Известия НАН Армении. Математика, **42**, № *5, 2007, 33–50*

ОБ ИНДЕКСЕ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В $\mathbb{R}^n$

Г. А. Карапетян, А. А. Дарбинян

Русско-Армянский университет, Ереванский государственный университет
E-mail : garnik_karapetyan@yahoo.com, d_arman@freenet.am

Резюме. Настоящая работа посвящена исследованию индекса линейного дифференциального полуэллиптического оператора с переменными коэффициентами специального вида в $\mathbb{R}^n$. В частности, доказывается, что при выполнении некоторых дополнительных условий на символ оператора, в формулировке которого участвуют младшие члены, индекс оператора конечен. Оператор рассматривается в пространствах Соболева с весом.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Общая теория об индексах эллиптических дифференциальных операторов достаточно хорошо изучена (см. [1]–[6]), а теория об индексах гипоэллиптических операторов изучена не полностью. В настоящей работе делается попытка изучения теории об индексе для одного множества полуэллиптических операторов, являющегося подклассом гипоэллиптических операторов.

Будем пользоватся следующими стандартными обозначениями : $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_+^n$ – множество мультииндексов, т.е. векторов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где α_j $(j = 1, \ldots, n)$ – целые неотрицательные числа. Для $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, где ν_j $(j = 1, \ldots, n)$ суть натуральные числа, и $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $C_\beta^\alpha = C_{\beta_1}^{\alpha_1} C_{\beta_2}^{\alpha_2} \cdots C_{\beta_n}^{\alpha_n}$, где

$$C_{\beta_j}^{\alpha_j} = \frac{\beta_j!}{\alpha_j!\,(\beta_j - \alpha_j)!} \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$|\,\alpha\,| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \,\ldots\, \alpha_n!, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad \text{где} \quad D_k = \frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial\, x_k} \quad (i^2 = -1),$$

$$(\alpha:\nu)=\left(\frac{\alpha_1}{\nu_1}+\ldots+\frac{\alpha_n}{\nu_n}\right),\quad \nu_{\max}=\max_{1\le j\le n}\nu_j \quad \text{и} \quad |x|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2}.$$

Пусть U_j $(j=1,\ldots,m)$ – система открытых областей, покрывающая единичную сферу в $\mathbb{R}^n$ и пусть

$$V_i=\left\{r:|r-(i+1)|<\frac{2}{3}\right\},\quad i=-1,0,1,\ldots,$$

есть система, покрывающая полуось $0\le r<\infty$. С помощью множеств U_j $(j=1,\ldots,m)$ и интервалов V_i $(i=0,1,2,\ldots)$, построим следующую систему открытых областей :

$$W_1=\left\{x:|x|<\frac{2}{3}\right\},\quad W_{k+1}=V_{\left[\frac{k-1}{m}\right]}\times U_{k-\left[\frac{k-1}{m}\right]m},\quad k=2,3,\ldots,$$

где $[a]$ – целая часть числа a.

Легко доказывается, что множество $\{W_k\}$ $(k=1,2,\ldots)$ покрывает пространство $\mathbb{R}^n$ и $\inf_{x\in W_k}|x|\to\infty$ при $k\to\infty$.

Класс Q_ν. Для вектора ν с натуральными компонентами через Q_ν обозначим множество вещественных положительных функций $q(x)$, для которых

1. $\frac{|D^\alpha q(x)|}{q(x)^{1+(\alpha:\nu)\nu_{\max}}}\to 0$ при $|x|\to\infty$ для любого $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ $(0<(\alpha:\nu)\le 1)$,
2. для любого $\varepsilon>0$, существуют числа $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ и $k_0=k_0(\varepsilon)>0$ такие, что при $k>k_0$ и $\max_{1\le j\le m} diam\, U_j<\delta$ имеют место следующие соотношения :

$$\max_{x\in\overline{W}_k}\frac{1}{q(x)}<\varepsilon,\qquad \max_{x,y\in\overline{W}_k}\frac{|q(x)-q(y)|}{q(y)}<\varepsilon,$$

где $\overline{W}_k$ – замыкание множества W_k.

Пусть $q\in Q_\nu$ и пусть $A(x,D)$ – линейный дифференциальный оператор вида

$$A(x,D)=\sum_{(\alpha:\nu)\le 1}a_\alpha(x)\,q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}D^\alpha, \tag{1.1}$$

удовлетворяющий следующим условиям :

Условие I. Оператор $A(x,D)$ полуэллиптичен, т.е. для всех $x\in\mathbb{R}^n$ многочлен (от ξ)

$$A_0(x,\xi)=\sum_{(\alpha:\nu)=1}a_\alpha(x)\,q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\xi^\alpha$$

не имеет вещественных нулей при $\xi\neq 0$.

Условие II.

1. $\max_{x,y\in\overline{W}_k} |a_\alpha(x) - a_\alpha(y)| \to 0$ при $k \to \infty$,
2. $|a_\alpha(x)| \le C$, $x \in \mathbb{R}^n$, где C – положительная постоянная,
3. $\dfrac{|D^\beta a_\alpha(x)|}{q(x)^{(\beta:\nu)\nu_{\max}}} \to 0$ при $|x| \to \infty$ и для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ $(0 < (\beta : \nu) \le 1)$.

Условие III. Существует положительное число $N = N(A) > 0$ такое, что при $|x| \ge N$ имеем

$$\overline{A}(x,\lambda,\xi) \equiv \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} a_\alpha(x)\,\lambda^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\xi^\alpha \ne 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \;\; \lambda > 0.$$

Класс $H_q^{k,\nu}(\Omega)$**.** Для вектора ν с натуральными компонентами, области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и натурального числа k, через $H_q^{k,\nu}(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций с конечной нормой

$$||u||_{k,\nu,q}(\Omega) \equiv \left\{ \sum_{(\alpha:\nu)\le k} \iint_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\, q(x)^{2(k-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx \right\}^{1/2}.$$

В частности, через $H_{q(x_0)}^{k,\nu}(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $\{u\}$ с конечной мерой

$$||u||_{k,\nu,q(x_0)}(\Omega) \equiv \left\{ \sum_{(\alpha:\nu)\le k} \iint_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\, q(x_0)^{2(k-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx \right\}^{1/2},$$

которая, в силу того, что $q(x_0) \ne 0$, эквивалентна норме пространства Соболева $H^{k,\nu}(\Omega)$, где

$$H^{k,\nu}(\Omega) = \left\{ u : ||u||_{k,\nu}(\Omega) \equiv \left\{ \sum_{(\alpha:\nu)\le k} \iint_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\, dx \right\}^{1/2} < \infty \right\}.$$

Положим $H_q^\nu(\Omega) \equiv H_q^{1,\nu}(\Omega)$, $H_{q(x_0)}^\nu(\Omega) \equiv H_{q(x_0)}^{1,\nu}(\Omega)$ и $H^\nu(\Omega) \equiv H^{1,\nu}(\Omega)$.

§2. ОПЕРАТОР СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Пусть имеем линейный дифференциальный оператор

$$P(x,D) = \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} p_\alpha(x) D^\alpha \tag{2.1}$$

удовлетворяющий следующим условиям :

1. В некоторой фиксированной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $(|x_0| > N(A))$ коэффициенты оператора $P(x, D)$ совпадают с коэффициентами оператора $A(x_0, D)$, т.е.

$$p_\alpha(x_0) = a_\alpha(x_0)\, q(x_0)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}, \tag{2.2}$$

2. В силу условия III из §1,

$$P(x_0, \xi) = \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} p_\alpha(x_0)\xi^\alpha \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

3. Для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n : (\alpha : \nu) \le 1$

$$|p_\alpha(x) - p_\alpha(x_0)| \le \varepsilon q(x_0)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

$$\left|D^\beta p_\alpha(x)\right| \le K_\beta q(x_0)^{(1-(\alpha-\beta:\nu))\nu_{\max}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

где $\varepsilon > 0$ и $K_\beta > 0$ суть некоторые положительные постоянные.

В силу условия (2.5), используя формулу Лейбница, легко получить оценку

$$\|P(\,\cdot\,, D)u\|_{\nu,q(x_0)}\,(\mathbb{R}^n) \le C'\,\|u\|_{2,\nu,q(x_0)}\,(\mathbb{R}^n) \quad \forall u \in H^{2,\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n),$$

где C' – постоянная, не зависящая от функции u и точки x_0. Таким образом, (2.1) является ограниченным оператором из $H^{2,\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$.

Определение. Для любого мультииндекса $\nu \in \mathbb{Z}_+^n$ и области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, обозначим

$$C^\nu(\Omega) = \left\{u;\ D^\alpha u \in C(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n :\ (\alpha:\nu) \le 1\right\}.$$

Лемма 2.1. *Пусть $a \in C^\nu(\Omega)$, $q \in Q_\nu$ и для некоторого $r > 0$ при всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $(\beta : \nu) \le 1$ имеем*

$$\left|D^\beta a(x)\right| \le K q(x)^{(r+(\beta:\nu))\nu_{\max}} \quad \forall x \in \Omega,$$

где K – некоторая постоянная. Тогда для некоторой постоянной M, не зависящей от q и a

$$\|a\,u\|^2_{\nu,q}\,(\Omega) \le MK^2 \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} \iint_\Omega |D^\alpha u|^2\, q(x)^{2(r+1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx \tag{2.6}$$

для любого $u \in H^\nu_q(\Omega)$, как только правая часть оценки ограничена.

Доказательство оценки (2.6) непосредственно следует из формулы Лейбница.

Лемма 2.2. *Пусть $a \in C^\nu(\Omega)$, $q \in Q_\nu$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и для некоторого $r > 0$ при всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $(\beta : \nu) \leq 1$*

$$\left|D^\beta a(x)\right| \leq K q(x_0)^{(r+(\beta:\nu))\nu_{\max}}, \quad x \in \Omega,$$

где K – некоторая постоянная. Тогда существует постоянная M, независящая от q, a и точки x_0 такая, что

$$\|a\,u\|^2_{\nu,q(x_0)}(\Omega) \leq MK^2 \sum_{(\alpha:\nu)\leq 1} \iint_\Omega |D^\alpha u|^2\, q(x_0)^{2(r+1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx \qquad (2.7)$$

при всех $u \in H^\nu_{q(x_0)}(\Omega)$.

Заметим, что оператор $A(x_0, D)$ в (1.1) можно рассматривать как полуэллиптический оператор с параметром $q(x_0)$. Известна следующая теорема (см. [7]).

Теорема 2.1. *Оператор*

$$A(x_0, D) : H^{2,\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \to H^\nu_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$$

обладает ограниченным обратным оператором

$$R_0 : H^\nu_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \to H^{2,\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n).$$

Используя этот результат, докажем существование обратного оператора для отображения $P(\,\cdot\,, D) : H^{2,\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \to H^\nu_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2.2. *Если для оператора $P(x, D)$ выполнены условия (2.2)-(2.5), то существует число $\overline{\varepsilon} > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$ отображение*

$$P(\,\cdot\,, D) : H^{2,\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \to H^\nu_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$$

имеет ограниченный обратный оператор

$$R(\,\cdot\,, D) : H^\nu_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \to H^{2,\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство : Сначала покажем существование правого обратного для оператора $P(x, D)$. Представим оператор $P(x, D)$ в виде

$$P(x, D) = P(x_0, D) + [P(x, D) - P(x_0, D)].$$

Пусть R_0 – обратный оператор оператора $A(x_0, D) = P(x_0, D)$ (см. Теорему 2.1). Положим $u_f(x) = R_0 f(x)$, где $f \in H^\nu_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$. Так как $u_f \in H^{2,\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$, то

$$P(x, D)R_0 f(x) = f(x) + [P(x, D) - P(x_0, D)]\, R_0 f(x) \equiv f(x) + T f(x).$$

Если при условиях нашей теоремы число $\varepsilon > 0$ в (2.4) достаточно мало, то для отображения $T : H^{\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \to H^{\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\|Tv\|_{\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq \frac{1}{2}\|v\|_{\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n), \quad v \in H^{\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n).$$

Действительно,

$$\|T f\|_{\nu,\,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq \sum_{(\alpha:\nu)\leq 1} \|(p_\alpha(\,\cdot\,) - p_\alpha(x_0))\, D^\alpha R_0 f\|_{\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n). \tag{2.8}$$

Далее, используя условия (2.4), (2.5) и неравенство Колмогорова

$$\sup_{t\in R}|f'(t)| \leq \left(2\sup_{t\in R}|f(t)|\ \sup_{t\in R}|f''(t)|\right)^{1/2} \tag{2.9}$$

(для функций f с $\sup_{t\in R}\left|f^{(j)}(t)\right| < \infty$, $j = 0,1,2$) заключаем, что существует постоянная $\omega_\varepsilon > 0$ ($\omega_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$), не зависящая от точки x_0 и для которой при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$, $(\alpha:\nu) \leq 1$, $(\beta:\nu) \leq 1$,

$$\left|D^\beta\left(p_\alpha(x) - p_\alpha(x_0)\right)\right| \leq \omega_\varepsilon q(x_0)^{(1-(\alpha-\beta:\nu))\nu_{\max}}. \tag{2.10}$$

Оценка (2.10) следует из (2.4), (2.5) несколько раз применяя неравенство (2.9). Из Леммы 2.2 и неравенства (2.7) следует, что для всех $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $(\alpha:\nu) \leq 1$

$$\begin{aligned}&\|(p_\alpha(\,\cdot\,) - p_\alpha(x_0))\, D^\alpha R_0 f\|^2_{\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq\\ &\leq M_\alpha\, \omega^2_\varepsilon \sum_{(\beta:\nu)\leq 1} \iint_{\mathbb{R}^n} \left|D^{\alpha+\beta} R_0\, f(x)\right|^2 q(x_0)^{2(2-(\alpha+\beta:\nu))\nu_{\max}} dx,\end{aligned} \tag{2.11}$$

где M_α – некоторые постоянные, не зависящие от точки x_0 и ε. Так как $\omega_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то существует число $\overline{\varepsilon} > 0$, для которого

$$\sqrt{M_\alpha}\,\omega_\varepsilon \leq \frac{1}{2K\,\|R_0\|}, \quad \varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})\,,$$

где R_0 – обратный оператор оператора $A(x_0, D) = P(x_0, D)$. Таким образом, $\|R_0\|$ – норма оператора из $H^{\nu}_q(\mathbb{R}^n)$ в $H^{2,\nu}_q(\mathbb{R}^n)$, причём

$$K \geq card\left\{\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}^n_+,\, (\alpha:\nu) \leq 1\right\}.$$

Из неравенств (2.8) и (2.11) следует, что

$$\|T\, f\|_{\nu,\,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq \frac{1}{2\,\|R_0\|}\,\|R_0 f\|_{2,\nu,\,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq \frac{1}{2}\,\|f\|_{\nu,\,q(x_0)}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда непосредственно следует, что оператор I + T имеет ограниченный обратный в $H^{\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$. Положим $v_f(x) = R_0(I+T)^{-1}f(x)$, где $f \in H^{\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$. Тогда, так как $v_f \in H^{2,\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$ (см. Теорему 2.1), то имеем

$$P(x,D)v_f(x) = P(x,D)R_0(I+T)^{-1}f(x) = (P(x_0,D)+ \\ + [P(x,D) - P(x_0,D)]\,)\,R_0(I+T)^{-1}f(x) \equiv (I+T\,)\,(I+T)^{-1}f(x) \equiv f(x),$$

т.е. оператор $R \equiv R_0(I+T)^{-1}$ является правым обратным оператором оператора $P(x,D)$.

В силу Теоремы 2.1, для любой функции $u \in H^{2,\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$ существует единственная функция $f_0 \in H^{\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$R_0 f_0(x) \equiv u(x).$$

Но, так как оператор $I+T$ имеет обратный, то существует единственная функция $f \in H^{\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$, для которой

$$(I+T)^{-1}f(x) \equiv f_0(x).$$

Следовательно, для любой функции $u \in H^{2,\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$ существует единственная функция $f \in H^{\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n)$, для которой

$$Rf(x) \equiv u(x)$$

и

$$P(x,D)u(x) \equiv f(x).$$

В силу этого имеем

$$\begin{aligned} &||u||_{2,\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) = ||R\,f||_{2,\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) = \\ &= ||R_0(I+T)^{-1}f||_{2,\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq C||f||_{\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n) \leq \\ &\leq C||P(\,\cdot\,,D)u||_{\nu,q(x_0)}(\mathbb{R}^n), \quad u \in H^{2,\nu}_{q(x_0)}(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \tag{2.12}$$

где C не зависит от u, q и точки x_0.

Для завершения доказательства осталось убедится, что из существования правого обратного оператора и оценки (2.12) следует, что оператор R является ограниченным обратным для оператора $P(x,D)$. Теорема 2.2 доказана.

§3. СПЕЦИАЛЬНОЕ РАЗБИЕНИЕ ЕДИНИЦЫ В $\mathbb{R}^n$

Пусть $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ – бесконечно гладкие неотрицательные функции такие, что $\theta_1(t) = \mathrm{const} \neq 0$ при $|t| \leq 1/3$, $\theta_1(t) = 0$ при $|t| \geq 2/3$, $\theta_2(t) = 1$ при $|t| \leq 8/11$, и $\theta_2(t) = 0$ при $|t| \geq 4/5$. Очевидно, что $\theta_1(t)\theta_2(t) = \theta_1(t)$. Введем следующие функции

$$\chi_i^{(1)}(t) = \frac{\theta_1(t-i)}{\sum_{j=0}^{\infty}\theta_1(t-j)}, \quad \chi_i^{(2)}(t) = \theta_2(t-i) \quad (i = 0, 1, \ldots).$$

Эти функции обладают следующими свойствами :

1. В каждой точке $t \in (0, \infty)$ отличны от нуля одна или две функции из системы $\left\{\chi_i^{(j)}\right\}$ $(j = 1, 2)$.
2. Для любого $i = 0, 1, 2\ldots$ $supp\, \chi_i^{(1)} \subset \{t : |t-i| \leq 2/3\}$ и $supp\, \chi_i^{(2)} \subset \{t : |t-i| \leq 4/5\}$.
3. Для любого $k = 0, 1, 2\ldots$ существуют постоянные $\Lambda_k^{(1)}$ и $\Lambda_k^{(2)}$ такие, что
$$\left|D^k\chi_i^{(1)}(t)\right| \leq \Lambda_k^{(1)} \quad \text{и} \quad \left|D^k\chi_i^{(2)}(t)\right| \leq \Lambda_k^{(2)} \quad (i = 0, 1, 2\ldots).$$
4. $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\chi_i^{(1)}(t) \equiv 1.$
5. $\chi_i^{(1)}(t)\chi_i^{(2)}(t) = \chi_i^{(1)}(t), \quad i = 0, 1, 2\ldots.$

Допустим, что система открытых областей $\{U_i\}_{i=1}^m$ является покрытием единичной сферы из $\mathbb{R}^n$, а система функций $\left\{v_i^{(1)}\right\}_{i=1}^m$ такова, что

$$\sum_{i=0}^{m} v_i^{(1)}(\omega) \equiv 1, \quad supp\, v_i^{(1)} \subset U_i, \quad 0 \leq i \leq m$$

является гладкое разбиение единицы соответствующее этому разбиению. Кроме того, рассмотрим систему функций $\left\{v_i^{(2)}\right\}_{i=1}^m$, удовлетворяющую условиям

1. $supp\, v_i^{(2)} \subset U_i, \quad i = 1, 2, \ldots m,$
2. $v_i^{(1)}(\omega)v_i^{(2)}(\omega) = v_i^{(1)}(\omega), \quad i = 1, 2, \ldots m.$

Дополнительно рассмотрим следующие системы гладких функций φ_k и ψ_k :

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \chi^{(1)}_{\left[\frac{k-1}{m}\right]}(|x|)\, v^{(1)}_{k-\left[\frac{k-1}{m}\right]m}\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad k = 2, 3, \ldots, \\ \varphi_1(x) &= 1 - \sum_{k=2}^{\infty}\varphi_k(x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= \chi^{(2)}_{\left[\frac{k-1}{m}\right]}(|x|)\, v^{(2)}_{k-\left[\frac{k-1}{m}\right]m}\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad k = 2, 3, \ldots, \\ \psi_1(x) &= 1 - \sum_{k=2}^{\infty}\psi_k(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Эти системы функций обладают следующими свойствами :

1. $supp\ \varphi_k(x) \subset W_k,\ k \geq 2,$
2. $\varphi_k(x)\psi_k(x) = \varphi_k(x),\ k \geq 2,$
3. $|D^\alpha \varphi_k(x)| \leq \kappa_\alpha,\ |D^\alpha \psi_k(x)| \leq \kappa_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ k \geq 2,$ где κ_α – некоторые постоянные,
4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \equiv 1,$

т.е. система функции $\{\varphi_k\}$ является разбиением единицы в $\mathbb{R}^n$, соответствующее покрытию $\{W_k\}$.

§4. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА

Лемма 4.1. *Пусть $q \in Q_\nu$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $k_0 = k_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для $k \geq k_0$ и $\max_{1\leq j\leq m} diam\ U_j < \delta$ выполняются следующие неравенства с некоторой постоянной η_ε ($\eta_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$) :*

$$\begin{aligned} &\left\|(\varphi_k\, A(\,\cdot\,,D) - A(\,\cdot\,,D)\,\varphi_k)\ u\right\|^2_{\nu,q}(W_k) \leq \\ &\leq \eta_\varepsilon \sum_{(\alpha:\nu)<2} \iint_{W_k} |D^\alpha u(x)|^2\, q(x)^{2(2-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Доказательство. В силу условия на коэффициенты оператора A имеем

$$\begin{aligned} &\left\|(\varphi_k\, A(\,\cdot\,,D) - A(\,\cdot\,,D)\,\varphi_k)\ u\right\|^2_{\nu,q}(W_k) = \\ &= \left\| \sum_{(\beta:\nu)\leq 1} a_\beta\, q^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}} \left(\varphi_k\, D^\beta u - D^\beta\ (\varphi_k\, u)\right) \right\|^2_{\nu,q} (W_k) \leq C \sum_{(\beta:\nu)\leq 1} \mathrm{T}_\beta, \end{aligned}$$

где

$$\mathrm{T}_\beta = \left\| \varphi_k\, q^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}} D^\beta u -\ q^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}} D^\beta\ (\varphi_k\ u) \right\|^2_{\nu,q} (W_k). \tag{4.2}$$

Применяя формулу Лейбница

$$D^\beta\ (\varphi_k(x)\, u(x)) = \sum_{0\leq\alpha\leq\beta} C^\alpha_\beta\, D^\alpha \varphi_k(x)\, D^{\beta-\alpha} u(x),$$

из (4.2) имеем

$$T_\beta \leq \sum_{0\neq\alpha\leq\beta} \left\| C^\alpha_\beta q^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}}\, D^\alpha \varphi_k\, D^{\beta-\alpha} u \right\|^2_{\nu,q} (W_k).$$

Так как $q \in Q_\nu$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $k_0 = k_0(\varepsilon) > 0$ для которых

$$\max_{x\in\overline{W}_k} q(x)^{-1} \leq \varepsilon \quad при \quad k \geq k_0 \quad и \quad \max_{1\leq j\leq m} \mathrm{d}iam\ U_j < \delta.$$

Поэтому, в силу свойства 3 из §3, имеем

$$\left|q(x)^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}} D^\alpha \varphi_k(x)\right| \le \kappa_\alpha \varepsilon^{(\alpha:\nu)\nu_{\max}} q(x)^{(1+(\alpha-\beta:\nu))\nu_{\max}}, \quad x \in W_k.$$

Используя свойства функций из класса Q_ν, для любого $\gamma \in \mathbb{Z}^n_+$ и $(\gamma:\nu) \le 1$ с некоторой постоянной $\tau_\gamma(\varepsilon)$ ($\tau_\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$), имеем

$$\left|D^\gamma\left(q(x)^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}} D^\alpha \varphi_k(x)\right)\right| \le \tau_\gamma(\varepsilon)\, q(x)^{(1+(\alpha-\beta+\gamma:\nu))\nu_{\max}}, \quad x \in W_k,$$

т.е. выполняются все условия Леммы 2.1. Поэтому имеем

$$\begin{aligned}&\left\|q^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}} D^\alpha \varphi_k D^{\beta-\alpha} u\right\|^2_{\nu,q}(W_k) \le \\ &\le M \max\nolimits_{(\gamma:\nu)\le 1} \tau^2_\gamma(\varepsilon) \sum_{(\gamma:\nu)\le 1} \iint_{W_k} \left|D^{\beta-\alpha+\gamma} u\right|^2 q(x)^{2(2-(\beta-\alpha+\gamma:\nu))\nu_{\max}} dx.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Просуммировав неравенства (4.3) по α ($0 \ne \alpha \le \beta$), получим

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_\beta &\le M' \max_{(\gamma:\nu)\le 1} \tau^2_\gamma(\varepsilon) \sum_{0\ne\alpha\le\beta} \sum_{(\gamma:\nu)\le 1} \iint_{W_k} \left|D^{\beta-\alpha+\gamma} u\right|^2 q(x)^{2(2-(\beta-\alpha+\gamma:\nu))\nu_{\max}} dx \le \\ &\le M' \max_{(\gamma:\nu)\le 1} \tau^2_\gamma(\varepsilon) \sum_{0\le\alpha'<\beta} \sum_{(\gamma:\nu)\le 1} \iint_{W_k} \left|D^{\alpha'+\gamma} u\right|^2 q(x)^{2(2-(\alpha'+\gamma:\nu))\nu_{\max}} dx \le \\ &\le M'K \max_{(\gamma:\nu)\le 1} \tau^2_\gamma(\varepsilon) \sum_{(\alpha:\nu)<2} \iint_{W_k} |D^\alpha u|^2 q(x)^{2(2-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx,\end{aligned} \tag{4.4}$$

где $K \ge card\left\{\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+;\ (\alpha:\nu) \le 1\right\}$.

Из оценок (4.2) и (4.4) непосредственно следует оценка (4.1), где

$$\eta_\varepsilon = CM'K^2 \max_{(\gamma,\nu)\le 1} \tau^2_\gamma(\varepsilon).$$

Лемма 4.2. *Пусть $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ – системы функций (3.1) и (3.2). Тогда существуют постоянные Λ_1 и Λ_2, для которых*

$$\sum_{k=1}^\infty \|\varphi_k u\|^2_{\nu,q}(W_k) \le \Lambda_1^2 \|u\|^2_{\nu,q}(\mathbb{R}^n), \quad u \in H^\nu_q(\mathbb{R}^n), \tag{4.5}$$

$$\sum_{k=1}^\infty \|\psi_k u\|^2_{\nu,q}(W_k) \le \Lambda_2^2 \|u\|^2_{\nu,q}(\mathbb{R}^n), \quad u \in H^\nu_q(\mathbb{R}^n). \tag{4.6}$$

Доказательство. Так как $q \in Q_\nu$, то существует положительная постоянная Δ, для которой $\max_{x\in\mathbb{R}^n} q(x)^{-1} \le \Delta$. Следовательно, в силу свойства 3 из §3, имеем

$$\left|D^\beta \varphi_k(x)\right| \le \kappa_\beta \le \kappa_\beta\, \Delta^{(\beta:\nu)\nu_{\max}} q(x)^{(\beta:\nu)\nu_{\max}}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Поэтому, выполнены условия Леммы 2.1 при $r = 0$. Отсюда получаем

$$||\varphi_k\, u||^2_{\nu,q}\,(W_k) \le \max_{(\beta:\nu)\le 1} \kappa^2_\beta\, \Delta^{2\,(\beta:\nu)\nu_{\max}}\, ||u||^2_{\nu,q}\,(W_k). \tag{4.7}$$

Для любой фиксированной точки $x \in \mathbb{R}^n$, существует число p (зависящее лишь от размерности пространства) областей W_k, содержащих точку x. Следовательно, просуммировав неравенства (4.7) по всем k, получаем оценку (4.5), где $\Lambda_1 = \max_{(\beta:\nu)\le 1} \kappa_\beta\, \Delta^{\,(\beta:\nu)\nu_{\max}} p$. Доказательство оценки (4.6) аналогично.
Для областей "малого" размера пространства $H^\nu_{q(x_0)}$ эквивалентны пространствам H^ν_q, т.е. верна следующая лемма.

Лемма 4.3. *Пусть $q \in Q_\nu$. Существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ с некоторыми числами $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $k_0 = k_0(\varepsilon) > 0$*

$$\lambda_0\, ||u||_{\nu,q}\,(W_k) \le ||u||_{\nu,q(x_k)}\,(W_k) \le \lambda_1\, ||u||_{\nu,q}\,(W_k), \tag{4.8}$$

как только $k \ge k_0$, $\max_{1\le j\le m} diam\ U_j < \delta$ и $x_k \in W_k$, где λ_0 и λ_1 – некоторые постоянные, не зависящие от ε.

Доказательство. Так как $q \in Q_\nu$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{|q(x) - q(x_k)|}{q(x_k)} \le \max_{x,y\in \overline{W}_k} \frac{|q(x) - q(y)|}{q(y)} \le \varepsilon,$$

как только k – достаточно большое и $\max_{1\le j\le m} diam\ U_j$ – достаточно малое. Очевидно, $|q(x) - q(x_k)| \le \varepsilon\, q(x_k)$ для таких k и $diam\ U_j$, и поэтому непосредственно получаем левую часть неравенства (4.8), так как $|q(x)^p - q(x_k)^p| \le \tau_p(\varepsilon)\, q(x_k)^p$, где p – положительное число, а $\tau_p(\varepsilon) \equiv \max\{|(1-\varepsilon)^p - 1|, |(1+\varepsilon)^p - 1|\} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Правая часть неравенства (4.8) доказывается аналогичным образом.

Теорема 4.1. *Если для оператора $A(x, D)$ выполнены условия I - III, то существуют положительные числа N и C_1 такие, что*

$$||u||_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \le C_1\big\{||A(\,\cdot\,, D)u||_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) + ||u||_{L_2}(K_N)\big\}, \quad u \in H^{2,\nu}_q(\mathbb{R}^n), \tag{4.9}$$

где $K_N = \{x : |x| \le N\}$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}$ – система функции (3.1). Тогда для любого натурального n_1

$$\begin{aligned} ||u||^2_{2,\nu,q}\,(\mathbb{R}^n) &= \left\|\sum_{k=1}^\infty \varphi_k\, u\right\|^2_{2,\nu,q} (\mathbb{R}^n) \le \sum_{k=1}^\infty ||\varphi_k\, u||^2_{2,\nu,q}\,(W_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n_1} ||\varphi_k\, u||^2_{2,\nu,q}\,(W_k) + \sum_{k=n_1+1}^{\infty} ||\varphi_k\, u||^2_{2,\nu,q}\,(W_k). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Как показано в [8], существует постоянная $C_2 > 0$, для которой

$$\|v\|_{2,\nu}(\Omega) \leq C_2\big\{\|A(\,\cdot\,,D)v\|_\nu(\Omega) + \|v\|_{L_2}(\Omega)\big\}, \quad v \in C_0^\nu(\Omega), \tag{4.11}$$

где $C_0^\nu(\Omega)$ – множество функций из $C^\nu(\Omega)$, финитных в Ω.
Очевидно, что $H_q^{k,\nu}(\Omega) = H_{q(x_0)}^{k,\nu}(\Omega) = H^{k,\nu}(\Omega)$ для ограниченной области Ω. Следовательно, из оценки (4.11) и Леммы 4.1 имеем

$$\sum_{k=1}^{n_1} \|\varphi_k\, u\|_{2,\nu,q}^2(W_k) \leq C_3^2 \sum_{k=1}^{n_1} \|\varphi_k\, A(\,\cdot\,,D)\,u\|_{\nu,q}^2\,(W_k) + C_4 \|u\|_{L_2}^2(K_N), \tag{4.12}$$

где C_3 и C_4 – некоторые положительные постоянные, а N выбран так, чтобы K_N содержал все области W_k $(k = 1, 2, \ldots n_1)$.
Оценим слагаемые второй суммы правой части оценки (4.10). Пусть $k > n_1$, $x_k \in W_k$ – фиксированная точка и

$$P_k(x,D) \equiv \sum_{(\alpha:\nu)\leq 1} p_\alpha^{(k)}(x) D^\alpha,$$

где

$$p_\alpha^{(k)}(x) = \psi_k(x)\, a_\alpha(x)\, q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} + \\ + (1 - \psi_k(x)\,)\, a_\alpha(x_k)\, q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}},$$

а $\{\psi_k\}$ – система функции (3.2). Заметим, что функции $p_\alpha^{(k)}(x)$ обладают следующими свойствами :

1. $p_\alpha^{(k)}(x) - p_\alpha^{(k)}(x_k) = \psi_k(x)\big(\,a_\alpha(x)\,q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}$
   $-a_\alpha(x_k)\,q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\big)$,
2. $p_\alpha^{(k)}(x_k) = a_\alpha(x_k)\,q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}$,
3. для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $(\beta:\nu) \leq 1$, существует постоянная E_β, для которой

$$\left|D^\beta p_\alpha^{(k)}(x)\right| \leq E_\beta q(x)^{(1-(\alpha-\beta:\nu))\nu_{\max}}.$$

Свойства 1 и 2 очевидны. Докажем свойство 3. В силу формулы Лейбница имеем, что для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$D^\beta p_\alpha^{(k)}(x) = \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} C_\beta^\gamma D^\gamma \psi_k(x)\, D^{\beta-\gamma}\left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\right) + \\ + a_\alpha(x_k) q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} D^\beta\left(1 - \psi_k(x)\right). \tag{4.13}$$

Так как $q \in Q_\nu$, то из условия II следует, что

$$\left|D^{\beta-\gamma}\left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\right)\right| \leq K' q(x)^{(1-(\alpha-(\beta-\gamma):\nu))\nu_{\max}}, \tag{4.14}$$

где $K' > 0$ – некоторая постоянная. В силу свойства 3 из §3, для достаточно больших k имеем

$$q(x)^{-(\gamma:\nu)\nu_{\max}} \, |D^\gamma \psi_k(x)| \leq \kappa_\gamma \max_{x\in\overline{W}_k} q(x)^{-(\gamma:\nu)\nu_{\max}} \leq \kappa_\gamma \Delta^{(\gamma:\nu)\nu_{\max}}, \qquad (4.15)$$

где $\max_{x\in\overline{W}_k} q(x)^{-1} \leq \Delta$ не зависит от k. Из соотношения (4.13), в силу оценок (4.14) и (4.15) с некоторой постоянной E_β имеем

$$\begin{aligned}
&\left|D^\beta p_\alpha^{(k)}(x)\right| \leq \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} C_\beta^\gamma \, |D^\gamma \psi_k(x)\,| \left|D^{\beta-\gamma}\left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\right)\right| + \\
&+ \left|a_\alpha(x_k) q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} D^\beta (1-\psi_k(x))\right| \leq \\
&\leq \sum_{0\leq\gamma\leq\beta} C_\beta^\gamma \kappa_\gamma \Delta^{(\gamma:\nu)\nu_{\max}} q(x)^{(\gamma:\nu)\nu_{\max}} K' q(x)^{1-(\alpha-(\beta-\gamma):\nu)\nu_{\max}} + \\
&+ \left|a_\alpha(x_k) q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} \kappa_\gamma \, \Delta^{(\beta:\nu)\nu_{\max}} q(x)^{(\beta:\nu)\nu_{\max}}\right| \leq E_\beta q(x)^{1-(\alpha-\beta:\nu)\nu_{\max}}.
\end{aligned}$$

Так как $q \in Q_\nu$, то из свойства 1 и условия II следует, что

$$\left|p_\alpha^{(k)}(x) - p_\alpha^{(k)}(x_k)\right| \leq \tau(\varepsilon) q(x_k)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}},$$

где $\tau(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, выполнены все условия Теоремы 2.2, и поэтому, в силу оценки (2.12) имеем

$$||\varphi_k\, u||^2_{2,\nu,q(x_k)}\,(W_k) \leq C^2\, ||P_k(\,\cdot\,,D)\,(\varphi_k\, u)||^2_{\nu,q(x_k)}\,(W_k), \qquad (4.16)$$

где постоянная C не зависит от $k \geq n_1$, если n_1 выбрано достаточно большой. Так как $\psi_k(x) D^\beta \varphi_k(x) = D^\beta \varphi_k(x)$, то

$$P_k(x,D)\,(\varphi_k(x) u(x)) = A(x,D)\,(\varphi_k(x) u(x))\,. \qquad (4.17)$$

Из оценки (4.16), равенства (4.17) и Леммы 4.3 следует, что

$$||\varphi_k\, u||^2_{2,\nu,q}\,(W_k) \leq C_5^2\, ||A(\,\cdot\,,D)\,(\varphi_k\, u)||^2_{\nu,q}\,(W_k), \qquad (4.18)$$

где $C_5 = \lambda_0^{-1} C \lambda_1$. Из оценки (4.18) и Леммы 4.1, имеем

$$\begin{aligned}
||\varphi_k\, u||^2_{2,\nu,q}\,(W_k) \leq\; & C_5^2\, ||\varphi_k A(\,\cdot\,,D)\, u||^2_{\nu,q}\,(W_k) + \\
+ C_5^2\, \eta_\varepsilon & \sum_{(\alpha:\nu)<2} \iint_{W_k} |D^\alpha u(x)|^2\, q(x)^{2(2-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} dx.
\end{aligned} \qquad (4.19)$$

Так как для любого $x \in \mathbb{R}^n$ существует конечное число p (зависящее лишь от размерности пространства) областей W_k, содержащих точку x, то просуммировав неравенства (4.19) по всем $k > n_1$ и учитывая неравенства (4.10) и (4.12), получаем

$$\begin{aligned} \|\, u\|^2_{2,\nu,q}\,(\mathbb{R}^n) &\le C_3^2 \sum_{k=1}^{n_1} \|\varphi_k\, A(\,\cdot\,, D)\, u\|^2_{\nu,q}(W_k) + \\ &+ C_5^2 \sum_{k=n_1+1}^{\infty} \|\varphi_k A(\,\cdot\,, D)\, u\|^2_{\nu,q}\,(W_k) + \\ &+ \Big(C_5\, p\sqrt{\eta_\varepsilon}\, \|\, u\|_{2,\nu,q}\,(\mathbb{R}^n)\Big)^2 + C_4 \|u\|^2_{L_2}(K_N) \\ &\le C_6^2 \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k A(\,\cdot\,, D)\, u\|^2_{\nu,q}\,(W_k) + \\ &+ \Big(C_5\, p\sqrt{\eta_\varepsilon}\, \|\, u\|_{2,\nu,q}\,(\mathbb{R}^n)\Big)^2 + C_4 \|u\|^2_{L_2}(K_N). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Так как $\eta_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$C_5\, p\sqrt{\eta_\varepsilon} \le 1/\sqrt{2}.$$

Из оценки (4.20), в силу (4.5) имеем

$$\|\, u\|^2_{2,\nu,q}\,(\mathbb{R}^n) \le 2C_6^2 \Lambda_1^2\, \|\, A(\,\cdot\,, D)\, u\|^2_{\nu,q}\,(\mathbb{R}^n) + 2C_4 \|u\|^2_{L_2}(K_N).$$

Доказательство завершено.

Следствие 4.1. Если для оператора $A(x, D)$ выполнены условия I - III, то ядро оператора $A(x, D)$ в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ конечномерно.

Доказательство. Из оценки (4.9), имеем

$$\|\, u\|_{2,\nu,q}\,(\mathbb{R}^n) \le C_1 \|u\|_{L_2}(K_N) \quad \text{и} \quad u \in H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \cap Ker\, A(\,\cdot\,, D). \tag{4.21}$$

Пусть $\{u_k\}$ – последовательность функций из $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \cap Ker\, A(\cdot, D)$ таких, что $\|\, u_k\|_{2,\nu,q}\,(\mathbb{R}^n) \le 1$. Так как $q \in Q_\nu$, то $C\, \|\, u_k\|_{2,\nu}\,(K_N) \le \|\, u_k\|_{2,\nu,q}\,(K_N)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где C – некоторая постоянная, независящая от $\{u_k\}$. Это означает, что последовательность $\{u_k\}$ ограничена в пространстве $H^{2,\nu}(K_N)$, и следовательно компактна в $L_2(K_N)$ (см. [9], [10]). Далее, из оценки (4.21) следует, что последовательность $\{u_k\}$ компактна в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, единичный шар в $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \cap Ker\, A(\,\cdot\,, D)$ компактен. Следовательно, пространство $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \cap Ker\, A(\,\cdot\,, D)$ конечномерно, т.е. ядро оператора $A(x, D)$ в $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ конечномерно.

Следствие 4.2. Если для оператора $A(x,D)$ выполнены условия I - III, то область значений оператора $A(x,D)$ в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ замкнута.

Доказательство. Обозначим через S топологическое дополнение к пространству $Ker\,A(\cdot\,,D)$ пространства $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Тогда, область значений оператора $A(x,D)$ совпадает с областью значений его сужения в S. Покажем, что существует постоянная $K>0$ такая, что

$$||u||_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \le K||A(\cdot\,,D)u||_{\nu,q}(\mathbb{R}^n), \quad u \in S. \tag{4.22}$$

Чтобы доказать это неравенство, допустим, что оно неверно. Тогда можно найти такую последовательность $u_n \in S$, что $||u_n||_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \to \infty$ и $||A(\cdot\,,D)u_n||_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) \le C$. Положим $v_n = \frac{u_n}{||u_n||_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n)}$ $(n=1,2,\ldots)$. Тогда

$$||v_n||_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) = 1 \quad \text{и} \quad ||A(\cdot\,,D)v_n||_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) \to 0 \quad (n=1,2,\ldots).$$

Так как оператор вложения $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $L_2(K_N)$ вполне непрерывен (см. [9], [10]), то из v_n можно извлечь подпоследовательность v_{n_k}, сходящуюся в $L_2(K_N)$. Оценка (4.9) показывает, что v_{n_k} сходится в $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Пусть v_0 – предельный элемент этой последовательности в $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $||v_0||_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) = 1$ (так как $||v_n||_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) = 1$), $v_0 \in S$ (так как S замкнуто) и $v_0 \in Ker\,A(\cdot\,,D)$ (так как $||A(\cdot\,,D)v_n||_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) \to 0$), что приводит к противоречию. Таким образом, неравенство (4.22) верно.

Из неравенства (4.22) следует замкнутость области значений оператора $A(x,D)$ в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$, поскольку $A(x,D)$ отображает S на область значений оператора $A(x,D)$ изоморфным образом.

§5. КОЯДРО ОПЕРАТОРА

Известна следующая теорема (см. [5]).

Теорема 5.1. *Пусть T – ограниченный оператор из $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{\nu}(\mathbb{R}^n)$, обладающий следующим свойством : для любого $\varepsilon > 0$*

$$||Tu||_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) \le \varepsilon||u||_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) + M_\varepsilon||u||_{2,\nu,q}(K_N), \quad u \in H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n),$$

где M_ε – постоянная, не зависящая от функции u, а $K_N = \{x : |x| \le N\}$. Тогда T – вполне непрерывный оператор из $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 5.2. *Если для оператора $A(x,D)$ выполнены условия I - III, то коядро оператора $A(x,D)$ конечномерно в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $A^*(x,D)$ формально сопряженный к $A(x,D)$ оператор. Тогда, в силу формулы Лейбница имеем

$$
\begin{aligned}
A^*(x,D)u(x) &= \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} u(x)\right) \\
&= \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0\le\beta\le\alpha} D^{\alpha-\beta}\left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\right) D^{\beta}\left(u(x)\right) \\
&= \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} D^{\alpha}\left(u(x)\right) \\
&+ \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0\le\beta<\alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta}\left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\right) D^{\beta}\left(u(x)\right).
\end{aligned}
$$

Обозначим

$$
T(x,D)u(x) = \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0\le\beta<\alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta}\left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\right) D^{\beta}\left(u(x)\right).
$$

В силу того, что

$$
A(x,-D)u(x) \equiv \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}} D^{\alpha}\left(u(x)\right),
$$

имеем

$$
A^*(x,D)u(x) = A(x,-D)u(x) + T(x,D)u(x).
$$

Докажем, что $T(x,D)$ – компактный оператор из $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{\nu}(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что из условия II и вложения $q \in Q_\nu$ следует, что при $0 < (\alpha-\beta:\nu) \le 1$ имеем

$$
\frac{\left|D^{\alpha-\beta}\left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\right)\right|}{q(x)^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}}} \to 0 \quad \text{при} \quad |x|\to\infty, \tag{5.1}
$$

$$
\left|D^{\alpha-\beta}\left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\right)\right| \le B_{\alpha,\beta}\, q(x)^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}}, \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{5.2}
$$

Из оценки (5.1) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$
\frac{\left|D^{\alpha-\beta}\left(a_\alpha(x) q(x)^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\right)\right|}{q(x)^{(1-(\beta:\nu))\nu_{\max}}} < \varepsilon, \quad x\in\mathbb{R}^n\backslash K_N, \tag{5.3}
$$

где $N = N(\varepsilon)$ – некоторая постоянная.

Для функции $u \in H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\|T(\,\cdot\,,D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) = \\
&= \left\| \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0\le\beta<\alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta}\left(a_\alpha q^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\right) D^\beta u \right\|_{\nu,q} (\mathbb{R}^n) = \\
&= \left\| \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0\le\beta<\alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta}\left(a_\alpha q^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\right) D^\beta u \right\|_{\nu,q} (K_N) + \\
&+ \left\| \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} (-1)^{|\alpha|} \sum_{0\le\beta<\alpha} C_\alpha^\beta D^{\alpha-\beta}\left(a_\alpha q^{(1-(\alpha:\nu))\nu_{\max}}\right) D^\beta u \right\|_{\nu,q} (\mathbb{R}^n \backslash K_N).
\end{aligned}
$$

Отсюда, используя компактность K_N и оценки (5.2), (5.3), имеем

$$\|T(\,\cdot\,,D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) \le \tau_\varepsilon \|u\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) + M_\varepsilon \|u\|_{2,\nu,q}(K_N), \quad u \in H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n),$$

где $\tau_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, M_ε – постоянная, не зависящая от функции u. Следовательно, в силу Теоремы 5.1, $T(x,D)$ есть компактный оператор, действующий из $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^\nu(\mathbb{R}^n)$.

Так как для оператора $A(x,-D)$ выполнены условия I - III, то в силу Теоремы 4.1 имеем, что для всех $u \in H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \le C_1 \left\{ \|A(\,\cdot\,,-D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) + \|u\|_{L_2}(K_N) \right\}, \tag{5.4}$$

где $K_N = \{x : |x| \le N\}$. Из оценки (5.4) имеем

$$
\begin{aligned}
&\|u\|_{2,\nu,q}(\mathbb{R}^n) \le C_1 \left\{ \|A(\,\cdot\,,-D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) + \|u\|_{L_2}(K_N) \right\} \le \\
&\le C_1\{\|A^*(\,\cdot\,,D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) + \|T(\,\cdot\,,D)u\|_{\nu,q}(\mathbb{R}^n) + \|u\|_{L_2}(K_N)\}.
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

В силу Следствия 4.1 и оценки (5.5), ядро сопряженного оператора $A(x,D)$ в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ также конечномерно. Следовательно, коядро оператора $A(x,D)$ в пространстве $H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ конечномерно. Теорема доказана.

Таким образом, мы доказали, что если для оператора $A(x,D)$ выполнены условия I - III, то индекс отображения

$$A(\,\cdot\,,D) : H_q^{2,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^\nu(\mathbb{R}^n)$$

конечен.

Abstract. The paper investigates the index of some linear, differential, semielliptic operators with variable coefficients of a special form in $\mathbb{R}^n$. In particular, additional conditions on the symbol are found that render the index finite. The operators are considered in the weighted Sobolev spaces.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, "Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов", Успехи Мат. Наук, том 12, вып. 2(74), стр. 43 – 118, 1957.
2. А. И. Вольперт, "Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости", Труды Моск. Мат. Общ., том 10, стр. 41 – 87, 1961.
3. R. T. Seeley, "The Index of Elliptic Systems of Singular Integral Operators", Journal of Math. Analysis And Appl., vol. 7, pp. 289 – 309, 1963.
4. M. F. Atiyah, I. M. Singer, "The Index of Elliptic Operators on Compact Manifolds", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 69, № 3, pp. 422 – 433, 1963.
5. М. С. Агранович, "Эллиптические сингулярные интегродифференциальные операторы", Успехи Мат. Наук, том 20, вып. 5(125), стр. 3 – 120, 1965.
6. Л. А. Багиров, "Эллиптические уравнения в неограниченной области", Мат. сборник, том 86(128), № 1(9), стр. 121 – 139, 1971.
7. Г. А. Карапетян, "Регулярные уравнения, зависящие от параметра", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 25, № 2, стр. 192 – 202, 1990.
8. E. Pehkonen, "Ein Hypoelliptisches Dirichlet Problem", Com. Mat. Phys., vol. 48, № 3, pp. 131 – 143, 1978.
9. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Москва, Наука, 1977.
10. Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, Москва, Мир, 1965.

Поступила 17 мая 2007