tilde{A}_+ q$, $\Lambda = \tilde{\Lambda} \tau_0^k$ и $A_- = \tau_0^{-k} q A \tilde{A}_+ \tilde{\Lambda}^{-1}$, то представление $A = A_- \Lambda A_+^{-1}$ является $I(r_+, p)$ -факторизацией м.-ф. A на контуре Γ . В частности, в случае $\nu_\ell(\tau_0^{-k} q^{-1} A^{-1}) > 0$ (r_+, p) -частные индексы м.-ф. A могут быть вычислены по формулам

$$\kappa_i = -\nu_\ell(\tau_0^{-k} q^{-1} A^{-1}) + k$$

$$+ \text{card} \{j \mid h_{j-1}^-(\Gamma'_\varepsilon, \tau_0^{-k} q^{-1} A^{-1}) - h_j^-(\Gamma'_\varepsilon, \tau_0^{-k} q^{-1} A^{-1}) < i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если $\nu_\ell(\tau_0^{-k} q A^{-1}) = 0$, то $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = k$.

Доказательство: Из условий $A \in (M_p^-(\Gamma))^{n \times n}$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$ следует, что число $\varepsilon > 0$ может быть выбрано таким образом, что м.-ф. A аналитична и $\det A \neq 0$ в некоторой области, содержащее множество $\overline{\Omega}'_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}^+$. Поскольку

$(\tau_0^{-k} qA)^{\pm 1} \in M_\infty^-(\Gamma'_\varepsilon)$, то из теоремы 2.7 из [4], следует, что м.-ф. $\tau_0^{-k} qA$ допускает $WH(r, p)$ -факторизацию относительно контура Γ'_ε . В частности, эта факторизация одновременно является и $I(r_+, p)$ -факторизацией относительно контура Γ'_ε . Утверждение относительно $\tilde{A}_+ \in R^{n \times n}$, по существу, содержится в доказательстве теоремы 4. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что факторы $A_\pm$ и Λ удовлетворяют условиям определения $I(r_+, p)$ -факторизации м.-ф. относительно контура Γ . Формулы для частных индексов следуют из теоремы 6 и равенства $\Lambda = \tau_0^k \tilde{A}$.

Пользуясь доказательством теоремы 8 и повторяя рассуждения доказательства теоремы 4 нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 9. Пусть $A \in (M_p^-(\Gamma))^{n \times n}$, $1 < p < \infty$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. Тогда сумма (r_+, p) -частных индексов м.-ф. A совпадает с разницей количества полюсов и нулей функции $\det A$ в области Ω^- с учетом их кратности.

Замечание 2. Пусть $A \in (\widetilde{M}_p^-)^{n \times n}$ и $A^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. В силу определения класса $\widetilde{M}_p^-$ существует полином q_0 , нули которого расположены на контуре Γ такой, что $q_0 A \in (M_p^-)^{n \times n}$. Тогда $(q_0 A)^{-1} \in \mathcal{MF}_p(\Omega^-)$. Теоремы 7 и 8 позволяют строить $I(r_+, p)$ -факторизацию м.-ф. $q_0 A$. Факторизация м.-ф. A может быть восстановлена с помощью схемы, предложенной в работе [20].

Abstract. The paper considers a class of matrix-functions defined on some contour in the complex plane that have meromorphic continuations in the interior or exterior domain of that contour. These matrix-functions generally do not admit Wiener-Hopf standard factorization. The paper studies the problem of index factorization, which is a version of Wiener-Hopf factorization. Some criterions for index factorization and exact formulas for particular indices are found along with a constructive method which applies the factorization to solution of an explicit, finite system of linear algebraic equations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, (Наука, Москва, 1968).
- [2] Н. П. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений*, (Наука, Москва, 1970).
- [3] K. Clancey, I. Gohberg, *Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators* (Birkhauser Verlag, Basel, 1981).
- [4] G. S. Litvinchuk and I. M. Spitkovskii, *Factorization of Measurable Matrix Functions* (Akademie-Verlag, Berlin, 1987).
- [5] И. М. Спитковский, "Факторизация измеримых матриц-функций, связанные с ней теории систем сингулярных интегральных уравнений и векторной краевой задачи", I, Дифференц. уравнения, (4) 697-709 (1981).
- [6] H. Bart, I. Gohberg and M. A. Kaashoek, "Explicit Wiener-Hopf Factorization and Realization", in *Operator Theory: Advances and Applications, Constructive Methods of Winer-Hopf Factorization* **21**, 235-316 (1997).
- [7] I. Gohberg, L. Lerer and L. Rodman, "Factorization Indices for Matrix Polynomials", Bull. AMS **84**, 275-277 (1978).
- [8] В. М. Адуков, "Факторизация Винера-Хопфа мероморфных матриц-функций", Алгебра и анализ, **4** (1), 54-74 (1992).
- [9] А. Г. Камалян, "Обобщенная факторизация ограниченных голоморфных матриц-функций", Изв. НАН Армении, Математика, **32** (2), 19-38 (1997).

- [10] И. М. Спитковский , “Обобщенная факторизация матриц-функций и краевая задача Римана с бесконечными частными индексами”, ДАН СССР, **286** (13), 559-562 (1986).
- [11] И. М. Спитковский, “О векторной краевой задаче Римана с бесконечными дефектными числами и связанной с ней факторизации матриц-функций”, Мат. сборник, **135** (4), 553-550 (1988).
- [12] А. Г. Камалян, “Некоторые свойства ядер теплицевых операторов”, Доклады НАН Армении, **107** (4), 316-322, 2007.
- [13] А. Г. Камалян, “Индексная факторизация матриц-функций”, Доклады НАН Армении **108** (1), 2007.
- [14] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, (ГИТЛ, Москва, 1950).
- [15] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, (Наука, Москва, 1966).
- [16] Г. Ц. Тумаркин , С. Я. Хавинсон, “К определению аналитических функций класса E в многосвязных областях,” Успехи матем. наук **13** (1), 201-206 (1958).
- [17] Б. В. Хведелидзе, “Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной,” *Современные проблемы математики, (Итоги науки и техники)*,] **7**, ВИНТИ, Москва, 1975, 5-162 .
- [18] Е. М. Дынкин , Б. П. Осиленкер , “Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения”, *Математический анализ, (Итоги науки и техники)*, **21**, ВИНТИ, Москва, 1983, 42-129.
- [19] Р. А. Амирджанян, “О некоторых свойствах Ганкелева оператора с мероморфным символом”, “Матиматика в высшей школе”, Т. 3, No 2, 25-29, (2007).
- [20] Р. А. Амирджанян, “О влиянии простейших сомножителей на факторизацию матрицы-функции”, Вестник РАУ, сер. физ-мат. и естеств. науки, **1**, 12-21 (2007).

Поступила 3 сентября 2007