

**УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА–ХОПФА, ЯДРО КОТОРОГО ДОПУСКАЕТ
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ
КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ЭКСПОНЕНТ**

А. Х. Хачатрян, Ц. Э. Терджян

*Институт математики НАН Армении
Армянский государственный аграрный университет
E-mail : aghavard@hotmail.ru*

Резюме. В работе рассматривается уравнение Винера–Хопфа с ядром, представляющим собой суперпозицию комплекснозначных экспонент. Это уравнение возникает в кинетической теории газов, в теории переноса излучения и др. Применением специального трехфакторного разложения исходного необратимого оператора удаётся свести уравнение к решению двух простых вольтерровых уравнений и одного интегрального уравнения Винера–Хопфа со сжимающим оператором. Доказывается также структуральная теорема существования.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим интегральное уравнение Винера–Хопфа

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)f(t) dt \quad (0.1)$$

с комплекснозначной ядерной функцией

$$K(x) = \int_a^b e^{-|x|\lambda p} d\sigma(p), \quad \alpha = \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad [a, b] \subset [0, +\infty). \quad (0.2)$$

Здесь $g(x) \in L_1(0, +\infty)$ и $\sigma(p)$ – неубывающая функция на $[a, b]$. Граничными условиями являются

$$\int_a^b \frac{d\sigma(p)}{\alpha p} = \int_{-\infty}^\infty |K(x)| dx = 1. \quad (0.3)$$

Заметим, что уравнением (0.1)-(0.3) описывается ряд нестационарных задач физической кинетики : в частности, нестационарная задача переноса излучения

монохроматического рассеяния (см. [1]), нестационарное модельное кинетическое уравнение, т.е. классическая задача Рэлея (см. [2]) и др.

В настоящей работе доказывается структуральная теорема существования решения задачи (0.1)–(0.3). Подход основан на применении специального факторизационного метода.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть E^+ – одно из следующих банаховых пространств $L_p(0, +\infty)$, $1 \leq p \leq \infty$ (обозначим $L_\infty = M^+$). Кроме того, пусть $L_1 \equiv L_1(-\infty, +\infty)$, а $C_u(0, +\infty)$ – пространство непрерывных функций, имеющих конечный предел в $+\infty$. Через Ω обозначим класс интегральных операторов Винера–Хопфа : если $\hat{K} \in \Omega$, то

$$(\hat{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \quad K \in L_1. \quad (1.1)$$

Оператор $\hat{K} \in \Omega$ действует в E^+ , причём справедлива следующая оценка для нормы :

$$\|\hat{K}\|_{E^+} \leq \mu = \int_{-\infty}^\infty |K(x)|dx. \quad (1.2)$$

Через $1 - \bar{K}(s)$ обозначим символ оператора $J - \bar{K}(s)$ для $\hat{K} \in \Omega$, где

$$\bar{K}(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{isx}K(x)dx$$

есть преобразование Фурье от $K(x)$. Если s_1 – нуль символа $1 - \bar{K}(s)$, то $s_2 = -s_1$ также будет нулём этого символа, т.е.

$$\bar{K}(\pm s_1) = 1 = \int_a^b \left[\frac{1}{\lambda p + is_1} + \frac{1}{\lambda p - is_1} \right] d\sigma(p). \quad (1.3)$$

Через $\Omega^\pm \subset \Omega$ обозначим подклассы следующих простых вольтерровых операторов $\hat{U}_\pm \in \Omega^\pm$:

$$(\hat{U}_+f)(x) = (\beta - is_1) \int_0^x e^{-\beta(x-t)}f(t)dt, \quad (1.4)$$

$$(\hat{U}_-f)(x) = (\beta + is_2) \int_x^\infty e^{-\beta(t-x)}f(t)dt, \quad (1.5)$$

где $\beta > 0$ – произвольное число. Через $J \pm \hat{\Phi}_\pm$ обозначим обобщённые резольвенты операторов $J - \hat{U}_\pm$. Легко убедиться, что

$$(\hat{\Phi}_+f)(x) = (\beta - is_1) \int_0^x e^{-is_1(x-t)}f(t)dt, \quad (1.6)$$

$$(\hat{\Phi}_-f)(x) = (\beta - is_1) \int_x^\infty e^{-is_1(t-x)}f(t)dt, \quad f \in L_1(0, +\infty). \quad (1.7)$$

Заметим, что операторы $\hat{\Phi}_\pm$ переводят пространство $L_1(0, +\infty)$ в пространство $M(0, +\infty) \equiv L_\infty(0, +\infty)$.

§2. ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ

Перепишем уравнение (0.1) в операторном виде

$$(J - \widehat{K})f = g,$$

где J – единичный оператор.

Рассмотрим следующую задачу факторизации : для операторов $\widehat{K} \in \Omega$, $\widehat{U}_{\pm} \in \Omega^{\pm}$, найти такой оператор $\widehat{T} \in \Omega$, чтобы имело место следующее равенство в E^+

$$J - \widehat{K} = (J - \widehat{U}_-) (J - \widehat{T}) (J - \widehat{U}_+). \quad (2.1)$$

Разложение (2.1) исходит из факторизационной интерпретации “Albedo shifting” (см. [3], [4]).

Далее, введём интегральные операторы

$$\begin{aligned} (\widehat{K}_+ f)(x) &= \int_0^x K_+(x-t)f(t) dt, \\ (\widehat{K}_- f)(x) &= \int_x^\infty K_-(x-t)f(t) dt, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$K_+(x-t) = \begin{cases} \int_a^b e^{-\lambda(x-t)p} d\sigma(p) & \text{если } x \geq t, \\ 0 & \text{если } x < t, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$K_-(x-t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \geq t, \\ \int_a^b e^{-\lambda(t-x)p} d\sigma(p), & \text{если } x < t. \end{cases} \quad (2.4)$$

Очевидно, что

$$\widehat{K} = \widehat{K}_+ \oplus \widehat{K}_-. \quad (2.5)$$

Займёмся определением ядра T оператора $\widehat{T}$. Из (2.1), с учётом (2.3), (2.4) будем иметь

$$\begin{aligned} \widehat{T} &= \widehat{K}_+ + \widehat{K}_- + \widehat{K}_+ \widehat{\Phi}_+ + \widehat{K}_- \widehat{\Phi}_+ + \widehat{\Phi}_- \widehat{K}_+ + \widehat{\Phi}_- \widehat{K}_- + \widehat{\Phi}_- \widehat{K}_+ \widehat{\Phi}_+ \\ &+ \widehat{\Phi}_- \widehat{K}_- \widehat{\Phi}_+ - \widehat{\Phi}_- \widehat{\Phi}_+ - \widehat{\Phi}_- - \widehat{\Phi}_+. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя правило умножения интегральных операторов, после некоторых простых, но трудоёмких выкладок получаем :

$$\text{а) } [K_+ \Phi_+](x, t) = \begin{cases} (\beta - is_1) \int_a^b \frac{[e^{-is_1(x-t)} - e^{-\lambda p(x-t)}] d\sigma(p)}{\lambda p - is_1}, & x \geq t \\ 0, & x < t. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad [K_- \Phi_+] (x, t) &= \begin{cases} (\beta - is_1) \int_a^b \frac{e^{-is_1(x-t)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1}, & x \geq t \\ (\beta - is_1) \int_a^b \frac{e^{-is_1(t-x)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1}, & x < t. \end{cases} \\
\text{c)} \quad [\Phi_- K_+] (x, t) &= \begin{cases} (\beta - is_1) \int_a^b \frac{e^{-\lambda p(x-t)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1}, & x \geq t \\ (\beta - is_1) \int_a^b \frac{e^{-is_1(t-x)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1}, & x < t. \end{cases} \\
\text{d)} \quad [\Phi_- K_-] (x, t) &= \begin{cases} 0, & x \geq t \\ (\beta - is_1) \int_a^b \frac{[e^{-is_1(t-x)} - e^{\lambda p(t-x)}] d\sigma(p)}{\lambda p - is_1}, & x < t. \end{cases} \\
\text{e)} \quad [\Phi_- K_+ \Phi_+] (x, t) &= \begin{cases} \frac{(\beta - is_1)^2}{2is_1} \int_a^b \frac{e^{-is_1(x-t)} d\sigma(p)}{\lambda p - is_1} \\ -(\beta - is_1)^2 \int_a^b \frac{e^{-\lambda p(x-t)} d\sigma(p)}{\lambda^2 p^2 + s_1^2}, & x \geq t \\ \frac{(\beta - is_1)^2}{2is_1} \int_a^b \frac{e^{-is_1(t-x)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1} \\ -(\beta - is_1)^2 \int_a^b \frac{e^{-is_1(t-x)} d\sigma(p)}{\lambda^2 p^2 + s_1^2}, & x < t. \end{cases} \\
\text{f)} \quad [\Phi_- K_- \Phi_+] (x, t) &= \begin{cases} \frac{(\beta - is_1)^2}{2is_1} \int_a^b \frac{e^{-is_1(x-t)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1}, & x \geq t \\ \frac{(\beta - is_1)^2}{2is_1} \int_a^b \frac{e^{-is_1(t-x)} d\sigma(p)}{\lambda p + is_1} + (\beta - is_1)^2 \\ \times \int_a^b \frac{[e^{-is_1(t-x)} - e^{-\lambda p(t-x)}] d\sigma(p)}{\lambda^2 p^2 + s_1^2}, & x < t \end{cases} \\
\text{g)} \quad [\Phi_- \Phi_+] (x, t) &= \begin{cases} \frac{(\beta - is_1)^2}{2is_1} e^{-is_1(x-t)}, & x \geq t \\ \frac{(\beta - is_1)^2}{2is_1} e^{-is_1(t-x)}, & x < t. \end{cases}
\end{aligned}$$

Докажем, например, пункт f). Заметим, что для произвольного $f \in E^+$ имеем

$$\begin{aligned}
& \left(\widehat{\Phi}_- \widehat{K}_- \widehat{\Phi}_+ f \right) (x) \\
&= (\beta - is_1)^2 \int_x^\infty e^{-is_1(y-x)} \int_y^\infty K_-(y, t) \int_0^t e^{-is_1(t-z)} f(z) dz dt dy \\
&= (\beta - is_1)^2 \int_x^\infty e^{-is_1(y-x)} \int_y^\infty K_-(y, t) \left[\int_0^y e^{-is_1(t-z)} f(z) dz dt dy \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t e^{-is_1(t-z)} f(z) dz dt dy \right].
\end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования в обоих интегралах будем иметь :

$$\left(\widehat{\Phi}_- \widehat{K}_- \widehat{\Phi}_+ f \right) (x)$$

$$\begin{aligned}
&= (\beta - is_1)^2 \int_0^x f(z) \left(\int_x^\infty e^{-is_1(y-x)} \int_y^\infty K_-(y, t) e^{-is_1(t-z)} dt dy \right) dz \\
&+ (\beta - is_1)^2 \left[\int_x^\infty f(z) \left(\int_z^\infty e^{-is_1(y-x)} \int_y^\infty K_-(y, t) e^{-is_1(t-z)} dt dy \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_x^z e^{-is_1(y-x)} \int_z^\infty K_-(y, t) e^{-is_1(t-z)} dt dy \right) dz \right].
\end{aligned}$$

Следовательно, подставляя выражение $K_-(y, t)$ из (2.4) и производя интегрирование с учётом (1.3), приходим к пункту f). Справедливость остальных пунктов доказывается аналогично.

Переходя от равенств операторов к равенству ядер, после соответствующих выкладок получаем, что оператор $\hat{T} \in \Omega$, а его ядро имеет вид :

$$T(x) = \int_a^b e^{-|x|\lambda p} G_\lambda(p) d\sigma(p), \quad (2.7)$$

где

$$G_\lambda(p) = G_\lambda(p, \beta) = \frac{\lambda^2 p^2 - \beta^2}{\lambda^2 p^2 + s_1^2}. \quad (2.8)$$

Требуем, чтобы

$$\rho = \int_a^b \frac{|G_\lambda(p)| d\sigma(p)}{\alpha p} < 1. \quad (2.9)$$

Тогда, в отличие от оператора $\hat{K}$ (см. (0.3)), в любом пространстве E^+ оператор $\hat{T}$ будет сжимающим с коэффициентом сжатия ρ . Итак, нами доказан следующий результат :

Теорема 1. Пусть ядро $K(x)$ удовлетворяет условиям (0.2) и (0.3). Тогда имеет место факторизация (2.1). Ядро $T(x)$ оператора $\hat{T} \in \Omega$ задаётся формулой (2.7). Если условия (2.9) выполняются для некоторых $\beta > 0$ и $\lambda \in C$ ($\operatorname{Re} \lambda > 0$), то оператор $\hat{T}$ будет сжимающим в E^+ с коэффициентом сжатия $\rho < 1$.

§3. ПРИМЕНЕНИЕ ФАКТОРИЗАЦИИ (1.7) К РЕШЕНИЮ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ (0.1)–(0.3)

Перепишем уравнение (0.1) в операторном виде

$$(J - \hat{K})f = g. \quad (3.1)$$

С учётом факторизации (2.1) и формулы (3.1), имеем

$$(J - \hat{U}_-)(J - \hat{T})(J - \hat{U}_+)f = g. \quad (3.2)$$

Далее, обозначаем

$$(J - \widehat{U}_-) F = g, \quad (3.3)$$

$$(J - \widehat{T}) h = F, \quad (3.4)$$

$$(J - \widehat{U}_+) f = h. \quad (3.5)$$

Заметим, что из (3.3) имеем

$$F(x) = g(x) + \int_x^\infty (\beta - is_1) e^{-is_1(t-x)} g(t) dt. \quad (3.6)$$

Предполагая, что

$$\nu_1(g) = \int_0^\infty x g(x) dx < +\infty,$$

имеем $F(x) \in L_1^+$. Действительно, пусть $r > 0$ – произвольное число. Тогда

$$\begin{aligned} I_r &= \int_0^r |F(x)| dx \leq \int_0^r |g(x)| dx + (\beta^2 + s_1^2) \int_0^r \int_x^\infty |g(t)| dt dx \\ &\leq |g|_{L_1^+} + (\beta^2 + s_1^2) \left[\int_0^r \int_x^r |g(t)| dt dx + \int_0^r \int_r^\infty |g(t)| dt dx \right]. \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования в последнем слагаемом, получаем

$$\begin{aligned} I_r &= |g|_{L_1^+} + (\beta^2 + s_1^2) \left[\int_0^r |g(t)| t dt + \int_r^\infty |g(t)| r dt \right] \\ &\leq |g|_{L_1^+} + (\beta^2 + s_1^2) \cdot \nu_1(g) < +\infty, \end{aligned}$$

откуда следует, что $F \in L_1^+$, поскольку $r > 0$ – произвольное.

Перейдем к рассмотрению уравнения (3.4). Заметим, что оператор $\widehat{T}$ сжимающий в L_1^+ . Следовательно, из принципа сжимающих отображений следует, что существует решение $h \in L_1^+$ уравнения (3.4). Из (3.5) следует, что окончательное решение уравнения (0.1) имеет вид

$$f(x) = h(x) + (\beta - is_1) \int_0^x e^{-is_1(x-t)} h(t) dt = h(x) + H(x), \quad (3.7)$$

где $h(x) \in L_1$, $H(x) \in C_u(0, +\infty)$. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть K удовлетворяет условиям (0.2), (0.3), (2.9) и $\nu_1(g) < +\infty$. Тогда существует решение задачи (0.1)-(0.3), которое имеет следующую структуру

$$f(x) = h(x) + H(x),$$

где $h(x) \in L_1^+$ и $H(x) \in C_u(0, +\infty)$.

Замечание. В качестве примера рассмотрим функцию $K(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\lambda|x|}$. Нули символа определяются из уравнения

$$1 - \overline{K}(s) = \frac{s^2 + \lambda^2 - \alpha\lambda}{\lambda^2 + s^2} = 0,$$

$$T(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\lambda|x|} \left(\frac{\lambda^2 - \beta^2}{\lambda^2} \right).$$

Условие (2.9) принимает вид

$$\rho = \left| \frac{\lambda^2 - \beta^2}{\alpha\lambda} \right| < 1, \quad \lambda = \alpha + i\omega. \quad (3.8)$$

Если $\beta \in (0, \sqrt{2}\alpha)$, то условие (3.8) выполняется при $\omega \in (0, \frac{\alpha}{\sqrt{3}})$.

Авторы выражают благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну и Х. А. Хачатрянцу за полезные обсуждения.

Abstract. The paper studies the Wiener–Hopf equations with kernels representable as superposition of complex-valued exponents. Such kernels arise in the kinetic gas theory, in the radiation transfer, etc. By application of a special, three-factor expansion of the initial uninvertible operator, the solution of the considered equation is reduced to those of two simple Volterra equations and a Wiener–Hopf integral equation with a contractive operator. A structural existence theorem is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев, Курс Теоретической Астрофизики, Наука, Москва, 1985.
2. К. Черчиньяни, Теория и Приложения Уравнения Больцмана, Мир, Москва, 1978.
3. Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, “Интегральное уравнение свёртки на полупрямой с вполне монотонным ядром”, Математический Сборник, том 187, № 10, стр. 53 – 72, 1996.
4. V. V. Ivanov, G. B. Rybicki, A. M. Kasaurov, “Albedo Shifting”, Harward Smithsonian Center for Astrophysics, Preprint Series, № 3478, 1992.

Поступила 15 апреля 2007