

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ В КРИТИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ

Р. Н. ЧИТЧЯН И А. Р. МАРТИРОСЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: becam@cln.am, artakm81@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрены риски страховой компании, занимающейся только операциями с рентой. В условиях критической загрузки и правильного изменения хвоста функции распределения страховых выплат найдены асимптотики функций распределения процессов неразорения страховой компании.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены риски страховой компании, занимающейся только операциями с рентой. Страховая компания предоставляет клиентам постоянные выплаты, что с постоянной скоростью $c < 0$ уменьшает резервный фонд. Без нарушения общности пусть $c = -1$. Это достигается выбором денежной единицы. С другой стороны, страховые случаи (смерть клиента или прерывание договора) в случайные моменты $t_1, t_2, \dots$ увеличивают резервы компании на величины невыплаченных рент $X_1, X_2, \dots$ – положительные, независимые и одинаково распределенные случайные величины (СВ). Моменты возникновения страховых случаев $t_1, t_2, \dots$ имеют распределение Пуассона с интенсивностью λ , а страховые выплаты – функцию распределения (ФР) F ($F(x) < 0, x < 0$). Страховая сумма $S(u) = \sum_{0 \leq t_i \leq u} X_i$, которую компания выплачивает за промежуток времени $(0, u]$, является обобщенным пуассоновским процессом с интенсивностью λ и ФР страховых сумм F . Тогда

$$P\{S(u) \leq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda u} (\lambda u)^n}{n!} F^{n*}(x),$$

где F^{n*} есть n -кратная свертка ФР F , $F^{0*}(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $F^{0*}(x) = 0$ при $x < 0$, а P – вероятность. Резервный фонд $\gamma(u) = x - u + S(u)$ компании, где x – начальный капитал, в некоторый момент он может стать отрицательным и компания попадет в ситуацию разорения. Чтобы за $(0, t]$ не произошло разорение, необходимо, чтобы $u - S(u) \leq x$ при $u \in (0, t]$ (или $u \in (0, \infty]$).

ФР процессов разорения

$$r(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} [u - S(u)] \quad \text{и} \quad r = \sup_{0 \leq u < \infty} [u - S(u)]$$

обозначим через $W(t, x)$ и $W(x)$ соответственно. Известно, что (см. [1], стр. 164)

$$(1) \quad W(t, x) = 1 - \int_x^t \frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\}, \quad 0 < x \leq t,$$

и

$$(2) \quad W(x) = 1 - \int_x^\infty \frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\} = 1 - e^{\omega x}, \quad x > 0,$$

где ω – наибольший неотрицательный вещественный корень уравнения

$$\nu(s) \stackrel{\text{def}}{=} s - \lambda(1 - \psi(s)) = 0.$$

при этом, (см. [1], стр. 52, теорема 4) $\omega = 0$, если $0 \leq \rho_1$ и $\omega = 0$, если $\rho_1 > 1$.

Целью статьи является анализ ФР $W(t, x)$ и $W(x)$ при следующих условиях.

1) Преобразование Лапласа-Стильеса (ПЛС)

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \quad \operatorname{Re} s \geq 0,$$

допускает асимптотическое представление:

$$(3) \quad \psi(s) - 1 + as \sim As^\gamma L\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \downarrow 0, \quad A > 0 \quad (1 < \gamma \leq 2),$$

где a – математическое ожидание X_i , а измеримая $L(x) > 0$ – медленно меняющаяся функция (ММФ) на бесконечности (см. [2]). Если L – ММФ, то (см. [3]) $x^\delta L(x) \rightarrow 0$ и $x^{-\delta} L(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ при любом $\delta > 0$. Поэтому

$$(4) \quad \varepsilon(s) \stackrel{\text{def}}{=} s^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{s}\right) \xrightarrow{s \downarrow 0} 0, \quad 1 < \gamma \leq 2,$$

что придает смысл (3). Более того, (4) выполнено равномерно по a .

2) Пусть $\rho_1 = \lambda a \rightarrow 1$. Обозначим

$$B = \lambda A, \quad \rho = |1 - \rho_1|, \quad F^*(x) = \frac{1}{a} \int_0^x [1 - F(y)] dy,$$

$$\psi^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF^*(x), \quad \psi^*(s) = \frac{1 - \psi(s)}{s}, \quad s > 0.$$

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ

Теорема 1. Пусть $\{S(u) : 0 \leq u \leq \infty\}$ сепарабельный, случайный процесс с переставляемыми приращениями, почти все выборочные функции которого – неубывающие ступенчатые функции, обращающиеся в нуль при $u = 0$. Существует распределение $U_y(x) = U(x, y)$ такое, что

$$W(t, x) = \begin{cases} 1 - \int_x^t d_y U(x, y), & 0 < x \leq t, \\ 1, & x \geq t, \end{cases}$$

$$W(x) = 1 - \int_x^\infty d_y U(x, y) = 1 - e^{-x\omega}, \quad x > 0,$$

где

$$\int_0^\infty e^{-sy} d_y U(x, y) = e^{-x\omega(s)},$$

а $z = \omega(s)$ – единственный корень уравнения $\nu(z) = s$ в области $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Доказательство: С учетом $W(t, x) = 1$ при $x \geq t$, из формул (1) и (2) имеем

$$W(t, x) = \begin{cases} 1 - \int_0^t \frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\}, & 0 < x \leq t, \\ 1, & x \geq t, \end{cases}$$

и

$$W(x) = 1 - \int_x^\infty \frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\}, \quad x > 0.$$

Известно, что (см. [1], стр. 67)

$$(5) \quad \int_x^\infty e^{-sy} \frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\} = e^{-x\omega(s)}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Заметим, что $P\{S(y) \leq y - x\} = 0$ при $y < x$. Следовательно, из (5) получаем

$$\int_0^\infty e^{-sy} \frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\} = e^{-x\omega(s)}.$$

Так как $e^{-x\omega(0)} = e^{-x\omega}$, то, обозначив

$$(6) \quad \varphi(x, s) = \int_0^\infty e^{-sy} \frac{x e^{x\omega}}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\} = e^{-x(\omega(s) - \omega)},$$

имеем $\varphi(x, 0) = 1$. Покажем, что функция $\varphi(x, s)$ вполне монотонна (ВМ), т.е. $(-1)^n \varphi_s^{(n)} \geq 0$ (см. [5]). Очевидно, что функция e^{-xs} – ВМ. Покажем, что функция $\omega(z) - \omega > 0$ имеет ВМ производную. Так как $\omega(s)$ – решение уравнения $\nu(s) = s$, то, обозначив

$$\beta(s) = 1 + \frac{s}{\lambda} - \frac{\omega(s)}{\lambda} = \psi(\omega(s)),$$

получаем

$$(7) \quad \omega(s) = s + \lambda - \lambda\beta(s),$$

$$(8) \quad \psi(s + \lambda - \lambda\beta(s)) = \beta(s).$$

Из (8) заключаем, что (см. [5], стр. 497) функция $\beta(s)$ – ПЛС для некоторой неубывающей функции. Не нарушая общности, предположим, что функция $\beta(s)$ является ПЛС собственной ФР (в противном случае, разделив $\beta(s)$ на $\beta(0) > 0$, получаем $\beta(0) = 1$). Следовательно, (см. [5], стр. 495, теорема 1), функция $\beta(s)$ ВМ, иначе,

$$(9) \quad (-1)^k \beta^{(k)}(s) \geq 0, \quad k \geq 0, \quad s \geq 0.$$

Из условия (7) следует, что $(\omega(s) - \omega)' = 1 - \lambda\beta'(s)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (-1)^n ((\omega(s) - \omega)')^{(n)} &= (-1)^n (1 - \lambda\beta'(s))^{(n)} \\ &= \lambda(-1)^{n+1} (\beta''(s))^{(n-1)} = \lambda(-1)^{n+1} (\beta^{(n+1)}(s)) \geq 0, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Из (9) (при $k = 1$) получаем $(\omega(s) - \omega)' = 1 - \lambda\beta'(s) \geq 0$ (для $n = 0$). Итак, функция $(\omega(s) - \omega)'$ является ВМ. Так как функция $\varphi(x, s)$ есть суперпозиция ВМ функции e^{-xs} и функции $\omega(s) - \omega > 0$ с ВМ производной, то функция $\varphi(x, s)$ ВМ (см. [5], стр. 497). Поэтому, согласно теореме 1 из [1] (стр. 495)

$$\varphi(s, x) = \int_0^\infty e^{-sy} d_y G(x, y).$$

Учитывая форму (6) функции $\varphi(x, s)$, по теореме единственности, получаем

$$\frac{x}{y} d_y P\{S(y) \leq y - x\} = d_y \{e^{-x\omega} G(x, y)\}.$$

Таким образом, функция $U(x, y) = e^{-x\omega} G(x, y)$ имеет ПЛС $e^{-x\omega(s)}$, что завершает доказательство.

Замечание 1. Если случайный процесс $\{S(u) : 0 \leq u \leq \infty\}$ имеет плотность, то (см. [1], стр. 51)

$$U(x, y) = \int_0^y \frac{x}{u} \frac{\partial P\{S(u) \leq u - x\}}{\partial x} du.$$

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Пусть

$$L_2^{(\gamma-1)}(t) = \frac{1}{t^{\gamma-1}} \frac{1}{M^{(\gamma-1)}(t)},$$

где $M^{(\gamma-1)}(t)$ – обратная к $t^{\gamma-1}/L(t)$ функция. Тогда (см.[3])

$$\omega \sim \left(\frac{\rho}{B}\right)^{1/(\gamma-1)} L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{B}{\rho}\right) \quad \text{при} \quad \rho_1 \downarrow 1.$$

При $\rho \uparrow 1$ для величин порядка

$$(\rho/B)^{1/(\gamma-1)} L_2^{(\gamma-1)}(B/\rho)$$

также используем обозначение $\omega \sim (\rho/B)^{1/(\gamma-1)} L_2^{(\gamma-1)}(B/\rho)$, предполагая, что $\rho/B \rightarrow 0$ при $\rho_1 \uparrow 1$.

Пусть функции $\nabla(s)$ и $\Delta(s)$ – единственные решения уравнений $z^\gamma - z = s$ и $z^\gamma + z = s$ ($s \geq 0$), с условиями $\nabla(0) = 1$ и $\Delta(0) = 0$ (см., например, [4]), тогда имеет место следующий результат из [4].

Лемма 1. Если $\alpha(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ при условии (3), то

$$\omega(\alpha(\rho)s) \sim \beta(\rho)A(s)L_0, \quad \rho_1 \rightarrow 1,$$

где

$$\beta(\rho) = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{B}\right)^{1/(\gamma-1)}, & \alpha(\rho) = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ \frac{\alpha(\rho)}{\rho}, & \alpha(\rho) = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ \left(\frac{\rho}{B}\right)^{1/(\gamma-1)}, & \alpha(\rho) \sim o(\rho\omega), \quad \rho_1 \uparrow \downarrow 1, \\ \left(\frac{\alpha(\rho)}{B}\right)^{1/\gamma}, & \rho\omega = o(\alpha(\rho)), \quad \rho_1 \uparrow \downarrow 1, \end{cases}$$

$$A(s) = \begin{cases} 1, & \alpha(\rho) = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ s, & \alpha(\rho) = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ \nabla(s), & \alpha(\rho) \sim \rho\omega, \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ \Delta(s), & \alpha(\rho) \sim \rho\omega, \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ s^{1/\gamma}, & \rho\omega = o(\alpha(\rho)), \quad \rho_1 \uparrow \downarrow 1, \end{cases}$$

$$L_0 = \begin{cases} L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{B}{\rho}\right), & \alpha(\rho) = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \downarrow 1, \\ 1, & \alpha(\rho) = o(\rho\omega), \quad \rho_1 \uparrow 1, \\ L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{B}{\rho}\right), & \alpha(\rho) \sim \rho\omega, \quad \rho_1 \uparrow \downarrow 1, \\ L_2^{(\gamma)}\left(\frac{B}{\alpha(\rho)}\right), & \rho\omega = o(\alpha(\rho)), \quad \rho_1 \uparrow \downarrow 1. \end{cases}$$

Из формулы (2) и леммы 1 следует, что

Теорема 2. Пусть выполнено условие (3) и $\vartheta(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho_1 \rightarrow 1$, тогда предел

$$\lim_{\rho_1 \downarrow 1} P\{\vartheta(\rho)r \leq x\} = 1 - e^{-x}, \quad x > 0,$$

существует в том и только том случае, когда

$$\vartheta(\rho) \sim \left(\frac{\rho}{B}\right)^{1/(\gamma-1)} L_2^{(\gamma-1)}\left(\frac{B}{\rho}\right) \sim \omega.$$

Пусть $\alpha(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ и $\beta(\rho)$ определено как в лемме 1. При согласованной сходимости $t\alpha(\rho) \rightarrow \tau$, $0 < \tau \leq \infty$ верно следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (3). Если $\vartheta(\rho) \sim \beta(\rho)L_0$ при $\rho \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ так что $t\alpha(\rho) \rightarrow \tau$, $0 < \tau \leq \infty$, то существует предел

$$\lim_{(\rho,t)} P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\} = 1 - \int_0^\tau d_\nu U_0(x, \nu), \quad x > 0,$$

где через (ρ, t) обозначена пара $\rho \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ и

$$\int_0^\infty e^{-s\nu} d_\nu U_0(x, \nu) = e^{-sA(s)}, \quad s \geq 0.$$

В остальных случаях

$$\lim_{(\rho,t)} P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\} = 1, \quad x > 0,$$

где $\vartheta(\rho) = o(\beta(\rho)L_0)$ и $\beta(\rho)L_0 = o(\vartheta(\rho))$.

Доказательство: Из теоремы 1 имеем
(10)

$$P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\} = P\left\{r(t) \leq \frac{x}{\vartheta(\rho)}\right\} = \begin{cases} 1 - \int_x^t d_y U_1\left(\frac{x}{\vartheta(\rho)}, y\right), & 0 < x \leq t\vartheta(\rho), \\ 1, & x \geq t\vartheta(\rho), \end{cases}$$

где

$$(11) \quad \int_0^\infty e^{-sy} d_y U_1(x, y) = e^{-x\omega(s)}.$$

В формулах (10) и (11), произведя замену переменной интегрирования $y = \nu/\alpha(\rho)$, получаем

$$P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\} = \begin{cases} 1 - \int_{x\frac{\alpha(\rho)}{\vartheta(\rho)}}^{t\alpha(\rho)} d_\nu U\left(\frac{x}{\vartheta(\rho)}, \frac{\nu}{\alpha(\rho)}\right), & 0 < x \leq t\vartheta(\rho), \\ 1, & x > t\vartheta(\rho), \end{cases}$$

и

$$(12) \quad \int_0^\infty e^{-s\nu} d_\nu U\left(\frac{x}{\vartheta(\rho)}, \frac{\nu}{\alpha(\rho)}\right) = e^{-x\frac{\omega(\alpha(\rho)s)}{\vartheta(\rho)}}.$$

По лемме 1, $\omega(\alpha(\rho)s) \sim \beta(\rho)A(s)L_0$ при $\rho_1 \rightarrow 1$. Следовательно, по обобщенной теореме непрерывности (см. [5], стр. 488), из (12) заключаем, что невырожденный предел

$$U_0(x, \nu) = \lim_{\rho \rightarrow 0} U\left(\frac{x}{\vartheta(\rho)}, \frac{\nu}{\alpha(\rho)}\right)$$

существует тогда и только тогда, когда $\vartheta(\rho) \sim \beta(\rho)L_0$. Остальные случаи $\vartheta(\rho) = o(\beta(\rho)L_0)$ и $\beta(\rho)L_0 = o(\vartheta(\rho))$ являются вырожденными, т.е. в этих случаях

$$\lim_{(\rho, t)} P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\}, \quad x > 0.$$

Переходя к пределу в формуле (12), получим

$$\int_0^\infty e^{-s\nu} d_\nu U_0(x, \nu) = e^{-xA(s)}.$$

Так как $\omega(s) = s + \lambda(1 - \psi(\omega(s))) \geq s$, то при $\vartheta(\rho) \sim \beta(\rho)L_0$ получаем, что для произвольного s , когда $\rho < \rho_0$, справедливо соотношение

$$\frac{\alpha(\rho)s}{\vartheta(\rho)} \sim \frac{\alpha(\rho)s}{\beta(\rho)L_0} \leq \frac{\omega(\alpha(\rho)s)}{\beta(\rho)L_0} \sim \frac{\beta(\rho)L_0 A(s)}{\beta(\rho)L_0} = A(s)$$

Таким образом,

$$(13) \quad \frac{\alpha(\rho)}{\beta(\rho)L_0} \leq \frac{A(s)}{s}, \quad \rho < \rho_0.$$

Так как (13) верно при любом фиксированном s , то

$$(14) \quad \frac{\alpha(\rho)}{\vartheta(\rho)} \sim \frac{\alpha(\rho)}{\beta(\rho)L_0} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow 0,$$

Поскольку $t\alpha(\rho) \rightarrow \tau$ ($0 < \tau \leq \infty$), то, учитывая (14), получаем

$$(15) \quad \lim_{(\rho, t)} P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\} = 1 - \int_0^\tau d_\nu U_0(x, \nu),$$

При этом, так как $x \leq t\vartheta(\rho) = t\alpha(\rho) \frac{\vartheta(\rho)}{\alpha(\rho)} \xrightarrow{(\rho, t)} \infty$, то это соотношение верно для любого $x > 0$.

Замечание 2. При фиксированном t и произвольном $\vartheta(\rho)$ таком, что $\vartheta(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ верно соотношение

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} P\{\vartheta(\rho)r(t) \leq x\} = 1, \quad x > 0.$$

Abstract. The paper considers the risks of the insurance companies that conduct purely rent operations. The asymptotic of certain distribution functions are found in the case of a heavy traffic and regular tail variation of the premium distribution function.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Такач, *Комбинаторные методы в теории случайных процессов* (Мир, Москва, 1971).
- [2] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции* (Наука, Москва, 1985).
- [3] А. М. Седлецкий, *Аналитическое преобразование Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Современная математика. Фундаментальные направления **5** (Москва, 2003).
- [4] А. Р. Мартиросян, Р. Н. Читчян, “Анализ страховых моделей с положительными страховыми выплатами в критической ситуации”, *Информационные технологии и управление* **6** (Ереван, 2007).
- [5] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения* **2** (Мир, Москва, 1984).

Поступила 6 июня 2007