

В-ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ТИПА БЕСОВА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

А. Г. БАГДАСАРЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *angen@arminco.com*

Аннотация. В работе дается представление классических нулевых пространств Бесова посредством так называемых “В-произведений” с обобщенными нулевыми пространствами типа Бесова, порожденными вполне правильными многогранниками. Доказывается оценка для К-функционала Петре и интерполяционная формула “вещественного” метода для пар “В-произведений”. Приводятся некоторые применения полученных результатов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В монографии [1] Х. Трибель предложил задачу характеристики интерполяционных пространств “вещественного” метода для пары классических анизотропных пространств Бесова с разными анизотропиями. Как оказалось (см. [2, 3]), в случае несовпадения анизотропий пространств рассматриваемой пары, интерполяционные пространства “вещественного” метода характеризуются в терминах, так называемых, “В-произведений” пространств типа Бесова. Наиболее важным является случай “произведения” нулевых пространств (как видно из определения 6, общий случай получается применением оператора “поднятия”).

Возникает вопрос: *можно ли характеризовать “В-произведение” пары нулевых пространств типа Бесова (см. определение 5), как В-пространство из того же семейства пространств типа Бесова?*

В общем случае ответ отрицательный, поскольку, как доказано в [3], пространства “с доминирующей смешанной производной” (которые, вообще говоря, не входят в семейство В-пространств из определения 5), являются “В-произведениями” соответствующих пар пространств типа Бесова. Однако, как показывает теорема 2, “В-произведение” классических нулевых пространств Бесова и В-пространств, порожденных вполне правильными многогранниками, остается классическим нулевым пространством Бесова.

Теорема 2 позволяет явно описать интерполяционные пространства “вещественного” метода для пар классических анизотропных пространств Бесова с разными анизотропиями.

На протяжении всей работы будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathbb{R}_n$ – n -мерное евклидово пространство,

F - оператор преобразования Фурье F^{-1} – оператор обратного преобразования Фурье,

$C^\infty(\mathbb{R}_n)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций, определенных на $\mathbb{R}_n$,

$S = S(\mathbb{R}_n)$ – Класс Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций, определенных на $\mathbb{R}_n$,

$S' = S'(\mathbb{R}_n)$ – пространство медленно растущих обобщенных функций,

M_p – пространство мультипликаторов Фурье типа (p, p) ,

$(A_0, A_1)_{\vartheta, q}$ – интерполяционное пространство, “вещественной” интерполяции,

$A_0 + A_1$ – сумма, а $A_0 \cap A_1$ – пересечение Банаховых пространств A_0 и A_1 в смысле теории интерполяции.

Знак $\sim$ означает двустороннюю оценку. Если $\mu(\xi) \sim \nu(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}_n$, то будем говорить, что функции μ и ν эквивалентны.

2. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

Определение 1. *Непустой многогранник $\mathbf{R}$ с вершинами $\alpha^0 = (0, \dots, 0)$, $\alpha^j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j)$ ($\alpha_i^j \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, N$) называется полным, если $\mathbf{R}$ имеет вершины на каждой координатной оси, отличные от начала координат.*

Полный многогранник $\mathbf{R}$ называется вполне правильным, если внешние нормали $(n-1)$ -мерных некоординатных граней многогранника $\mathbf{R}$ имеют положительные координаты.

Вполне правильному многограннику $\mathbf{R}$ сопоставим функцию

$$(1) \quad \mu(\xi) = 1 + \sum_{j=1}^N |\xi|^{\alpha^j},$$

которую будем называть порожденной многогранником $\mathbf{R}$ или порождающей функцией многогранника $\mathbf{R}$.

Определение 2. *Если вершины вполне правильного многогранника $\mathbf{R}$ лежат в $\mathbb{R}_{n-1}$, за исключением единственной вершины, которая лежит на n -ой оси координат, то многогранник $\mathbf{R}$ будем называть n -мерной (прямоугольной) пирамидой относительно n -ой координатной оси. Вполне правильный многогранник, у которого нет вершин вне координатных осей будем называть n -мерной треугольной пирамидой.*

Ясно, что n -мерная треугольная пирамида является пирамидой относительно всех координатных осей.

Лемма 1. *Порождающая функция $\mu(\xi)$ произвольного вполне правильного многогранника $\mathbf{R}$ эквивалентна функции, которая представляется в виде конечного числа операций сложения и умножения конечного числа функций, порожденных треугольными пирамидами.*

Доказательство: Шаг 1. Пусть $0 = m_0 < m_1 < \dots < m_M$ – n -ые координаты вершин многогранника $\mathbf{R}$. Проведем гиперплоскости

$$P_k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n : x_n = m_k\}, \quad k = 0, 1, \dots, M.$$

Обозначим через $\mathbf{R}'_k$ проекции на $\mathbb{R}_{n-1}$ сечений многогранника $\mathbf{R}$ гиперплоскостями P_k , $k = 0, 1, \dots, M$.

Пусть $\{\beta^j\}_{j=0}^{N_k}$ – набор вершин многогранника $\mathbf{R}'_k$, $k = 0, 1, \dots, M$, $\varepsilon > 0$. Обозначим через $(\mathbf{R}'_k)^{1+\varepsilon}$ многогранник с вершинами $\{(1+\varepsilon)\beta^j\}_{j=0}^{N_k}$. Поскольку многогранник $\mathbf{R}$ – вполне правильный, то имеют место включения $\mathbf{R}'_k \subset \mathbf{R}'_0$, $k = 0, 1, \dots, M$, где $\mathbf{R}'_0$ – основание многогранника $\mathbf{R}$, лежащее в $\mathbb{R}_{n-1}$. Причем некоординатные грани многогранников $\mathbf{R}'_k$ и $\mathbf{R}'_0$ не касаются друг друга. Тогда число $\varepsilon > 0$ можно подобрать таким образом, чтобы имели место включения $(\mathbf{R}'_k)^{1+\varepsilon} \subset \mathbf{R}'_0$, $k = 0, 1, \dots, M$, без касания некоординатных граней.

Обозначим через $\mathbf{R}_k$, $k = 0, 1, \dots, M$ многогранник с вершинами

$$((1+\varepsilon)\beta^j, 0), (\beta^j, m_k), (0, m_M), \quad j = 0, \dots, N_k.$$

Основанием многогранника $\mathbf{R}_k$ является многогранник $(\mathbf{R}'_k)^{1+\varepsilon}$, а вершины многогранника $\mathbf{R}_k$ лежат на трех параллельных плоскостях: P_0 , P_k , и P_M , т.е.

$$(2) \quad ((1+\varepsilon)\beta^j, 0) \in P_0, \quad (\beta^j, m_k) \in P_k, \quad j = 0, \dots, N_k, \quad (0, m_M) \in P_M.$$

Обозначим, далее, через $\mathbf{R}_0$ многогранник с основанием $\mathbf{R}'_0$ и единственной вершиной $(0, m_M)$ вне $\mathbb{R}_{n-1}$. Построенные многогранники $\{\mathbf{R}_k\}_{k=0}^M$ обладают следующими свойствами:

- а) $\mathbf{R}_0 \subset \mathbf{R}$, $k = 0, \dots, M$,
- б) каждая вершина многогранника $\mathbf{R}$ принадлежит одному из многогранников $\mathbf{R}_k$, $k = 0, \dots, M$.

Пусть $\mathbf{J}$ – выпуклая оболочка вершин многогранников $\{\mathbf{R}_k\}_{k=0}^M$. Поскольку выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин, то

$$(3) \quad \mathbf{R} = \mathbf{J}.$$

Если через $\{\mu_k\}_{k=0}^M$ обозначить функции, порожденные многогранниками $\{\mathbf{R}_k\}_{k=0}^M$, то формула (3) означает, что

$$(4) \quad \mu \sim \mu_0 + \sum_{k=1}^M \mu_k.$$

Таким образом, общий случай произвольного вполне правильного многогранника свелся к случаю конечного числа вполне правильных многогранников $\{\mathbf{R}_k\}_{k=0}^M$ с вершинами, лежащими на трех гиперплоскостях, параллельных $\mathbb{R}_{n-1}$ (за исключением многогранника $\mathbf{R}_0$, у которого вершины лежат на двух гиперплоскостях). Причем, на третьей гиперплоскости P_M лежит всего одна вершина $(0, m_M)$.

Шаг 2. Рассмотрим многогранник $\mathbf{R}_k$ и порожденную им функцию μ_k ($k = 1, \dots, M$). Как было замечено на первом шаге, вершины многогранника $\mathbf{R}_k$ лежат на трех гиперплоскостях P_0 , P_k и P_M . Выразим порождающую функцию μ_k многогранника $\mathbf{R}_k$ через порождающие функции соответствующих многогранников с вершинами, лежащими на двух гиперплоскостях. Обозначим через μ'_k функцию, порожденную многогранником $\mathbf{R}'_k$. Тогда согласно (2) имеем

$$(5) \quad \mu_k(\xi', \xi_n) \sim (\mu'_k(\xi'))^{1+\varepsilon} + \mu'_k(\xi')|\xi_n|^{m_k} + |\xi_n|^{m_M}, \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}).$$

Рассмотрим проекцию многогранника $\mathbf{R}_k$ на какую-либо из координатных плоскостей, для которой n -ая ось является координатной осью. Проекцией является вполне правильный четырехугольник с единственной вершиной вне координатных осей (которая лежит на гиперплоскости P_k) и двумя одномерными некоординатными гранями. Вершины получившегося четырехугольника согласно (2) имеют вид

$$O = (0, 0), \quad A = ((1 + \varepsilon)a, 0), \quad B = (a, m_k), \quad C = (0, m_M).$$

Продолжим отрезок $[A, B]$ до пересечения с n -ой осью координат. Получившуюся точку обозначим через $D = (0, d_k)$. Далее, из точки A проведем прямую, параллельную отрезку $[B, C]$, до пересечения с n -ой осью координат. Получившуюся точку обозначим через $E = (0, e_k)$. Тогда

$$(6) \quad d_k = \frac{m_k(1 + \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad e_k = (1 + \varepsilon)(m_M - m_k).$$

Положим $\vartheta_k = (m_M - e_k)/(d_k - e_k)$. Заметим, что величины (6) и ϑ_k не зависят от a , т.е. не зависят от выбора координатной плоскости. Далее, поскольку четырехугольник вполне правильный, то $0 < \vartheta_k < 1$. Поскольку $m_M = (1 + \vartheta_k)e_k + \vartheta_k d_k$ и $m_k = \vartheta_k d_k$, то, полагая

$$(7) \quad \mu_k^0(\xi', \xi_n) = (\mu'_k(\xi'))^{1+\varepsilon} + |\xi_n|^{e_k}, \quad \mu_k^1(\xi', \xi_n) = (\mu'_k(\xi'))^{1+\varepsilon} + |\xi_n|^{d_k},$$

из (5) получаем

$$(8) \quad \mu_k \sim (\mu_k^0)^{1-\vartheta_k} (\mu_k^1)^{\vartheta_k}.$$

Заметим, что функции μ_k^0 и μ_k^1 из (7) порождены вполне правильными многогранниками, которые представляют собой n -мерные пирамиды относительно n -ой оси координат с общим основанием $(\mathbf{R}'_k)^{1+\varepsilon}$ и с вершинами $E = (0, e_k)$ и $D = (0, d_k)$ соответственно. Функции $(\mu_k^0)^{1-\vartheta_k}$ и $(\mu_k^1)^{\vartheta_k}$ тоже порождены n -мерными прямоугольными пирамидами с основаниями, лежащими в $\mathbb{R}_{n-1}$ и с вершинами $(0, e_k(1 - \vartheta_k))$ и $(0, d_k \vartheta_k)$ соответственно. Подставляя (8) в (4), получаем

$$(9) \quad \mu \sim \mu_0 + \sum_{k=1}^M (\mu_k^0)^{1-\vartheta_k} (\mu_k^1)^{\vartheta_k}.$$

Таким образом, функция μ , порожденная произвольным вполне правильным многогранником, посредством операций сложения и умножения представляется в виде конечного числа функций (а именно, функций $\mu_0, (\mu_k^0)^{1-\vartheta_k}, (\mu_k^1)^{\vartheta_k}, k = 1, \dots, M$), порожденных n -мерными пирамидами относительно n -ой оси координат.

Шаг 4. В течение шагов 1 и 2 мы зафиксировали n -ую ось координат и свели общий случай вполне правильного многогранника к случаю n -мерных пирамид относительно n -ой оси координат. Рассмотрим теперь в качестве первоначального вполне правильного многогранника n -мерную пирамиду относительно n -ой оси координат. Зафиксируем $(n - 1)$ -ую ось координат и повторим рассуждения шагов 1 и 2 относительно этой оси. Тогда случай n -мерной пирамиды относительно n -ой оси координат сведется к случаю многогранников, которые являются пирамидами, как относительно n -ой, так и $(n - 1)$ -ой осей координат. Подставляя

полученные оценки для функций $\mu_0, (\mu_k^0)^{1-\vartheta_k}$ и $(\mu_k^1)^{\vartheta_k}$, $k = 1, \dots, M$ (порожденных n -мерными пирамидами относительно n -ой оси координат) в (9), получим оценку функции μ посредством конечного числа операций сложения и умножения конечного числа функций, порожденных n -мерными пирамидами, как относительно n -ой, так и $(n-1)$ -ой оси координат. Продолжая описанный процесс относительно остальных координатных осей, получим требуемую оценку функции μ посредством конечного числа операций сложения и умножения конечного числа функций, порожденных n -мерными пирамидами относительно всех осей координат.

3. ПРОСТРАНСТВА ТИПА БЕСОВА

Определение 3. Будем говорить, что положительная функция $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}_n)$ полиномиального роста принадлежит множеству G^+ , если существует постоянная $c > 0$ такая, что для любого мультииндекса α с компонентами из множества $\{0, 1\}$ и любого $\xi \in \mathbb{R}_n$, $\prod_{i=1}^n \xi_i \neq 0$ имеет место неравенство

$$(10) \quad |\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \leq c\mu(\xi)$$

Замечание 1. Из теоремы П. И. Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см. [4]) и оценки (10) следует, что ограниченные в $\mathbb{R}_n$ функции из G^+ являются мультипликаторами Фурье типа (p, p) , $1 < p < \infty$.

Определение 4. Пусть $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$ и $\mu \in G^+$. Положим

$$H_p^s(\mu, \mathbb{R}_n) \equiv H_p^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|_{H_p^s(\mu)} = \|F^{-1}\{\mu^s Ff\}\|_{L_p(\mathbb{R}_n)} < \infty \right\}.$$

Если положить (оператор “поднятия”)

$$(11) \quad I_{\mu^s} = F^{-1}\{\mu^{-s} F\}, \quad \mu \in G^+, \quad -\infty < s < \infty,$$

то определение пространств Соболева-Лиувилля можно записать в виде

$$H_p^s(\mu) = I_{\mu^s} L_p.$$

Определение 5. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G^+$. Положим

$$B_{p,q}^0(\mu, \mathbb{R}_n) \equiv B_{p,q}^0(\mu) = (H_p^1(\mu), H_p^{-1}(\mu))_{\frac{1}{2}, q},$$

$$B_{p,q}^s(\mu) = I_{\mu^s} B_{p,q}^0(\mu).$$

В [5] доказано, что рассматриваемые пространства типа Бесова могут быть представлены следующим образом

$$(12) \quad B_{p,q}^s(\mu, \mathbb{R}_n) \equiv B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}_n) : \|f\|_{B_{p,q}^s(\mu)} = \left[\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu^{1+s}}{\mu^2 + t} Ff \right\|_{L_p(\mathbb{R}_n)}^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} < \infty \right\},$$

с обычными видоизменениями при $q = \infty$.

Наиболее важным при рассмотрении пространств типа Бесова, как и В-произведений (см. следующий параграф), является случай “нулевых пространств”, т.е. пространств с нулевым верхним индексом. Как видно из определения 5, общий

случай получается с применением оператора “поднятия” (11). Следующие рассмотрения посвящены именно этому случаю.

Теорема 1. Пусть $\mu, \nu \in G^+$ и $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, тогда

- а) $B_{p,q}^0(\mu) \cap B_{p,q}^0(\nu) = B_{p,q}^0(\mu + \nu) \cap B_{p,q}^0\left(\frac{\mu\nu}{\mu + \nu}\right)$,
 б) $B_{p,q}^0(\mu) + B_{p,q}^0(\nu) = B_{p,q}^0(\mu + \nu) + B_{p,q}^0\left(\frac{\mu\nu}{\mu + \nu}\right)$.

Доказательство: Используя (12), замечание 1 и теорему 1 из [7], имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu+\nu) \cap B_{p,q}^0(\frac{\mu\nu}{\mu+\nu})}^q &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}(\mu+\nu)}{(\mu+\nu)^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\quad + \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \frac{\mu\nu}{\mu+\nu}}{\left(\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\right)^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\leq c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu}{(\mu+\nu)^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} + c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\nu}{(\mu+\nu)^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\quad + c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \frac{1}{\nu}}{\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right)^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} + c \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \frac{1}{\mu}}{\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right)^2+t} Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\leq c' \left(\|f\|_{B_{p,q}^0(\mu)}^q + \|f\|_{B_{p,q}^0(\nu)}^q + \|f\|_{B_{p,q}^0(1/\mu)}^q + \|f\|_{B_{p,q}^0(1/\nu)}^q \right) \sim \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cap B_{p,q}^0(\nu)}^q. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cap B_{p,q}^0(\nu)}^q &\leq c \int_0^\infty \left\| F^{-1} t^{1/2} \left[\frac{\mu}{\mu^2+t} + \frac{\nu}{\nu^2+t} \right] Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &= c \int_0^\infty \left\| F^{-1} t^{1/2} \left[\frac{\mu\nu(\mu+\nu) + t(\mu+\nu)}{\mu^2\nu^2 + t(\mu^2+\nu^2) + t^2} \right] Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\leq c' \int_0^\infty \left\| F^{-1} t^{1/2} \left[\frac{\mu\nu(\mu+\nu)}{\mu^2\nu^2 + t(\mu^2+\nu^2)} \right] Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\quad + c' \int_0^\infty \left\| F^{-1} t^{1/2} \left[\frac{t(\mu+\nu)}{t(\mu^2+\nu^2) + t^2} \right] Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\sim \int_0^\infty \left\| F^{-1} t^{1/2} \left[\frac{\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}}{\left(\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}\right)^2+t} \right] Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\quad + \int_0^\infty \left\| F^{-1} t^{1/2} \left[\frac{\mu+\nu}{(\mu+\nu)^2+t} \right] Ff \right\|_{L_p}^q \frac{dt}{t} \\ &\sim \|f\|_{B_{p,q}^0(\frac{\mu\nu}{\mu+\nu})}^q + \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu+\nu)}^q \sim \|f\|_{B_{p,q}^0(\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}) \cap B_{p,q}^0(\mu+\nu)}^q. \end{aligned}$$

Утверждение а) доказано. Утверждение б) вытекает из утверждения а) при использовании соображения двойственности (см. формулу (3) из [8]).

Замечание 2. Из теоремы 1 работы [7] имеем для $\mu \in G^+$, $1 < p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$

$$B_{p,q}^0(\mu) = B_{p,q}^0\left(\frac{1}{\mu}\right) = B_{p,q}^0\left(\frac{1+\mu^2}{\mu}\right) = B_{p,q}^0\left(\frac{\mu}{1+\mu^2}\right).$$

Заметим, что $\mu + 1/\mu > 1$. Таким образом, рассматривая нулевые пространства типа Бесова, можно считать, что $\mu(\xi) > 1$. Если положить $\mu = \lambda/\rho$, $\lambda, \rho \in G^+$, то получим

$$B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda}{\rho}\right) = B_{p,q}^0\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) = B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda^2 + \rho^2}{\lambda\rho}\right) = B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda\rho}{\lambda^2 + \rho^2}\right).$$

Замечание 3. Полагая в теореме 1 $\mu = \lambda/\rho$ и $\nu = 1$, получаем

$$\begin{aligned} B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda}{\rho}\right) \cap L_p &= B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda}{\lambda+\rho}\right) \cap B_{p,q}^0\left(\frac{\rho}{\lambda+\rho}\right), \\ B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda}{\rho}\right) + L_p &= B_{p,q}^0\left(\frac{\lambda}{\lambda+\rho}\right) + B_{p,q}^0\left(\frac{\rho}{\lambda+\rho}\right) \end{aligned}$$

для $\lambda, \rho \in G^+$ and $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$.

4. “В-ПРОИЗВЕДЕНИЯ” ПРОСТРАНСТВ ТИПА БЕСОВА

Впервые В-произведения пространств типа Бесова были рассмотрены в [2, 3].

Определение 6. Пусть $\mu, \nu \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $-\infty < s, m < \infty$. Определим пространство

$$B_{p,q}^s(\mu) \cdot B_{p,q}^m(\nu) = I_{\mu^s \nu^m} (B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)),$$

где

$$\begin{aligned} B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) &= \left\{ f \in S'(\mathbb{R}_n) : \|f\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)} \right. \\ &= \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2} \mu}{\mu^2 + t} \frac{u^{1/2} \nu}{\nu^2 + u} Ff \right\|_{L_p(\mathbb{R}_n)}^q \frac{dt du}{t u} \right]^{1/q} < \infty \Big\}, \end{aligned}$$

с обычными видоизменениями при $q = \infty$.

Будем рассматривать В-произведения пространств типа Бесова, порожденные вполне правильными многогранниками.

Пусть задан вполне правильный многогранник $\mathbf{R}$ с вершинами $\alpha^0 = (0, \dots, 0)$, $\alpha^j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j)$ ($\alpha_i^j \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, N$). Порождающая функция $\mu(\xi)$ многогранника $\mathbf{R}$ из (1) является бесконечно дифференцируемой вне координатных осей функцией полиномиального роста, и для нее выполняется оценка (10). Чтобы обеспечить бесконечную дифференцируемость $\mu(\xi)$ и на координатных осях, рассмотрим функцию:

$$(13) \quad \nu(\xi) = \left\{ 1 + \sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^n (1 + \xi_i^2)^{\alpha_i^j} \right\}^{1/2}.$$

Из полной правильности многогранника $\mathbf{R}$ следует, что $\mu \sim \nu$, кроме того $\nu \in G^+$. Таким образом, каждый вполне правильный многогранник $\mathbf{R}$ порождает шкалы

пространств $H_p^s(\nu)$ и $B_{p,q}^s(\nu)$, где $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $-\infty < s < \infty$ и функция $\nu \in G^+$ определена в (13). Для порождающих функций $\mu(\xi)$ из (1) соответствующие пространства определяются как пополнение класса Шварца S в определенных выше нормах. Из соображений плотности следует (см. [6]), что при $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ и $-\infty < s < \infty$

$$H_p^s(\mu) = H_p^s(\nu) \quad \text{и} \quad B_{p,q}^s(\mu) = B_{p,q}^s(\nu).$$

Если многогранник $\mathbf{R}$ является n -мерной треугольной пирамидой, то рассматриваемые H и B пространства совпадают с классическими анизотропными пространствами Соболева-Лиувилля и Бесова соответственно. Кроме того, если положить в (12) $\mu(\xi) = 1$ (многогранник $\mathbf{R}$ совпадает с началом координат), то для произвольных $1 \leq q \leq \infty$ и $-\infty < s < \infty$ получим $B_{p,q}^0(1) = L_p$, $1 < p < \infty$.

Следующая теорема посвящена наиболее важному случаю произведения нулевых пространств.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{R}$ – произвольный вполне правильный многогранник с функцией ν из (13), $1 < p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$. Тогда

$$(14) \quad B_{p,q}^0(\nu) \cdot B_{p,q}^0 = B_{p,q}^0,$$

где $B_{p,q}^0$ – классическое изотропное пространство Бесова.

Доказательство. Как показано в [9], нулевые анизотропные пространства Бесова не зависят от анизотропии. В терминах определений 1 и 2, это означает, что нулевые пространства Бесова, порожденные n -мерными треугольными пирамидами совпадают. Если функция λ порождена произвольной n -мерной треугольной пирамидой (см. (1), (13)), а $B_{p,q}^0$ – классическое изотропное пространство Бесова с порождающей функцией $(1 + \sum_{i=1}^n \xi_i^2)^{1/2}$, то

$$(15) \quad B_{p,q}^0(\lambda) = B_{p,q}^0.$$

Тогда для произвольных двух n -мерных треугольных пирамид с функциями λ и ρ из следствия 1 (см. [2]) имеем

$$(16) \quad B_{p,q}^0(\lambda) \cdot B_{p,q}^0(\rho) = B_{p,q}^0(\lambda) \cdot B_{p,q}^0(\lambda) = B_{p,q}^0(\lambda) = B_{p,q}^0.$$

Пусть

$$(17) \quad \nu \sim \sum_{k=1}^T \nu_k, \quad \nu_k = \prod_{\ell=1}^L \lambda_{k,\ell},$$

оценка порождающей функции многогранника $\mathbf{R}$, которая следует из основной леммы 1, причем функции $\lambda_{k,\ell}$ ($k = 1, \dots, T$, $\ell = 1, \dots, L$) порождены n -мерными треугольными пирамидами. Из (17) и теоремы 1 имеем

$$(18) \quad B_{p,q}^0(\nu) \supset \bigcap_{k=1}^T B_{p,q}^0(\nu_k).$$

Тогда

$$B_{p,q}^0(\nu) \cdot B_{p,q}^0 \supset \bigcap_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\nu_k) \cdot B_{p,q}^0] = \bigcap_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\lambda_{k1}\lambda_{k2}\cdots\lambda_{kL}) \cdot B_{p,q}^0(\lambda_{k1})]$$

$$(19) \quad = \bigcap_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\lambda_{k2} \cdots \lambda_{kL}) \cdot B_{p,q}^0(\lambda_{k1})] = \cdots = \bigcap_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\lambda_{kL}) \cdot B_{p,q}^0(\lambda_{k1})] = B_{p,q}^0.$$

Первое вложение в (19) написано на основании (18), второе равенство – на основании (15) и (17), третье и последующие равенства – на основании теоремы 4 из [2], а последнее равенство написано на основании (16). Аналогично доказываем обратное вложение:

$$\begin{aligned} B_{p,q}^0(\nu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) &\subset \sum_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\nu_k) \cdot B_{p,q}^0(\nu_k)] = \sum_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\lambda_{k1} \lambda_{k2} \cdots \lambda_{kL}) \cdot B_{p,q}^0(\lambda_{k1})] \\ &= \sum_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\lambda_{k2} \cdots \lambda_{kL}) \cdot B_{p,q}^0(\lambda_{k1})] = \cdots = \sum_{k=1}^T [B_{p,q}^0(\lambda_{kL}) \cdot B_{p,q}^0(\lambda_{k1})] = B_{p,q}^0. \end{aligned}$$

5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В-ПРОИЗВЕДЕНИЙ

В [10, 11] было доказано, что пары $\{H_p^1(\mu), H_p^1(\nu)\}$ и $\{B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu)\}$ пространств типа Соболева-Ливилля и Бесова квазилинеаризуемы (см. определение 1.8.4 из [12]). Следующая теорема доказывает справедливость аналогичного утверждения для В-произведений.

Теорема 3. Пусть $\mu, \nu, \lambda, \rho \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Если

$$(20) \quad B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) = B_{p,q}^0(\lambda) \cdot B_{p,q}^0(\rho)$$

то интерполяционная пара В-произведений

$$\{B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu), B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)\}$$

квазилинеаризуема с помощью операторов

$$V_0(t) = F^{-1} \left\{ \frac{t\lambda\rho}{\mu\nu + t\lambda\rho} F \right\}, \quad V_1(t) = F^{-1} \left\{ \frac{\mu\nu}{\mu\nu + t\lambda\rho} F \right\}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $V_0(t) + V_1(t) = E$, $t > 0$. Поскольку (см. замечание 1 и [4])

$$\frac{t\lambda\rho}{\mu\nu + t\lambda\rho} \in M_p, \quad \frac{\mu\nu}{\mu\nu + t\lambda\rho} \in M_p, \quad t > 0,$$

с нормами, не зависящими от t , то

$$(21) \quad \|V_0(t)f\|_{B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu)} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu)},$$

$$(22) \quad \|V_1(t)f\|_{B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)}.$$

Используя (20) и теорему Фурье из [4] имеем

$$\begin{aligned} \|V_0(t)f\|_{B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu)} &= \left\| F^{-1} \frac{t\lambda\rho\mu\nu}{\mu\nu + t\lambda\rho} F f \right\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)} \\ &\sim \left\| F^{-1} \frac{t\lambda\rho\mu\nu}{\mu\nu + t\lambda\rho} F f \right\|_{B_{p,q}^0(\lambda) \cdot B_{p,q}^0(\rho)} = \left\| F^{-1} \frac{t\mu\nu}{\mu\nu + t\lambda\rho} F f \right\|_{B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(23) \quad & \leq ct \|f\|_{B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)}, \\
& \|V_1(t)f\|_{B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)} = \left\| F^{-1} \frac{\lambda \rho \mu \nu}{\mu \nu + t \lambda \rho} Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\lambda) \cdot B_{p,q}^0(\rho)} \\
& \sim \left\| F^{-1} \frac{\lambda \rho \mu \nu}{\mu \nu + t \lambda \rho} Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)} = \left\| F^{-1} \frac{\lambda \rho}{\mu \nu + t \lambda \rho} Ff \right\|_{B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu)} \\
(24) \quad & \leq \frac{c}{t} \|f\|_{B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu)}.
\end{aligned}$$

Неравенства (21)-(24) показывают, что выполнены все условия квазилинеаризуемости (см. определение 1.8.4 из [12]) пары рассматриваемых В-произведений. Таким образом, теорема доказана.

Непосредственным следствием свойства квазилинеаризуемости является двусторонняя оценка K -функционала Петре (см. лемму 1.8.4 из [12]).

Следствие 1. Пусть $\mu, \nu \in G^+$ и $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, тогда

$$(25) \quad K(t, f; B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu), B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)) \sim \left\| F^{-1} \frac{t \mu \nu \lambda \rho}{\mu \nu + t \lambda \rho} Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)}$$

где $f \in B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu) + B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)$ и $t > 0$.

Теорема 4. Пусть $\mu, \nu, \lambda, \rho \in G^+$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \vartheta < 1$. Если выполняется равенство (20), то

$$(26) \quad (B_{p,q}^1(\mu) \cdot B_{p,q}^1(\nu), B_{p,q}^1(\lambda) \cdot B_{p,q}^1(\rho)) = I_{(\mu\nu)^{1-\vartheta}(\lambda\rho)^\vartheta} [B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)].$$

Доказательство. С помощью (25) и определения метода вещественной интерполяции (см. [12]), оценим норму интерполяционного пространства слева в (26):

$$\begin{aligned}
(27) \quad & \|f\|^q \sim \int_0^\infty t^{-\vartheta q} \left\| F^{-1} \frac{t \mu \nu \lambda \rho}{\mu \nu + t \lambda \rho} Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)}^q \frac{dt}{t} \\
& = \int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1-\vartheta} \left(\frac{\mu \nu}{\lambda \rho} \right)^\vartheta}{\frac{\mu \nu}{\lambda \rho} + t} (\mu \nu)^{1-\vartheta} (\lambda \rho)^\vartheta Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)}^q \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Из теоремы 3 из [8] и (27)

$$(28) \quad \|f\|^q \sim \left\| F^{-1} (\mu \nu)^{1-\vartheta} (\lambda \rho)^\vartheta Ff \right\|_{B_{p,q}^0(\frac{\mu \nu}{\lambda \rho}) \cdot B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)}^q.$$

Для оценки нормы справа в (28) воспользуемся свойствами В-произведений (см. [2]). Из теоремы 4 из [2] и (20) имеем

$$\begin{aligned}
(29) \quad & B_{p,q}^0\left(\frac{\mu \nu}{\lambda \rho}\right) \cdot B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) = B_{p,q}^0\left(\frac{\mu \nu}{\lambda \rho}\right) \cdot B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) \cdot B_{p,q}^0(\lambda) \cdot B_{p,q}^0(\rho) \\
& = B_{p,q}^0(\mu \nu) \cdot B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu) = B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu).
\end{aligned}$$

Подставляя (29) в (28) приходим к (26). Теорема доказана.

Теорема 2 и результаты работы [2] показывают, что во многих интересных случаях условие (20) теорем 3 и 4 выполняется.

6. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

В [2] доказано, что интерполяционное пространство, полученное методом вещественной интерполяции для пары пространств типа Бесова, описывается в терминах В-произведений, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $\mu, \nu \in G^+$ and $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \vartheta < 1$. Тогда

$$(30) \quad (B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu)) = B_{p,q}^{1-\vartheta}(\mu) \cdot B_{p,q}^{\vartheta}(\nu).$$

Равенство (30) с помощью оператора поднятия (11) можно записать в виде

$$(B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu))_{\vartheta,q} = I_{\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}} [B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0(\nu)].$$

Теперь применение теоремы 2 приводит к следующей теореме

Теорема 6. Пусть функция μ порождена произвольным вполне правильным многогранником, а функция ν порождена n -мерной треугольной пирамидой. Тогда при p, q, ϑ , $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $0 < \vartheta < 1$

$$(B_{p,q}^1(\mu), B_{p,q}^1(\nu))_{\vartheta,q} = I_{\mu^{1-\vartheta}\nu^{\vartheta}} B_{p,q}^0,$$

где $B_{p,q}^0$ классическое изотропное пространство Бесова.

Возвращаясь к нулевым В-пространствам, на основании теоремы 2 можно доказать следующую теорему вложения для пространств, порожденных вполне правильными многогранниками.

Теорема 7. Пусть функция μ порождена произвольным вполне правильным многогранником, $1 < p < \infty$. Тогда

$$(31) \quad a) \quad B_{p,q}^0 \subset B_{p,q}^0(\mu) \subset L_p \quad \text{при} \quad 1 \leq q \leq \min\{p, 2\},$$

$$(32) \quad b) \quad L_p \subset B_{p,q}^0(\mu) \subset B_{p,q}^0 \quad \text{при} \quad \min\{p, 2\} \leq q \leq \infty.$$

Доказательство: Правое вложение в (31) и левое вложение в (32) следуют из теоремы 3.1 из [3]. Пусть $1 \leq q \leq \min\{p, 2\}$. Тогда, как известно (см. [12]), для классических пространств Бесова имеет место вложение $B_{p,q}^0 \subset L_p$. На основании теоремы 2 имеем

$$B_{p,q}^0 = B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0 \subset B_{p,q}^0(\mu) \cdot L_p = B_{p,q}^0(\mu).$$

Аналогично, при $\min\{p, 2\} \leq q \leq \infty$ имеем

$$B_{p,q}^0 = B_{p,q}^0(\mu) \cdot B_{p,q}^0 \supset B_{p,q}^0(\mu) \cdot L_p = B_{p,q}^0(\mu).$$

Теорема доказана.

Abstract. The paper derives a representation of classical Besov zero spaces by means of the so called B-products of the generalized Besov type zero spaces, generated by completely regular polyhedrons. Peetre's K-functional is estimated and an interpolation formula of "real method" is proved for pairs of B-products. Some applications of these results are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств* (Мир, Москва, 1986).
- [2] А. Г. Багдасарян, "О "В-произведениях" пространств типа Бесова", Изв. НАН Армении, Математика **41** (1), 15-26 (2006).
- [3] A. G. Baghdasaryan, "On the Interpolation Properties of Certain Generalized Spaces of Besov Type", Jenaer Schriften zur Math. und Inform., Friedrich-Schiller Universitat, Jena, Math/Inf/12/03, 56 (3003).
- [4] П. И. Лизоркин, " (L_p, L_q) -мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР **152**, 808-811 (1963).
- [5] А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и вложения обобщенных пространств типа Бесова", Изв. НАН Армении, Математика **38** (6), 15-26 (2003).
- [6] Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, "Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения", УМН **20** (1), 3-74 (1965).
- [7] А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и следы функций из некоторых пространств типа Соболева-Лиувилля", Изв. НАН Армении, Математика **36** (5), 14-22 (2001).
- [8] А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и вложения обобщенных пространств типа Никольского-Бесова", Изв. НАН Армении, Математика **38** (6), 49-62 (2003).
- [9] П. И. Лизоркин, "Изоморфизм пространств Бесова $B_{p,\theta}^{(r)}(\mathbb{R}^n)$ с пространством $l_\theta/l(p)$. О нулевых пространствах $B_{p,\theta}^{(r)}(\mathbb{R}^n)$ ", Analysis Mathematica **2**, 203-210 (1976).
- [10] А. Г. Багдасарян, "О промежуточных пространствах и о квазилинеаризуемости пары пространств типа Лиувилля-Соболева", Analysis Mathematica **24**, 3-14 (1998).
- [11] А. Г. Багдасарян, "Интерполяционные свойства обобщенных пространств типа Лизоркина-Трибеля и Никольского-Бесова", Изв. НАН Армении, Математика **40** (3), 16-23 (2005).
- [12] Х. Трибель, *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы* (Мир, Москва, 1980).

Поступила 8 июня 2007