

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ С ВЕСОМ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГЮЙГЕНСОВЫХ УРАВНЕНИЙ

А. О. Оганесян, С. Г. Рафаелян

Ереванский Государственный университет
E-mail: ahovhannisyan@ysu.am, rafayelyansg@mail.ru

Резюме. В работе изучается начальная задача для одного класса уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса. Так как рассматриваемые уравнения имеют особенность при $t = 0$, то сначала определяется вид начальных условий, а затем строится решение полученной задачи. Доказывается, что решение строится за конечное число шагов. При этом показывается каким естественным начальным условиям могут удовлетворять решения уравнений.

Известно [1], что уравнения вида

$$Pu = D_t^2 u - \sum_{k=1}^{n-1} D_k^2 u + \frac{l(l+1)}{t^2} u = 0, \quad (1)$$

где $0 \leq l \leq \frac{n-4}{2}$ – целое и $n \geq 4$ – чётное, удовлетворяют принципу Гюйгенса, т.е. значение решения $u(t, x)$, $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, в произвольной точке $P = (t_0, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ зависит от начальных данных только на пересечении начального многообразия с характеристическим конусом с вершиной в точке P . Здесь для удобства используются обозначения $D_t = -i \frac{\partial}{\partial t}$, $D_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}$.

С другой стороны, уравнения с неограниченными при $t \rightarrow 0$ коэффициентами были изучены в [2] и [3], где строился параметрикс (решение с точностью до гладких функций) с весовыми данными на гиперплоскости $t = 0$. Уравнения, кратко описанные в [3], являются особыми случаями уравнений, изученных в [2]. В настоящей работе указывается, что уравнения вида (1) являются частными случаями уравнений, рассмотренных в [3] и строится решение начальной задачи. Решение строится за конечное число шагов, откуда следует, что для уравнения

(1), параметрикс, построенный в [3], совпадает с точным решением. При этом показывается каким естественным начальным условиям могут удовлетворять решения уравнений.

Решение уравнения (1) будем искать в виде суммы интегральных операторов Фурье

$$u(t, x) = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{r=1}^2 \int_{R^{n-1} \times R^{n-1}} e^{i(\langle x-y, \xi \rangle + \sigma|\xi|t)} P_{r\sigma}(t, \xi) f_r(y) dy d\xi. \quad (2)$$

Здесь $\phi_\sigma = \langle x, \xi \rangle + \sigma|\xi|t$ – фазовые функции ($\sigma = \pm 1$), а амплитудные функции $P_{r\sigma}(t, \xi)$ ($r = 1, 2$) не зависят от x так как коэффициенты уравнения (1) не зависят от x . Подстановка функции $u(t, x)$ в уравнение (1) даёт

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{r=1}^2 \int_{R^{n-1} \times R^{n-1}} e^{i(\langle x-y, \xi \rangle + \sigma|\xi|t)} \left(D_t^2 P_{r\sigma} + 2\sigma|\xi| D_t P_{r\sigma} + \frac{l(l+1)}{t^2} P_{r\sigma} \right) f_r(y) dy d\xi = 0.$$

Отсюда получаем, что для определения функций $P_{r\sigma}$ надо решить уравнение

$$\left(D_t^2 + 2\sigma|\xi| D_t + \frac{l(l+1)}{t^2} \right) P_{r\sigma} = 0. \quad (3)$$

Заметим, что поведение функций $P_{r\sigma}$ при $t \rightarrow 0$ диктует постановку начальных условий. Решение уравнения (3) будем искать в виде $P_{r\sigma} = t^s z_{r\sigma}$, где s равно либо $l+1$ либо $-l$. Сделав замену переменных $\tau = -2\sigma|\xi|t$, получим для $z_{r\sigma}$ вырожденное гипергеометрическое уравнение [4]:

$$\tau z_{r\sigma}'' + (2s - \tau) z_{r\sigma}' - s z_{r\sigma} = 0. \quad (4)$$

Одним из решений этого уравнения является функция, которая в обозначениях, используемых для гипергеометрических рядов записывается как ${}_1F_1(s; 2s, \tau)$. Так как $2s$ – целое число, то уравнение (1) является частным случаем уравнений, рассмотренных в [3]. При этом, одно из двух линейно независимых решений уравнения (4) может содержать логарифмический член. Покажем, что в данном случае, ввиду того, что выполняется условие ”согласования”, логарифмический член отсутствует. В самом деле, если решение (4) искать в виде

$$z_{r\sigma} = \tau^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^k,$$

то для p и a_k ($k = 0, 1, \dots$) получаем

$$a_0[p(p-1) + 2sp] = 0, \quad (5)$$

$$a_k[(p+k)(p+k-1) + 2s(p+k)] = a_{k-1}[k+p-1+s], \quad k = 1, 2, \dots$$

Из первого уравнения имеем

$$p_1 = 0 \quad \text{и} \quad p_2 = -2s + 1.$$

Поэтому, одно из двух линейно независимых решений имеет вид [4]

$$z_{r\sigma}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} \tau^k = {}_1F_1(s, 2s, \tau).$$

Второй корень может принимать два значения : $p_{21} = 2l + 1$, ($s = -l$) и $p_{22} = -(2l + 1)$, ($s = l + 1$). В первом случае решение имеет вид

$$z_{r\sigma}^{21} = \tau_1^{2l+1} {}_1F_1(2l + 1, 2l + 2, \tau).$$

Это решение, как и $z_{l\sigma}^{(1)}$, быстро осцилируют при $\tau \rightarrow \infty$ [4], и поэтому не могут служить для построения амплитудной функции $P_{r\sigma}$. Поэтому рассмотрим случай p_{22} . В этом случае k -ое уравнение системы (5) принимает вид

$$a_k[(k - (2l + 1))k] = (k - l - 1)a_{k-1}.$$

Отсюда получаем, что $a_k = 0$, $k = l + 1, \dots, 2l + 1$. При $k = 2l + 1$ это равенство выполняется для произвольного значения a_{2l+1} , поэтому взяв $a_{2l+1} = 0$, получаем $a_k = 0$, $k = 2l + 1, \dots$. Таким образом, второе линейно независимое решение уравнения (4) принимает вид

$$z_{r\sigma}^{(2)} \tau^{-2l-1} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} \tau^k,$$

где $a_k^{(2)} = \frac{(k-l-1)\dots(-l)}{k!(k-2l-1)\dots(-2l)}$, $a_0^{(2)} = 1$. Таким образом, для амплитудных функций $P_{r\sigma}$ получаем

$$P_{r\sigma} = c_{r\sigma}(\xi) t^{-l} (-2i\sigma|\xi|)^{-2l-1} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} (-2i\sigma|\xi|)^k t^k, \quad r = 1, 2. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим функции

$$w_r(t) = \sum_{\sigma=\pm 1} c_{r\sigma}(\xi) t^{-l} (-2i\sigma|\xi|)^{-2l-1} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} (-2i\sigma|\xi|)^k t^k, \quad r = 1, 2,$$

и начальные условия, которые позволяют однозначно определить коэффициенты $c_{r\sigma}$. Эти условия однозначно определяют начальные условия на функцию $u(t, x)$ (2), а значит и постановку начальной задачи для уравнения (1). Непосредственные вычисления показывают, что для однозначного определения коэффициентов можно взять следующие условия :

$$\begin{aligned} t^l w_1(t) |_{t=0} &= -c_{11}(2i|\xi|)^{-2l-1} + c_{1-1}(2i|\xi|)^{-2l-1} = 1, \\ t^l w_2(t) |_{t=0} &= -c_{21}(2i|\xi|)^{-2l-1} + c_{2-1}(2i|\xi|)^{-2l-1} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} D_t \left(t^l w_1 - \sum_{\sigma=\pm 1} c_{1\sigma} (-2i\sigma|\xi|)^{-2l-1} \right) \Big|_{t=0} &= 0, \\ D_t \left(t^l w_2 - \sum_{\sigma=\pm 1} c_{2\sigma} (-2i\sigma|\xi|)^{-2l-1} \right) \Big|_{t=0} &= 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Из последних двух условий следует

$$\begin{aligned} \frac{c_{11}}{2}(2i|\xi|)^{-2iN} + \frac{c_{1-1}}{2}(2i|\xi|)^{-2iN} &= 0, \\ -\frac{i}{2} (c_{21}(2i|\xi|)^{-2l} + c_{2-1}(2i|\xi|)^{-2l}) &= 1, \end{aligned}$$

а для коэффициентов $c_{r\sigma}$ получаем

$$\begin{aligned} c_{1\sigma} &= \frac{1}{2}(-2i\sigma|\xi|)^{2l+1}, \\ c_{2\sigma} &= i(-2i\sigma|\xi|)^{2l}. \end{aligned}$$

Из формулы (2) и начальных условий (7), (8) легко получить начальные условия на решение уравнения (1)

$$t^l u |_{t=0} = f_1(x), \quad (9)$$

$$D_t (t^l u - G_1(f_1)(t, x) - G_2(f_2)(t, x)) |_{t=0} = f_2(x), \quad (10)$$

где

$$G_1(f_1)(t, x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{1}{2} \int_{R^{n-1} \times R^{n-1}} e^{i[\sigma t|\xi| + \langle x-y, \xi \rangle]} f_1(y) dy d\xi, \quad (11)$$

$$G_2(f_2)(t, x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{1}{2} \int_{R^{n-1} \times R^{n-1}} e^{i[\sigma t|\xi| + \langle x-y, \xi \rangle]} \frac{1}{-2\sigma|\xi|} f_2(y) dy d\xi. \quad (12)$$

Подставив полученные значения $c_{r\sigma}$ в (6), получаем

$$P_{1\sigma}(t, \xi) = \frac{1}{2} t^{-l} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} (-2i\sigma|\xi|)^k t^k,$$

$$P_{2\sigma}(t, \xi) = it^{-l} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} (-2i\sigma|\xi|)^{k-1} t^k.$$

Поэтому решение уравнения (1) с начальными условиями (9), (10) принимает вид

$$\begin{aligned} u(t, x) = & (2\pi)^{1-n} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{1}{2} \int_{R^{n-1} \times R^{n-1}} e^{i(\langle x-y, \xi \rangle + \sigma|\xi|t)} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} (-2i\sigma|\xi|)^k t^{k-l} f_1(y) dy d\xi + \\ & + (2\pi)^{1-n} \sum_{\sigma=\pm 1} i \int_{R^{n-1} \times R^{n-1}} e^{i(\langle x-y, \xi \rangle + \sigma|\xi|t)} \sum_{k=0}^l a_k^{(2)} (-2i\sigma|\xi|)^{k-1} t^{k-l} f_2(y) dy d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Упростим выражения (11), (12) и (13) поменяв порядок интегрирования и воспользовавшись формулой из [5]:

$$(2\pi)^{1-n} \int_{R^{n-1}} e^{i\langle x, \xi \rangle} \left[\frac{\sin |\xi|t}{|\xi|} \right] d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-2}} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \frac{\delta(|x| - r)}{t},$$

где $m = \frac{n-4}{2}$, Ω_{n-2} – площадь поверхности единичной сферы в $n-1$ -мерном пространстве и

$$(\delta(|x| - r), \varphi) = \int_{|x|=r} \varphi(x) dx.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} G_1(f_1)(t, x) &= (2\pi)^{1-n} \int_{R^{n-1}} f_1(y) \int_{R^{n-1}} e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{1}{2} (e^{i|\xi|t} + e^{-i|\xi|t}) d\xi dy = \\ &= (2\pi)^{1-n} \int_{R^{n-1}} f_1(y) \int_{R^{n-1}} e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} d\xi dy = \\ &= \int_{R^{n-1}} f_1(y) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{t\partial t} \right)^m \frac{\delta(|x-y| - t)}{t} dy = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{t\partial t} \right)^m \int_{|x-y|=t} \frac{f_1(y)}{t} dy. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$G_2(f_2)(t, x) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-2}} \left(\frac{\partial}{t\partial t} \right)^m \int_{|x-y|=t} \frac{f_2(y)}{t} dy.$$

Для решения $u(t, x)$ имеем

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{k=0}^l (-2)^k a_k^{(2)} t^{k-l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-2}} \frac{\partial^{k+1}}{t\partial t^{k+1}} \left(\frac{\partial}{t\partial t} \right)^m \int_{|x-y|=t} \frac{f_1(y)}{t} dy + \\ &+ \sum_{k=0}^l i(-2)^{k-1} a_k^{(2)} t^{k-l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Omega_{n-2}} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(\frac{\partial}{t\partial t} \right)^m \int_{|x-y|=t} \frac{f_2(y)}{t} dy. \end{aligned}$$

Из последней формулы явно видна выполнимость принципа Гюйгенса для уравнения (1).

Abstract. The paper studies the initial value problem for a class of equations satisfying Huygens' principle. Since this equations have singularities at $t = 0$, it is necessary first to determine the form of the initial conditions and then the solution of the corresponding problem is constructed in a finite number of steps. Examples of natural initial data are presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. J. E. Lagnese, K. L. Stellmacher, "A Method of Generating Classes of Huygens' Operators", J. Math. Mech., vol. 17, № 5, pp. 461 – 472, 1967.
2. А. О. Оганесян, "Построение параметрикса задачи Коши с весом для гиперболических уравнений второго порядка с неограниченными коэффициентами", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 21, № 6, стр. 33 – 50, 1986.
3. А. О. Оганесян, "Построение параметрикса начальной задачи для одного класса гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами", Докл. АН Арм.ССР, том 84, № 1, стр. 13 – 16, 1987.
4. Г. Бейтмен, А. Эрдейн, Высшие Трансцендентные Функции, I, Наука, Москва, 1973.
5. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, Обобщённые Функции и Действия над Ними, I, Москва, Наука, 1975.

Поступила 23 апреля 2007