Известия НАН Армении. Математика, **42**, № *5, 2007, 51–64*

О РЯДАХ ПО СИСТЕМЕ УОЛША С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. А. Навасардян

Ереванский государственный университет
E-mail : knavasard@ysu.am

Резюме. В статье рассматриваются ряды по системе Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$, для которых $|a_n|$ монотонно стремятся к нулю и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$. Доказываются теоремы исправления в L^1 и представления функций из L^p, $p \in (0,1)$, подрядами этого ряда.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются ряды по системе Уолша

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x), \tag{1.1}$$

для которых выполняются условия

$$a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{1.2}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty. \tag{1.3}$$

Известно (см. [1], стр. 149), что ряд вида (1.1)-(1.2) равномерно сходится на любом интервале вида $(\delta, 1)$, $\delta > 0$. В работе [2] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3). Тогда для любой почти всюду (п.в.) конечной, измеримой функции $f(x)$,* *определённой на* $[0,1]$ *существует последовательность* $\delta_n = 0, \pm 1$ *такая, что ряд по системе Уолша* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *п.в. на* $[0,1]$.

Напомним, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{1.4}$$

называется универсальным относительно подрядов в некотором классе измеримых функций S, если для любой функции $F \in S$ существует последовательность $\delta_n = 0$ или 1, для которой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n f_n(x)$ сходится к $F(x)$.

Теорема 2. *(см. [2]) Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3). Тогда существует последовательность* $\gamma_n = \pm 1$ *такая, что ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n W_n(x)$ *является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных, измеримых функций в смысле сходимости почти всюду.*

В [3] рассматривались универсальные ряды по кратной системе Уолша. Об исследованиях универсальных ортогональных рядов подробно можно узнать в работах [5] и [6]. В настоящей работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть для последовательности* $\{a_n\}$ *выполняются (1.2) и (1.3). Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* $E \subset [0,1]$, $\mu E > 1 - \varepsilon$ *такое, что для любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *существуют функция* $g \in L^1(0,1)$ *и числа* $\delta_n = 0$ *или* ± 1 *такие, что* $g(x) = f(x)$ *для* $x \in E$, *а ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ *сходится к функции* g *в метрике* $L^1(0,1)$.

Теорема 4. *Пусть для последовательности* $\{a_n\}$ *выполняются (1.2) и (1.3). Тогда существуют числа* $\gamma_n = \pm 1$ *такие, что для любого* $p \in (0,1)$ *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n W_n(x)$ *является универсальным относительно подрядов в классе* $L^p(0,1)$ *в смысле сходимости пространства* $L^p(0,1)$.

Аналогичные теоремы для системы Хаара были получены в [7]. Фактически, Теорема 3 является усилением следующего результата, вытекающего из более общей теоремы М. Г. Григоряна (см. [12], [13]) : для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$, $\mu E > 1 - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существует функция $g \in L^1(0,1)$, совпадающая с f на множестве E, а ряд Фурье–Уолша которой сходится к g в метрике $L^1(0,1)$.

Нам понадобится понятие сходимости гриди алгоритма. Пусть $\{\psi_n\}$ – нормированный базис в банаховом пространстве B, и пусть $\{\psi_n^*\}$ – биортогональная к

$\{\psi_n\}$ система. Тогда для любого $\psi \in B$ и натурального числа m сумма

$$G_m(\psi) = \sum_{n \in \Lambda} \psi_n^*(\psi)\psi_n,$$

определяется по правилу : Λ – подмножество m натуральных чисел со свойством $|\psi_n^*(\psi)| \geq |\psi_k^*(\psi)|$, если $n \in \Lambda$ и $k \notin \Lambda$. Если такое множество Λ не единственно, то берётся любое из них. Если $G_m(\psi)$ сходится к ψ в норме пространства B, то говорят, что гриди алгоритм для ψ сходится. Подробнее о гриди алгоритме и гриди базисах можно узнать из работ [8], [9], [10].
Теорема 5 является следствием Теоремы 3.

Теорема 5. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$, $\mu E > 1 - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существует функция $g \in L^1(0,1)$, которая совпадает с f на E и гриди алгоритм которой по системе Уолша сходится.*

Легко видеть, что Теорема 5 имеет место, если в Теореме 3 положить $a_n = 1/\sqrt{n}$. Если $f \in L^1(0,1)$, то $G_m(f)$ не обязан сходится (см. [11]). Следовательно, в Теореме 5 “исправление” функции f вне множества E существенно.
Ниже через $\mathbb{N}$ будем обозначать множество натуральных чисел, через $C, C_1, \ldots$ – различные абсолютные постоянные, через $\chi_I(x)$ – характеристическую функцию множества I, и

$$||f||_p = \int_0^1 |f(x)|^p dx, \quad p \in (0,1],$$

$$||f||_2 = \left\{ \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Напомним, что функции системы Радемахера определяются по формулам

$$R_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n \pi x), \quad x \in [0,1], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Функции системы Уолша выражаются через функции Радемахера следующим образом (см., например, [4]) : $W_0(x) \equiv 1$, и

$$W_n(x) = \prod_{i=1}^{p} R_{k_i+1}(x)$$

для $n \geq 1$ с двоичным представлением $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_p}$ $(k_1 > k_2 > \ldots > k_p)$. Напомним также, что двоичным интервалом называется интервал вида $\left(\dfrac{i-1}{2^k}; \dfrac{i}{2^k}\right)$, где $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$
Следующая лемма была доказана в [2].

Лемма 1. *Пусть $a_n \downarrow 0$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 = +\infty$. Тогда для любого двоичного интервала $I \subset [0,1]$ и для любых положительных чисел $\varepsilon < 1, \delta < 1, d$ и $M \in \mathbb{N}$ существуют множество $E \subset I$ и полиномы по системе Уолша*

$$P(x) = \sum_{n=M}^{N} \delta_n a_n W_n(x), \qquad P'(x) = \sum_{n=M}^{N} b_n W_n(x)$$

такие, что

1) $\delta_n = 0, \pm 1$,
2) $P'(x) = 0$, *если* $x \notin I$,
3) $|P'(x) - d| < \delta$, *если* $x \in E$, $\mu E > (1-\varepsilon)\mu I$,
4) $\sup\limits_m |\sum\limits_{n=M}^{m} b_n W_n(x)| < \delta$, *если* $x \notin I$,
5) $\sup\limits_m \left|\sum\limits_{n=M}^{m} b_n W_n(x)\right| < C\dfrac{d}{\varepsilon} + \delta$,
6) $||P - P'||_2^2 < \varepsilon\delta^2 \mu I$.

Для доказательства теорем этой статьи, нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3), а*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{j} l_k \chi_{I_k}(x)$$

– ступенчатая функция, определённая на $[0,1]$, где $\{I_k\}_{k=1}^{j}$ – непересекающиеся двоичные интервалы. Тогда для любых чисел $N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon, \delta \in (0,1)$ существуют функция $g \in L^1(0,1)$, измеримое множество $E \subset [0,1]$ и полином

$$P(x) = \sum_{n=N}^{M} \delta_n a_n W_n(x), \quad \text{где} \quad \delta_n = 0, \pm 1,$$

которые удовлетворяют следующим условиям :

1) $\mu E > (1-\varepsilon)$,
2) $g(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in E$,
3) $||g - P||_1 < \delta$,
4) $||g||_1 \le C||\varphi||_1$,
5) $\sup\limits_{m \le M} \int_0^1 |\sum_{n=N}^{m} \delta_n a_n W_n(x)|\, dx \le C||\varphi||_1$.

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3), а $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{j} l_k \chi_{I_k}(x)$ – ступенчатая функция, определённая на $[0,1]$, где $\{I_k\}_{k=1}^{j}$*

– непересекающиеся двоичные интервалы. Тогда для любых чисел $N \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$ *и* $\alpha > 0$ *существует полином*

$$P(x) = \sum_{n=N}^{M} \delta_n a_n W_n(x), \quad \text{где} \quad \delta_n = 0 \text{ или } \pm 1,$$

удовлетворяющий условиям :

1) $||\varphi - P||_p < \alpha$,
2) $\sup_m \int_0^1 \left| \sum\limits_{n=N}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx \leq C||\varphi||_p$.

Доказательство Леммы 2. Пусть $\varepsilon, \delta \in (0,1)$ и $N \in \mathbb{N}$ – некоторые числа. Без ограничения общности будем считать, что

$$\frac{1}{\varepsilon} C|l_k|\mu I_k < ||\varphi||_1, \quad k = 1, 2, \ldots, j, \tag{2.1}$$

где C – постоянная из Леммы 1 (в противном случае интервалы I_k представим в виде объединения двоичных интервалов, для которых выполняются условия (2.1)). Выберем число $\delta_1 > 0$ так, чтобы

$$\max\left\{\delta_1,\ \delta_1 \sum_{k=1}^{j} \sqrt{\varepsilon \mu I_k}\right\} < \min\left\{||\varphi||_1,\ \frac{\delta}{2}\right\}. \tag{2.2}$$

Согласно Лемме 1, для любого $k = 1, 2, \ldots, j$ существуют множества $E_k \subset I_k$ и полиномы

$$P_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n W_n(x), \qquad P'_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} b_n W_n(x),$$

(где $\delta_n = 0, \pm 1,\ N_1 = N$) такие, что :

$$\mu E_k > (1 - \varepsilon)\mu I_k, \tag{2.3}$$

$$P'_k(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \notin I_k, \tag{2.4}$$

$$|P'_k(x) - l_k| < \delta_1, \quad \text{если} \quad x \in E_k, \tag{2.5}$$

$$\sup_{m \leq N_{k+1}} \left| \sum_{n=N_k+1}^{m} b_n W_n(x) \right| < \delta_1, \quad \text{если} \quad x \notin I_k, \tag{2.6}$$

$$\sup_{m \leq N_{k+1}} \left| \sum_{n=N_k+1}^{m} b_n W_n(x) \right| < \frac{C|l_k|}{\varepsilon} + \delta_1, \quad \text{если} \quad x \in I_k, \tag{2.7}$$

$$||P_k - P'_k||_2 < \delta_1 \sqrt{\varepsilon \mu I_k}. \tag{2.8}$$

Положим

$$P(x) = \sum_{k=1}^{j} P_k(x), \quad E = \bigcup_{k=1}^{j} E_k, \quad P'(x) = \sum_{k=1}^{j} P'_k(x), \tag{2.9}$$

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если} \quad x \in E \\ P(x), & \text{если} \quad x \in [0,1] \setminus E. \end{cases} \tag{2.10}$$

Тогда условия 1) и 2) немедленно следуют из (2.3), (2.9) и (2.10). Из (2.2) и (2.8) получаем, что

$$\sum_{k=1}^{j} ||P_k - P'_k||_1 \le \sum_{k=1}^{j} ||P_k - P'_k||_2 \le \min\left\{ ||\varphi||_1, \frac{\delta}{2} \right\}. \tag{2.11}$$

Следовательно, из (2.9) получаем

$$||P - P'||_1 \le \min\left\{ ||\varphi||_1, \frac{\delta}{2} \right\}. \tag{2.12}$$

Из (2.3), (2.5), (2.7) и (2.9) следует, что

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{j} ||P'_k||_1 \le \sum_{k=1}^{j} \left((|l_k| + \delta_1)\, \mu I_k + \left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon} + \delta_1 \right) \varepsilon \mu I_k \right) \le \\ \le \sum_{k=1}^{j} (|l_k| + 2\delta_1 + C|l_k|) \mu I_k \le 2\delta_1 + (C+1)||\varphi||_1. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Отсюда, с учётом (2.2) получаем

$$||P'||_1 \le C_1 ||\varphi||_1. \tag{2.14}$$

Из (2.9), (2.5), (2.10) и (2.12) следует, что

$$||g - P||_1 = \int_E |P(x) - \varphi(x)| dx \le ||P - P'||_1 + \int_E |P'(x) - \varphi(x)| dx \le$$

$$\le \frac{\delta}{2} + \delta_1 \sum_{k=1}^{j} \mu I_k \le \frac{\delta}{2} + \delta_1.$$

Поэтому, с учётом (2.2), получаем

$$||g - P||_1 \le \delta. \tag{2.15}$$

Ясно, что (см. (2.10), (2.12) и (2.14))

$$||g||_1 \le ||\varphi||_1 + ||P||_1 \le ||\varphi||_1 + ||P'||_1 + ||P - P'||_1 \le C_2 ||\varphi||_1.$$

Пусть

$$\sup_{m\le N_{j+1}}\int_0^1\left|\sum_{n=N}^{m}\delta_n a_n W_n(x)\right|dx=\int_0^1\left|\sum_{n=N}^{m_0}\delta_n a_n W_n(x)\right|dx$$

и пусть $N_k < m_0 \le N_{k+1}$. Тогда, учитывая (2.11), (2.13), (2.6)-(2.8), (2.2) и (2.1), получаем

$$\sup_{m\le N_{j+1}}\int_0^1\left|\sum_{n=N}^{m}\delta_n a_n W_n(x)\right|dx\le\sum_{i=1}^{k-1}||P_i(x)||_1+\int_0^1\left|\sum_{n=N_k+1}^{m_0}\delta_n a_n W_n(x)\right|dx\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{k-1}||P_i-P_i'||_1+\sum_{i=1}^{k-1}||P_i'||_1+\int_0^1\left|\sum_{n=N_k+1}^{m_0}(\delta_n a_n-b_n)W_n(x)\right|dx+$$

$$+\int_0^1\left|\sum_{n=N_k+1}^{m_0}b_nW_n(x)\right|dx\le||\varphi||_1+C_1||\varphi||_1+||P_k-P_k'||_2+$$

$$+\left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon}+\delta_1\right)\mu I_k+\delta_1\le C_3||\varphi||_1.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство Леммы 3. Пусть $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{j}l_k\chi_{I_k}(x)$ – ступенчатая функция, $N\in\mathbb{N}$, $p\in(0,1)$ и $\alpha>0$ – некоторые числа. Выберем положительное число $\varepsilon\in(0,1)$ так, чтобы

$$((C+2)|l_k|)^p\varepsilon^{1-p}<\frac{\alpha}{4},\quad k=1,2,\dots,j, \tag{2.16}$$

где C – постоянная из Леммы 1. Без ограничения общности будем считать, что для всех $k=1,2,\dots,j$

$$\left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon}+1\right)^p\mu I_k<||\varphi||_p. \tag{2.17}$$

В противном случае, представим интервалы I_k в виде объединения двоичных интервалов, для которых выполняются (2.17). Выберем $\delta\in(0,1)$ так, чтобы

$$\delta<\min\left\{|l_k|:\ |l_k|\ne0,\ k=1,2,\dots,j\right\}, \tag{2.18}$$

$$\sum_{k=1}^{j}\left(\varepsilon\delta^2\mu I_k\right)^{p/2}<\min\left\{\frac{\alpha}{2},\ ||\varphi||_p\right\}, \tag{2.19}$$

$$\delta^p<\min\{\alpha/4,||\varphi||_p\}. \tag{2.20}$$

Согласно Лемме 1, для любого $k=1,2,\dots,j$ существуют множества E_k и полиномы по системе Уолша

$$P_k(x)=\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}\delta_n a_n W_n(x),\qquad P_k'(x)=\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}b_nW_n(x)$$

(где $\delta_n = 0, \pm 1$) такие, что

$$P_k'(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \notin I_k, \tag{2.21}$$

$$|P_k'(x) - l_k| < \delta, \quad \text{если} \quad x \in E_k \quad \text{и} \quad \mu E_k > (1-\varepsilon)\mu I_k, \tag{2.22}$$

$$\sup_{m \le N_{k+1}} \left| \sum_{n=N_k+1}^{m} b_n W_n(x) \right| < \delta, \quad \text{если} \quad x \notin I_k, \tag{2.23}$$

$$\sup_{m \le N_{k+1}} \left| \sum_{n=N_k+1}^{m} b_n W_n(x) \right| < \frac{C|l_k|}{\varepsilon} + \delta, \quad \text{если} \quad x \in I_k, \tag{2.24}$$

$$||P_k - P_k'||_2^2 < \varepsilon \delta^2 \mu I_k. \tag{2.25}$$

Из (2.21), (2.22), (2.16) и (2.20) получаем

$$\begin{aligned} &||P_k' - l_k \chi_{I_k}||_p = \int_{I_k} |P_k' - l_k|^p dx \le \delta^p \mu E_k + \left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon} + \delta\right)^p \mu(I_k \backslash E_k) + \\ &+ |l_k|^p \mu(I_k \backslash E_k) \le \delta^p \mu I_k + \left(\left(\frac{(C+1)|l_k|}{\varepsilon}\right)^p + |l_k|^p\right) \varepsilon \mu I_k \le \\ &\le (\delta^p + ((C+2)|l_k|)^p \varepsilon^{1-p}) \mu I_k < \frac{\alpha}{2} \mu I_k. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Так как (см. (2.25))

$$||P_k - P_k'||_p \le ||P_k - P_k'||_2^p \le \left(\varepsilon \delta^2 \mu I_k\right)^{p/2}, \tag{2.27}$$

то, с учётом (2.26), получаем

$$||P_k - l_k \chi_{I_k}||_p \le \frac{\alpha}{2} \mu I_k + \left(\varepsilon \delta^2 \mu I_k\right)^{p/2}. \tag{2.28}$$

Положим

$$P(x) = \sum_{n=N}^{M} \delta_n a_n W_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{j} P_k(x). \tag{2.29}$$

Тогда, из (2.29), (2.28) и (2.19) следует, что

$$\begin{aligned} &||P - \varphi||_p \le \sum_{k=1}^{j} \int_0^1 |P_k - l_k \chi_{I_k}|^p \, dx \le \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{\alpha}{2} \mu I_k + \left(\varepsilon \delta^2 \mu I_k\right)^{p/2}\right) \le \\ &\le \frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{j} \left(\varepsilon \delta^2 \mu I_k\right)^{p/2} < \alpha. \end{aligned}$$

Из (2.21), (2.22), (2.24) и (2.18) имеем

$$\begin{aligned} ||P_k'||_p &\le (|l_k|+\delta)^p \mu E_k + \left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon}+\delta\right)^p \varepsilon \mu I_k \le \\ &\le \left((|l_k|+\delta)^p + ((C+1)|l_k|)^p\right) \mu I_k \le C_1 |l_k|^p \mu I_k. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Следовательно, учитывая также (2.27), получаем

$$||P_k||_p \le ||P_k'||_p + ||P_k - P_k'||_p \le C_1 |l_k|^p \mu I_k + \left(\varepsilon\delta^2 \mu I_k\right)^{p/2}. \tag{2.31}$$

Пусть

$$\sup_{m \le N_j} \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx = \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^{m_0} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx$$

и пусть $N_k < m_0 \le N_{k+1}$. Тогда, учитывая также (2.31), (2.24), (2.23), (2.19), (2.27), (2.17), (2.20), получаем

$$\begin{aligned} &\sup_m \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx \le \\ &\le \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{k-1} P_i(x) \right|^p dx + \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{m_0} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx \le \\ &\le \sum_{i=1}^{k-1} ||P_i||_p + \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{m_0} (\delta_n a_n - b_n) W_n(x) \right|^p dx + \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k}^{m_0} b_n W_n(x) \right|^p dx \le \\ &\le \sum_{i=1}^{k-1} \left(C_1 |l_i|^p \mu I_i + (\varepsilon \delta^2 \mu I_i)^{p/2} \right) + ||P_k - P_k'||_2^p + \left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon}+\delta\right)^p \mu I_k + \\ &+ \delta^p \mu([0,1] \backslash I_k) \le C_3 ||\varphi|| p. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 3. Пусть η_k – монотонная последовательность положительных чисел с условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < +\infty. \tag{3.1}$$

Рассмотрим последовательность всех ступенчатых функций

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{M_n} \alpha_k^{(n)} \chi_{I_k^{(n)}}(x), \tag{3.2}$$

с рациональными значениями $\alpha_k^{(n)}$ и двоичными интервалами постоянства $I_k^{(n)}$.
Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ – произвольное число. Тогда, в силу Леммы 2, для каждой функции $f_k(x)$ из последовательности (3.2) существуют функция $g_k \in L^1(0,1)$, измеримое множество $E_k \subset [0,1]$ и полином

$$P_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n W_n(x),$$

где $\delta_n = 0$ или ± 1, удовлетворяющие следующим условиям :

$$\mu E_k > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}, \tag{3.3}$$

$$g_k(x) = f_k(x) \quad \textit{если} \quad x \in E_k, \tag{3.4}$$

$$||g_k - P_k||_1 < \eta_k, \tag{3.5}$$

$$||g_k||_1 \le C||f_k||_1, \tag{3.6}$$

$$\sup_{N_k < m \le N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right| dx \le C||f_k||_1. \tag{3.7}$$

Обозначим

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k. \tag{3.8}$$

Тогда из (3.3) и (3.8) следует, что $\mu E > 1 - \varepsilon$.
Пусть $f \in L^1(0,1)$. Из последовательности (3.2) выберем такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, чтобы выполнялись

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f - \sum_{m=1}^{k} f_{n_m} \right\|_1 = 0, \tag{3.9}$$

$$||f_{n_k}||_1 \le \eta_k, \quad k \ge 2. \tag{3.10}$$

Тогда положим $\varphi_1(x) = g_{n_1}(x)$ и

$$Q_1(x) = P_{n_1}(x) = \sum_{n=N_{n_1}+1}^{N_{n_1+1}} \delta_n a_n W_n(x).$$

Допустим, что уже определены функции $\varphi_1(x), \ \ldots, \ \varphi_{k-1}(x)$ и полиномы $Q_1(x)$, ..., $Q_{k-1}(x)$, удовлетворяющие условиям :

$$\varphi_i(x) = f_{n_i}(x), \quad x \in E, \quad 1 \le i \le k-1,$$

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{k-1} |Q_i(x) - \varphi_i(x)| dx < 2\eta_k. \tag{3.11}$$

Выберем ступенчатую функцию f_{m_k} $(m_k > m_{k-1},\ m_1 = n_1)$ из (3.2) такую, что

$$\left\| f_{m_k} - \left(f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right) \right\|_1 < \eta_k. \tag{3.12}$$

Согласно (3.10) и (3.11) имеем, что

$$\left\| f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \leq 3\eta_k. \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) получим

$$||f_{m_k}||_1 \leq 4\eta_k. \tag{3.14}$$

Положим

$$\varphi_k(x) = f_{n_k}(x) + (g_{m_k}(x) - f_{m_k}(x)), \tag{3.15}$$

$$Q_k(x) = P_{m_k}(x) = \sum_{n=N_{m_k}+1}^{N_{m_k+1}} \delta_n a_n W_n(x). \tag{3.16}$$

Ясно, что (см. (3.15) и (3.4))

$$\varphi_k(x) = f_{n_k}(x), \quad \text{если} \quad x \in E \subset E_{m_k}. \tag{3.17}$$

Из (3.15), (3.12), (3.6), (3.14) и (3.11) получаем

$$\begin{aligned} &||\varphi_k||_1 \leq ||f_{n_k} - f_{m_k}||_1 + ||g_{m_k}||_1 \leq \\ &\leq \left\| f_{m_k} - \left(f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right) \right\|_1 + ||g_{m_k}||_1 + \left\| \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \leq \\ &\leq \eta_k + 4C\eta_k + 2\eta_k = (3 + 4C)\eta_k = C_1 \eta_k. \end{aligned} \tag{3.18}$$

С учетом (3.15), (3.12) и (3.5), получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^{k} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 = \left\| P_{m_k} + f_{m_k} - g_{m_k} - f_{n_k} + \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \leq \\ &\leq \left\| f_{m_k} - (f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i)) \right\|_1 + \left\| P_{m_k} - g_{m_k} \right\|_1 \leq 2\eta_k. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Из (3.7) и (3.14) следует, что

$$\sup_{N_k < m \leq N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_{m_k}+1}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right| dx \leq C ||f_{m_k}||_1 \leq 4C\eta_k. \tag{3.20}$$

Таким образом, по индукции определяются последовательности функций $\{\varphi_k(x)\}$ и полиномов $\{Q_k(x)\}$, удовлетворяющие условиям (3.17)-(3.20).
Определим теперь функцию $g(x)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta'_n a_n W_n(x)$ следующим образом :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x),$$

$$\delta'_n = \begin{cases} \delta_n, & \text{если} \quad N_{m_k}+1 \le n \le N_{m_k+1} \quad \text{для некоторого } k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.21}$$

Ясно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta'_n a_n W_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x).$$

Из (3.18), (3.1), (3.17) и (3.9) следует, что $g \in L^1(0,1)$ и $g(x) = f(x)$ когда $x \in E$. Пусть N – любое натуральное число. Тогда $N_{m_k}+1 \le N < N_{m_{k+1}}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, с учетом (3.18)-(3.21), получаем

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \delta'_n a_n W_n(x) - g \right\|_1 \le \left\| \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 + \left\| \sum_{i=k}^{\infty} \varphi_i \right\|_1 + \left\| \sum_{n=N_{m_k}+1}^{N} \delta'_n a_n W_n(x) \right\|_1 \le$$
$$\le 2\eta_{k-1} + C_1 \sum_{i=k}^{\infty} \eta_i + 4C\eta_k \le C_2 \sum_{i=k-1}^{\infty} \eta_i.$$

Отсюда, с учетом (3.1), заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta'_n a_n W_n(x)$ сходится к $g(x)$ в метрике L^1. Теорема 3 доказана.

Доказательство Теоремы 4. Пусть $p \in (0,1)$ – произвольное число, а $\{\alpha_n\}$ – последовательность положительных чисел, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Тогда, в силу Леммы 3, для каждой функции $f_k(x)$ из последовательности (3.2) существует полином

$$P_k(x) = \sum_{N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n W_n(x), \quad \delta_n = 0 \text{ или } \pm 1,$$

удовлетворяющий условиям

$$||f_k - P_k||_p < \alpha_k, \tag{3.22}$$

$$\sup_{N_k < m \le N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx < C ||f_k||_p. \tag{3.23}$$

Пусть $f \in L^p(0,1)$ и пусть $\{\eta_k\}$ – последовательность такая, что

$$\eta_1 > \eta_2 > \ldots, \quad \eta_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.24}$$

Выберем n_1 настолько большим, чтобы выполнялись $\alpha_{n_1} < \eta_1$ и $||f - f_{n_1}||_p < \eta_1$. Ясно, что $||f - P_{n_1}||_p \le ||f - f_{n_1}||_p + ||f_{n_1} - P_{n_1}||_p < 2\eta_1$. Допустим, что уже определены числа $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$, для которых

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k-1} P_{n_i} \right\|_p < 2\eta_{k-1}. \tag{3.25}$$

Выберем число n_k так, чтобы выполнялись

$$\alpha_{n_k} < \eta_k \tag{3.26}$$

и

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k-1} P_{n_i} - f_{n_k} \right\|_p < \eta_k. \tag{3.27}$$

Тогда, из (3.22), (3.26) и (3.27) непосредственно следует

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k} P_{n_i} \right\|_p \le \eta_k + \alpha_{n_k} < 2\eta_k. \tag{3.28}$$

Далее, из (3.27), с учётом (3.24) и (3.25), получаем

$$||f_{n_k}||_p \le \eta_k + 2\eta_{k-1} < 3\eta_{k-1}. \tag{3.29}$$

Следовательно, с учётом (3.23), имеем

$$\sup_{N_{n_k} < m \le N_{n_k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_{n_k}+1}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx < C\eta_{k-1}. \tag{3.30}$$

Таким образом по индукции определим полиномы P_{n_k}, удовлетворяющие условиям (3.28) и (3.30). Теперь рассмотрим подряд ряда (1.1) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n W_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{N_{n_k}+1}^{N_{n_k+1}} \delta_n a_n W_n(x). \tag{3.31}$$

Пусть M – некоторое натуральное число и пусть для некоторого k имеет место $N_{n_k} < M \le N_{n_{k+1}}$. Тогда из (3.28) и (3.30) получаем

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{M} b_n W_n(x) \right\|_p \le \left\| f - \sum_{i=1}^{k-1} P_{n_i} \right\|_p + \left\| \sum_{n=N_k+1}^{M} \delta_n a_n W_n(x) \right\|_p \le$$
$$\le 2\eta_{k-1} + C\eta_{k-1} = C_1\eta_{k-1}.$$

Отсюда, с учетом (3.24), получаем, что ряд (3.31) сходится к f в метрике $L^p(0,1)$. Теорема 4 доказана.

Abstract. The paper studies the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ by Walsh system, where $|a_n|$ monotone tends to zero and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$. Some theorems on correction in L^1 and representability of functions from L^p, $p \in (0,1)$ by subseries of the Walsh series are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Голубов, А. Ф. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды и Преобразования Уолша, Наука, Москва, 1987.
2. Г. Г. Геворкян, К. А. Навасардян, "О рядах с монотонными коэффициентами", Изв. АН России, Серия Математика, том 63, № 1, стр. 41 – 60, 1999.
3. К. А. Навасардян, "Универсальные ряды по кратной системе Уолша", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 30, № 5, стр. 22 – 40, 1995.
4. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, АФЦ, 1999.
5. А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами", УМН, том 15, № 5 (95), стр. 77 – 141, 1960.
6. А. А. Талалян, Р. И. Овсепян, "Теоремы представления Д. Е. Меньшова и их влияние на развитие метрической теории функций", УМН, том 47, № 5(287), стр. 15 – 44, 1992.
7. К. А. Навасардян, А. А. Степанян, "О рядах по системе Хаара", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 42, № 4, стр. 219 – 231, 2007.
8. V. N. Temlyakov, "Nonlinear Methods of Approximation", Found. Comput. Math., vol. 3, pp. 33 – 107, 2003.
9. S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx., vol. 5, pp. 1 – 15, 1999.
10. P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithm for general systems", J. Approx. Theory, vol. 107, pp. 293 – 314, 2000.
11. S. A. Episkoposian, "On the divergense of greedy algorithms with respect to Waish subsystems in L", Nonlinear Analysis, vol. 66, pp. 1782 – 1787, 2007.
12. М. Г. Григорян, "Сходимость рядов Фурье-Уолша в метрике L^1 и почти всюду", Изв. ВУЗ-ов, Мат., № 11, стр. 9 – 18, 1990.
13. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат. сб., том 181, № 8, стр. 1011 – 1030, 1990.

Поступила 2 июля 2007