

**ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И БАЗИСНОСТЬ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ
ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА
МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

М. А. Галдунц, С. Г. Рафаелян

Ереванский Государственный университет

E-mail : rafayelyansg@mail.ru

Резюме. В настоящей работе изучена задача интерполяции и базисности в банаховых пространствах целых функций экспоненциального типа многих переменных. Получены достаточные условия для разрешимости этих задач, а также явный аналитический вид решений.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Направляющим фактором при изучении нами вопросов интерполяции является известная теорема Котельникова [1]. Пусть W_π – класс целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) с типами $\leq \pi$, интегрируемых в квадрате на вещественной оси.

Теорема 1. Если последовательность $\{c_k\} \in \ell^2$, то ряд

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sin \pi(z - k)}{\pi(z - k)} \quad (0.1)$$

равномерно сходится на любом компакте комплексной плоскости, сходится по норме $L^2(\mathbb{R})$ на вещественной оси и даёт линейное отображение ℓ^2 на класс W_π , причём

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2, \quad (0.2)$$

и $f(k) = c_k$ ($-\infty < k < +\infty$).

В дальнейшем, теорема Котельникова была обобщена в различных направлениях Б. Я. Левиным и его учениками [1, 2]. В формуле (0.1) функция $\sin \pi z$ изменена на так называемую функцию типа синуса, а в качестве интерполяционных узлов использованы нули данной функции. Ц.ф.э.т. $S(z)$ назовём функцией типа синуса (ф.т.с.), если

$$0 < c < |S(z)| e^{-\pi |\operatorname{Im} z|} < C < \infty, \quad |\operatorname{Im} z| > K, \quad (0.3)$$

где c, C, K – некоторые постоянные, зависящие только от $S(z)$. Нули $\{\lambda_k\}$ функции $S(z)$ отделены друг от друга, если $\inf_{k \neq j} |\lambda_k - \lambda_j| > 0$.

Пусть W_σ^p ($p > 1$, $\sigma > 0$) означает пространство ц.ф.э.т., тип которой $\leq \sigma$, интегрируемых в p -ой степени на вещественной оси. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $S(z)$ – функция типа синуса и $\{\lambda_k\}$ – последовательность её нулей. Тогда для любой последовательности $\{c_k\} \in \ell^p$ ($1 < p < \infty$) ряд

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{S(z)}{S'(\lambda_k)(z - \lambda_k)} \quad (0.4)$$

равномерно сходится на любом компакте, сходится по норме $L^p(\mathbf{R})$ на вещественной оси и осуществляет линейное топологическое отображение всего пространства ℓ^p на пространство W_σ^p . При этом имеют место следующие оценки

$$\|f\|_p^p \asymp \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^p, \quad \text{и} \quad f(\lambda_k) = c_k, \quad -\infty < k < +\infty. \quad (0.5)$$

Теорема Котельникова распространяется также на случай ц.ф.э.т. многих переменных. Этот факт был сформулирован Пойа-Планшерелем [3] и распространяется на класс ц.ф.э.т. n переменных, которые на $\mathbf{R}_x^n$ в p -й степени интегрируемы. Этот класс обозначается через $W_\pi^p(\mathbf{C}^n)$ ($p \geq 1$). В качестве последовательности $\{\lambda_{i_k}\}_0^\infty$, $k = \overline{1, n}$, рассматриваются, как и в теореме Котельникова, соответственно нули функций $\sin \pi z_k$, $k = \overline{1, n}$. При этих обозначениях теорема имеет следующий вид :

Теорема. Пусть $\{C_\alpha\} \in \ell^p$, где $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$. Тогда ряд

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{i_n=-\infty}^{+\infty} C_\alpha \frac{\sin \pi (z_1 - m_{i_1})}{\pi (z_1 - m_{i_1})} \dots \frac{\sin \pi (z_n - m_{i_n})}{\pi (z_n - m_{i_n})} \quad (0.6)$$

равномерно сходится на любом компакте в $\mathbf{C}^n$, сходится по норме $L^p(\mathbf{R}_x^n)$ и даёт линейное топологическое отображение всего пространства ℓ^p на $W_\pi^p(\mathbf{C}^n)$.

Причём, имеют место следующие оценки :

$$f(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) = C_\alpha, \quad (0.7)$$

$$\|f\|_p \asymp \|\{C_\alpha\}\|_p. \quad (0.8)$$

Обобщённая М. М. Джрбашьяном теория преобразований Фурье в комплексной плоскости позволила вышеприведённые интерполяционные задачи рассматривать и решать в более широких классах целых функций [4] – [6]. Настоящая статья посвящена исследованию аналогичных интерполяционных задач в весовых классах целых функций n переменных.

§1. КЛАССЫ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ $W_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}^{p, w_1, \dots, w_n}$ И $S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$

а) Пусть $1 < p < \infty$, $-1 < w_i < p - 1$, $0 < \sigma_i < \infty$, $i = \overline{1, n}$. Будем писать $w = (w_1, \dots, w_n)$ и $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Обозначим через $W_\sigma^{p, w}(\mathbf{C}^n)$ пространство целых функций $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ экспоненциального типа с нормой

$$\|f\|_{p, w} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x_1|^{w_1} \dots |x_n|^{w_n} dx_1 \dots dx_n \right\}^{1/p}. \quad (1.1)$$

При $n = 1$ эти классы рассматривались в работах [4, 5].

Лемма 1.1. *Пространство $W_\sigma^{p, w}(\mathbf{C}^n)$ является банаховым пространством с нормой (1.1).*

Доказательство. Пусть $\{f_k(z)\}$ – фундаментальная последовательность из класса $W_\sigma^{p, w}$, т.е.

$$\|f_i - f_j\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k, j \rightarrow \infty.$$

Фиксируя первые $(n - 1)$ переменные в функциях $f_k(z) = f_k(z_1, z_2, \dots, z_n)$, получим фундаментальную последовательность функций одной переменной в банаховом пространстве $W_{\sigma_n}^{p, w_n}$. Следовательно, существует функция $f^n(\dots z_n) \in W_{\sigma_n}^{p, w_n}$ такая, что

$$\|f_i(\dots z_n) - f^n(\dots z_n)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

В двумерном случае $\{f_n(z_1, z_2)\}_n$, имеем $\|f_k - f_j\|_{p, w_1, w_2} \rightarrow 0$ при $k, j \rightarrow \infty$. С другой стороны, при фиксированном z_1 , потом соответственно z_2 , имеем

$$\|f_k - f_j\|_{p, w_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } k, j \rightarrow \infty,$$

как функция от z_2 , и, соответственно, существует некоторая функция $f^2(z_2) \in W_{\sigma_2}^{p, w_2}$ такая, что

$$\|f_k - f^2\|_{p, w_2} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Как функция от z_1 ,

$$\|f_k - f_j\|_{p, w_1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k, j \rightarrow \infty,$$

и существует некоторая функция $f^1(z_1) \in W_{\sigma_1}^{p, w_1}$ такая, что

$$\|f_k - f^1\|_{p, w_1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Теперь фиксируя z_1 и z_2 , получим $f^2(\cdot, z_2) = f^1(z_1, \cdot)$, так как $f_k(z_1, z_2)$ та же числовая последовательность. Тогда обозначим соответствующую функцию через $f(z_1, z_2) = f^2(\cdot, z_2) = f^1(z_1, \cdot)$. Опираясь на двумерный случай, доказывается и n -мерный случай.

б) Введем специальный класс $S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ функций, являющийся естественным обобщением класса функций типа синуса в многомерном случае. Следуя работе [4], через S_κ ($-\infty < \kappa < +\infty$) обозначим класс ц.ф.э.т. $S(z)$ типов $< \sigma$, нули которой $\{z_k\}_{k=0}^\infty$ отделены и

$$0 < c < |S(z) z^{-\kappa}| e^{-\sigma |\operatorname{Im} z|} < C < +\infty, \quad |\operatorname{Im} z| > K, \quad (1.2)$$

где c, C, K – некоторые положительные постоянные. Далее, обозначим

$$S_\lambda(z) = S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(z) = S_{\lambda_1}(z_1) \cdot S_{\lambda_2}(z_2) \cdots S_{\lambda_n}(z_n), \quad (-\infty < \lambda_i < +\infty),$$

где $S_{\lambda_i}(z_i) \in S_{\lambda_i}$.

Теорема 1.1. Пусть $S(z) \in S_\lambda$, где $-\infty < \lambda_i < +\infty$ и пусть $\{z_i^k\}_0^\infty$ – последовательность корней соответствующих функций $S_i(z_i)$, расположенная в порядке неубывания модулей. Тогда

1. Для любого $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ ($\delta_i > 0$, $1 \leq i \leq n$) существуют некоторые постоянные $m(\delta) > 0$ и $M(\delta) > 0$ такие, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} m(\delta) (1 + |z_1|)^{\lambda_1} \cdots (1 + |z_n|)^{\lambda_n} e^{\sigma_1 |y_1|} \cdots e^{\sigma_n |y_n|} &\leq |S(z)| \leq \\ &\leq M(\delta) (1 + |z_1|)^{\lambda_1} \cdots (1 + |z_n|)^{\lambda_n} e^{\sigma_1 |y_1|} \cdots e^{\sigma_n |y_n|} \end{aligned} \quad (1.3)$$

вне δ -окрестности множества корней, т.е. на множестве

$$\prod_k \{z : |z - z^k| \geq \delta\}, \quad \text{где} \quad z^k = (z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k).$$

2. Если p_i^k – кратность появления z_i^k во всей последовательности $\{z_i^k\}_0^\infty$, $i = \overline{1, n}$, то

$$\left| \frac{\partial^{p_1^k + \dots + p_n^k} S(z^k)}{\partial^{p_1^k} z_1 \partial^{p_2^k} z_2 \cdots \partial^{p_n^k} z_n} \right| \geq C (1 + |z_1^k|)^{\lambda_1} \cdots (1 + |z_n^k|)^{\lambda_n}. \quad (1.4)$$

3. При некоторых положительных постоянных c_i , C_i , K_i , зависящих только от функции $S(z)$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 0 < \prod_i c_i < \left| S(z) z_1^{-\lambda_1} \dots z_n^{-\lambda_n} \right| e^{-\sigma_1 |\operatorname{Im} z_1|} \dots e^{-\sigma_n |\operatorname{Im} z_n|} < \\ < \prod_i C_i < +\infty, \quad |\operatorname{Im} z_i| > K_i, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

когда $\inf \left| z_i^k - z_i^j \right| > 0$.

Доказательство. Доказательства всех трех пунктов выводятся непосредственно из аналогичных свойств соответствующих составляющих функций $S(z)$, указанных в [4].

Ниже приведем несколько примеров функций данного класса.

- 1) Пусть $0 < \mu_1^i, \mu_2^i < 2$, $C_1^i, C_2^i \in (-\infty, +\infty)$. Обозначим

$$e(z_i, \mu_1^i, \mu_2^i, C_1^i, C_2^i) \equiv e(z_i) = C_1^i E_1(i\sigma_i z_i; \mu_1^i) + C_2^i E_1(-i\sigma_i z_i; \mu_2^i),$$

где

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}$$

— целая функция типа Миттаг–Лефлера порядка ρ и типа $\sigma = 1$. Известно [4], что при $\lambda_i = \max(1 - \mu_1^i; 1 - \mu_2^i)$ функции $e(z_i)$ принадлежат S_{λ_i} . Следовательно, $S(z) = e(z_1), \dots, e(z_n) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$. В частности, $S(z)$ выражается через произведение функций типа Миттаг–Лефлера

$$S(z) = C E_{1,2}^1(z_1, \mu^1) \dots E_{1,2}^n(z_n, \mu^n),$$

когда C_1^i или $C_2^i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

- 2) Пусть $\alpha_i(t)$ — функции ограниченной вариации со скачками в точках $x_i = -\sigma_i$ и $x_i = \sigma_i$. Положим

$$F(z_i) = \int_{-\sigma_i}^{\sigma_i} E_1(iz_i t; \mu^i) d\alpha_i(t).$$

Как показано в [4], $F(z_i) \in S_{1-\mu^i}$. Следовательно, $S(z) = F(z_1), \dots, F(z_n) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, где $\lambda_i = 1 - \mu^i$.

- 3) Подставляя $\mu^i = 1$, $\sigma_i = \pi$, в качестве частного случая из второго примера можно получить

$$S(z) = \sin \pi z_1 \in S_{\lambda_1},$$

$$S(z) = \sin \pi z_1, \dots, \sin \pi z_n \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}.$$

4) В специальном случае

$$-1 < \mu^i < 2, \quad \sigma_1 = 1, \quad \alpha_i(t) = \begin{cases} -1, & t = -1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

получим

$$S_i(z_i) = E_1(iz_i; \mu^i) - E_1(-iz_i; \mu^i), \quad \text{и следовательно} \quad S(z) = \prod_{i=1}^n S_i(z_i).$$

§2. ТЕОРЕМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

а) Пусть функция $S(z) \in S_\lambda$ и $z = \{z_k\}_0^\infty$ – последовательность её корней. Согласно [4] и [5], через $s_k \geq 1$ и p_k соответственно обозначим кратность появления числа z_k на отрезке $\{z_j\}_0^k$ и во всей последовательности $\{z_j\}_0^\infty$ соответственно. Введём в рассмотрение полиномы

$$q_k(z) = \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(z_k)(z-z_k)^\nu \quad (k = \overline{0, \infty}), \quad (2.1)$$

где

$$a_\nu(z_k) = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{(z-z_k)^{p_k}}{S(z)} \right)_{z=z_k}^{(\nu)},$$

а также функции

$$\Omega_k(z) = \frac{S(z)q_k(z)}{(s_k-1)!(z-z_k)^{p_k-s_k+1}} = \frac{S(z)}{(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{a_\nu(z_k)}{(z-z_k)^{p_k-s_k-\nu+1}}. \quad (2.2)$$

Заметим, что $\Omega_k(z)$ – целая функция и в частном случае, когда все нули $S(z)$ простые, т.е. $s_k = p_k = 1$ и из (2.2) следует, что

$$\Omega_k(z) = \frac{S(z)}{S'(z_k)(z-z_k)}.$$

Коэффициенты разложения (2.1) и функция $\Omega_k(z)$ обладают следующими свойствами (см. [4], [5]).

2.1. Функции системы $\{\Omega_k(z)\}_0^\infty$ удовлетворяют следующим интерполяционным данным :

$$\Omega_k^{(s_k-1)}(z_n) = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (k, n \geq 0). \quad (2.3)$$

2.2. Если $S(z) \in S_\lambda$ и $p\lambda + w < p-1$, то

$$\Omega_k(z) \in W_\sigma^{p,w}.$$

2.3. Для коэффициентов разложения (2.1) справедливы оценки

$$|a_\nu(z_k)| \leq c(1 + |z_k|)^{-\lambda}, \quad (2.4)$$

где $c > 0$ не зависит от ν и k .

Далее рассматриваются ряды по функциям системы (2.2) :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Omega_k(z), \quad (2.5)$$

где $\{c_k\}$ – некоторая последовательность комплексных чисел. Следующая теорема касается разложению функций из класса $W_{\sigma}^{p,w}$ по ряду вида (2.5).

Теорема 2.1. Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ – нули функции $S(z) \in S_\lambda$, где $w + p\lambda \in (-1, p - 1)$. Тогда ряд (2.5) осуществляет линейное топологическое отображение всего пространства $\ell_\lambda^{p,w}$ на пространство $W_{\sigma}^{p,w}$, причём справедливо

$$f^{(s_k-1)}(z_k) = C_k,$$

$$\|f\|_{p,w} \asymp \|\{C_k\}\|.$$

В специальном случае, когда $w = 0$, $\lambda = 0$, из Теоремы 2.1 следует известная теорема Б. Я. Левина [1].

б) Пусть функции $S_i(z_i) \in S_{\lambda_i}$, $i = \overline{1, n}$, а $\{z_i^k\}_0^\infty$ – последовательность соответствующих корней. Через $s_i^k \geq 1$ (p_i^k соответственно) обозначим кратность появления числа z_i^k на отрезке $\{z_i^j\}_0^k$ (или во всей последовательности $\{z_i^j\}_0^\infty$), и запишем $S(z) = S_1(z_1)S_2(z_2) \cdots S_n(z_n)$. Это функция от n переменных, которая принадлежит классу $S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ и, в частности, целая экспоненциального типа по каждому переменному и соответствующий тип $\leq \sigma_i$, $i = \overline{1, n}$.

Используя одномерный случай (2.2), построим

$$\begin{aligned} \Omega_i^k(z_i) &= \frac{S_i(z_i) q_i(z_i)}{(s_i^k - 1)! (z_i - z_i^k)^{p_i^k - s_i^k + 1}} = \\ &= \frac{S_i(z_i)}{(s_i^k - 1)!} = \sum_{\nu=0}^{p_i^k - s_i^k} \frac{a_i^\nu(z_i^k)}{(z_i - z_i^k)^{p_i^k - s_i^k + 1}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как каждая функция $S_i(z_i)$ есть целая и имеет нуль кратности p_i^k в точке $z_i = z_i^k$, то $\Omega_i^k(z_i)$ также является целой функцией.

Через $\Omega^\kappa(z) = \Omega(z_1, z_2, \dots, z_n)$ обозначим следующую функцию от n комплексных переменных :

$$\Omega^\kappa(z) = \Omega_1^{i_1}(z_1) \Omega_2^{i_2}(z_2) \cdots \Omega_n^{i_n}(z_n) = \prod_{i=1}^n \Omega_i^{\kappa_i}(z_i), \quad (2.7)$$

где $\kappa = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, $i_j = \overline{0, \infty}$.

Лемма 2.1. Функции системы $\{\Omega^\kappa(z)\}_{\kappa \in \mathbf{R}_+^n}$ удовлетворяют следующим интерполяционным данным

$$\left. \frac{\partial^{s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1}\Omega^\kappa}{\partial^{s_1^{i_1}-1}z_1 \partial^{s_2^{i_2}-1}z_2 \dots \partial^{s_n^{i_n}-1}z_n} \right|_{(z_1^{j_1}, z_2^{j_2}, \dots, z_n^{j_n})} = \delta_{\kappa, \kappa_j} = \begin{cases} 1, & \kappa = \kappa_j, \\ 0, & \kappa \neq \kappa_j. \end{cases} \quad (2.8)$$

Если $S(z) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ и $p\lambda_i + w_i < p-1$, то $\Omega^\kappa(z) \in W_\sigma^{p,w}$.

Доказательство. Первое утверждение леммы доказывается на основе свойства (2.1) и определения (2.7) функции $\Omega^\kappa(z)$. Для доказательства второго утверждения заметим, что согласно (2.7), $\Omega^\kappa(z)$ является целой функцией экспоненциального типа $\leq \sigma_i$ по каждому из переменных. С другой стороны, для каждого множителя, составляющего $\Omega_j^{i_j}(z_j)$, имеем следующую оценку :

$$\left\| \Omega_j^{i_j}(z_j) \right\|^p = \int_{\mathbf{R}} \left| \Omega_j^{i_j}(x_j) \right|^p |x_j|^{w_j} dx_j < +\infty, \quad j = \overline{1, n},$$

вытекающую из того факта, что $\Omega^\kappa(z)$ принадлежит $W_{\sigma_j}^{p,w_j}$. Умножая n неравенств, получаем

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n \left\| \Omega_j^{i_j}(z_j) \right\|^p &= \prod_{j=1}^n \int_{\mathbf{R}} \left| \Omega_j^{i_j}(x_j) \right|^p |x_j|^{w_j} dx_j = \\ &= \int_{\mathbf{R}} \dots \int_{\mathbf{R}} \left| \Omega_1^{i_1}(x_1) \right|^p |x_1|^{w_1} \left| \Omega_2^{i_2}(x_2) \right|^p |x_2|^{w_2} \dots \left| \Omega_n^{i_n}(x_n) \right|^p |x_n|^{w_n} dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} |\Omega^\kappa(x)|^p |x_1|^{w_1} \dots |x_n|^{w_n} dx_1 \dots dx_n = \|\Omega^\kappa(z)\|_{p,w}^p < +\infty, \end{aligned}$$

если только $p\lambda_j + w_j < p-1$, $j = \overline{1, n}$. Итак, $\Omega^\kappa(z) \in W_\sigma^{p,w}$.

с) Рассмотрим теперь ряды по функциям системы $\{\Omega^\kappa(z)\}_{\kappa \in \mathbf{R}_+^n}$:

$$f(z) = \sum_{\kappa \in \mathbf{R}_+^n} c_\kappa \Omega^\kappa(z), \quad (2.9)$$

где $\{c_\kappa\}_{\kappa \in \mathbf{R}_+^n}$ – некоторая последовательность комплексных чисел. Нас интересует вопрос : когда этот ряд определяет функцию из класса $W_\sigma^{p,w}$.

Через $\{z_i^k\}_0^\infty$, $i = \overline{1, n}$, обозначим последовательность нулей функции $S(z) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, а через $\ell_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{p, w_1, \dots, w_n} \equiv \ell_\lambda^{p, w}$ ($1 < p < \infty$, $-1 < w < p-1$) – класс последовательностей комплексных чисел $\{c_\kappa\}_{\kappa \in \mathbf{R}_+^n}$, удовлетворяющих условию

$$\|\{c_\kappa\}\|_{\ell_\lambda^{p, w}} = \left\{ \sum_{\kappa \in \mathbf{R}_+^n} |c_\kappa|^p (1 + |z_1|)^{w_1} \dots (1 + |z_n|)^{w_n} \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (2.10)$$

Очевидно, что $\ell_\lambda^{p, w}$ является банаховым пространством с данной нормой.

Теорема 2.2. Если $\{c_\kappa\} \in \ell_\chi^{p,w}$ и $p\lambda_i + w_i > -1$, то ряд (2.7) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $K \subset \mathbf{C}^n$, определяет целую функцию $f(z)$, причём

$$\frac{\partial^{s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1} f}{\partial^{s_1^{i_1}-1} z_1 \partial^{s_2^{i_2}-1} z_2 \dots \partial^{s_n^{i_n}-1} z_n} \Big|_{(z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_n})} = c_\kappa = c_{(i_1, \dots, i_n)}. \quad (2.11)$$

Доказательство. Пусть $K_i \subset \mathbf{C}$ – некоторый компакт, не содержащий нулей z_i^k функции $S_i(z_i)$. Следовательно, на $K \subset \mathbf{C}^n$ ($K = (K_1 \times \dots \times K_n)$) для остаточного члена нашего ряда (2.9) имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_{N,m}(z)| &= \left| \sum_{\kappa=N=(i_{n_1}, \dots, i_{n_n})}^{m=(i_{m_1}, \dots, i_{m_n})} c_\kappa \Omega^\kappa(z) \right| = \\ &= \left| \sum_{\kappa=N=(i_{n_1}, \dots, i_{n_n})}^{m=(i_{m_1}, \dots, i_{m_n})} \Omega_1^{i_1}(z_1) \Omega_2^{i_2}(z_2) \dots \Omega_n^{i_n}(z_n) c_\kappa \right| \leq \\ &\leq B_1 \dots B_n \sum_{\kappa=N}^m |c_\kappa| \frac{|q_1^{i_1}(z_1) q_2^{i_2}(z_2) \dots q_n^{i_n}(z_n)|}{|z_1 - z_1^{i_1}|^{p_1^{i_1}-s_1^{i_1}+1} \dots |z_n - z_n^{i_n}|^{p_n^{i_n}-s_n^{i_n}+1}}. \end{aligned}$$

Из определения полиномов $q_j^{i_j}$ и свойства их коэффициентов следует

$$\begin{aligned} |q_j^{i_j}(z_j)| &\leq \sum_{\nu=0}^{p_j^{i_j}-s_j^{i_j}} |a_j^\nu(z_j^{i_j})| |z_j - z_j^{i_j}|^\nu \leq \\ &\leq C_j \left(1 + |z_j^{i_j}|\right)^{-\lambda_j} \sum_{\nu=0}^{p_j^{i_j}-s_j^{i_j}} |z_j - z_j^{i_j}|^\nu \\ &\leq D_j \left(1 + |z_j^{i_j}|\right)^{p_j^{i_j}-s_j^{i_j}-\chi_j}, \quad z_j \in K_j. \end{aligned}$$

В силу полученных неравенств, имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_{N,m}(z)| &\leq S_1 \dots S_n \sum_{\kappa=N}^m |c_\kappa| \left(1 + |z_1^{j_1}|\right)^{-(\lambda_1+1)} \dots \left(1 + |z_n^{j_n}|\right)^{-(\lambda_n+1)} \leq \\ &\leq S_1 \dots S_n \left\{ \sum_{\kappa=N}^m |c_\kappa|^p \left(1 + |z_1^{j_1}|\right)^{w_1} \dots \left(1 + |z_n^{j_n}|\right)^{w_n} \right\}^{1/p} \times \\ &\times \left\{ \sum_{\kappa=N}^m \left(1 + |z_1^{j_1}|\right)^{q(-1-\lambda_1-\frac{w_1}{p})} \dots \left(1 + |z_n^{j_n}|\right)^{q(-1-\lambda_n-\frac{w_n}{p})} \right\}^{1/p}, \quad p, q > 1. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$q \left(-1 - \lambda_i - \frac{w_i}{p} \right) < -1 \quad \text{при} \quad p\lambda_i + w_i > -1,$$

и следовательно, вторая сумма правой части является отрезком сходящегося ряда. Следовательно,

$$|\Phi_{N,m}(z)| \leq S \|\{c_\kappa\}_N^m\|_{\ell_\lambda^{p,w}},$$

а это означает, что наш ряд абсолютно и равномерно сходится на K . Применяя принцип максимума к отрезкам нашего ряда, мы получим, что этот ряд абсолютно и равномерно сходится в каждой ограниченной n -мерной области и, следовательно, представляет собой целую функцию. Интерполяционные свойства непосредственно вытекают из Леммы 2.1.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 2.3. Пусть $\{z_i^k\}_{k=0}^\infty$, $i = \overline{1, n}$, – последовательность всех нулей функции $S(z) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ и $w_i + p\lambda_i \in (-1, p-1)$. Тогда :

1. Для любого элемента $\{a_\kappa\} \in \ell_\lambda^{p,w}$, ряд

$$f(z) = \sum_{\kappa \in \mathbb{R}_n^+} c_\kappa \Omega^\kappa(z)$$

сходится по норме пространства $W_\sigma^{p,w}$ и определяет функцию $f(z) \in W_\sigma^{p,w}$, удовлетворяющую интерполяционным условиям (2.11).

2. Справедливы следующие неравенства

$$\|f\|_{p,w} \asymp \|\{a_\kappa\}\|_{\ell_\lambda^{p,w}}.$$

Доказательство. Теорему докажем только для $n = 2$ (случай для произвольного $n \geq 2$ рассматривается аналогично). Имеем

$$f(z_1, z_2) = \sum_{i,j} c_{ij} \Omega_1^i(z_1) \Omega_2^j(z_2) = \sum_i \left\{ \sum_j a_{ij} \Omega_2^j(z_2) \right\} \Omega_1^i(z_1).$$

Ряд, как мы уже знаем, абсолютно и равномерно сходится на $\mathbf{C}^2$. Зафиксируем одну из переменных, например z_2 , получим функцию от одной переменной $f(z_{i_1}, \cdot)$. Применим к ней результаты, известные для одномерного случая (т.е. Теорему 2.1). Для этого необходимо доказать, что коэффициент при Ω_1^i принадлежит классу $\ell_{\lambda_1}^{p,w_1}$, т.е.

$$\sum_i \left| \sum_j a_{ij} \Omega_2^j(z_{2,\Phi}) \right|^p (1 + |z_1^i|)^{w_1} < +\infty.$$

Для этого, оценим внутреннюю сумму для произвольного фиксированного z_2, Φ . Зафиксируем произвольное $z_2 \in K_2$, где K_2 – компакт, не содержащий нули функции $S_2(z_2)$, т.е. $\{z_2^j\}_0^\infty$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_j a_{ij} \Omega_2^j(z_2) \right| &\leq B_1 \sum_j |a_{ij}| \frac{|q_j(z_2)|}{|z_2 - z_2^j|^{p_2^j - s_2^j + 1}}, \\ |q_j(z_2)| &\leq \sum_{\nu=0}^{p_2^j - s_2^j} |a_\nu(z_2^j)| |z_2 - z_2^j|^\nu \leq \\ &\leq B_2 \left(1 + |z_2^j|\right)^{-\lambda_2} \sum_{\nu=0}^{p_2^j - s_2^j} |z_2 - z_2^j|^\nu \leq B_3 \left(1 + |z_2^j|\right)^{p_2^j - s_2^j - \lambda_2}. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_j a_{ij} \Omega_2^j(z_2) \right| &\leq B_4 \sum_j |a_{ij}| \left(1 + |z_2^j|\right)^{-(\lambda_2 + 1)} \leq \\ &\leq B_4 \left\{ \sum_j |a_{ij}|^p \left(1 + |z_2^j|\right)^{w_2} \right\}^{1/p} \left\{ \sum_j \left(1 + |z_2^j|\right)^{q(-1 - \lambda_2 - \frac{w_2}{p})} \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Но из $p\lambda_2 + w_2 > -1$ следует, что

$$q \left(-1 - \lambda_2 - \frac{w_2}{p} \right) < -1,$$

а из сходимости ряда

$$\sum_j \left(1 + |z_2^j|\right)^{-\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

следует, что второй множитель есть сходящийся ряд, т.е.

$$\left| \sum_j a_{ij} \Omega_2^j(z_2) \right|^p \leq B_5 \left\{ \sum_j |a_{ij}|^p \left(1 + |z_2^j|\right)^{w_2} \right\}.$$

После подстановки результата во внешнюю сумму получаем

$$\begin{aligned} \sum_i \left| \sum_j a_{ij} \Omega_2^j(z_2) \right|^p \left(1 + |z_1^j|\right)^{w_1} &\leq B_5 \sum_i \sum_j |a_{ij}|^p \left(1 + |z_2^j|\right)^{w_2} \left(1 + |z_1^i|\right)^{w_1} = \\ &= \left\| \{a_{ij}\}_{i,j} \right\|_{\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{p, w_1, w_2}} < +\infty, \end{aligned}$$

что следует из условия теоремы. С помощью принципа максимума полученный факт распространяем на всю плоскость. Наша задача – показать, что $f(z_1, z_2) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}^{p, w_1, w_2}$, т.е. интеграл

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(x_1, x_2)|^p |x_1|^{w_1} |x_2|^{w_2} = \int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_{\mathbf{R}} |f(x_1, x_2)|^p |x_1|^{w_1} dx_1 \right\} |x_2|^{w_2} dx_2$$

конечен. Применим этот факт для функции $f(z_1, \cdot)$ как функции от одной переменной и воспользуемся оценкой

$$\|f(z_1, \cdot)\|_{p, w_1}^p \asymp \|\{c_j\}\|_{\ell_{\lambda_1}^{p, w_1}}^p$$

для соответствующих коэффициентов $\{c_i\}_i$, определяющихся формулой

$$\frac{\partial f^{(s_1^i-1)}(z_1^i, \cdot)}{\partial z_1} = c_i.$$

Следовательно, получим

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x_1, \cdot)|^p |x_1|^{w_1} dx_1 \leq \sum_i B \left| \frac{\partial f^{(s_1^i-1)}(z_1^i, \cdot)}{\partial z_1} \right|^p (1 + |z_1^i|)^{w_1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_{\mathbf{R}} |f(x_1, \cdot)|^p |x_1|^{w_1} dx_1 \right\} |x_2|^{w_2} dx_2 \leq \\ & \leq B \int_{\mathbf{R}} \sum_i \left| \frac{\partial f^{(s_1^i-1)}(z_1^i, \cdot)}{\partial z_1} \right|^p (1 + |z_1^i|)^{w_1} |x_2|^{w_2} dx_2. \end{aligned}$$

Отметим, что подынтегральная функция в правой части зависит только от переменной z_2 . Для дальнейших выкладок рассмотрим функцию

$$\frac{\partial f^{(s_1^i-1)}(z_1^i, \cdot)}{\partial z_1},$$

которая зависит только от z_2 . С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(s_1^i-1)}(z_1^i, \cdot)}{\partial z_1} &= \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^{(s_1^i-1)} \Omega_1^i(z_1^i)}{\partial z_1} \Omega_2^j(z_2) = \\ &= \sum_j \left\{ \sum_i a_{ij} \frac{\partial^{(s_1^i-1)} \Omega_1^i(z_1^i)}{\partial z_1} \right\} \Omega_2^j(z_2) = \sum_j \left\{ \sum_i a_{ij} \right\} \Omega_2^j(z_2). \end{aligned}$$

Наша задача – показать сходимость следующего ряда :

$$\sum_j \left| \sum_i a_{ij} \right|^p \left(1 + |z_2^j| \right)^{w_2} < +\infty.$$

Для произвольного $z_1 \in K_1$ (где K_1 не содержит точки из $\{z_1^i\}_i$), запишем общий вид $\Omega_1^i(z_1)$:

$$\begin{aligned} \Omega_1^i(z_1) &= \frac{s_1(z_1) q_i(z_1)}{(s_1^i - 1)! (z_1 - z_1^i)^{p_1^i - s_1^i + 1}} = \frac{s_1(z_1)}{(s_1^i - 1)!} \sum_{\nu=0}^{p_1^i - s_1^i} \frac{a_\nu(z_1^i)}{(z_1 - z_1^i)^{p_1^i - s_1^i - \nu + 1}} = \\ &= \frac{1}{(s_1^i - 1)!} \sum_{\nu=0}^{p_1^i - s_1^i} a_\nu(z_1^i) s_1(z_1) (z_1 - z_1^i)^{-p_1^i - 1 + s_1^i + \nu}, \end{aligned}$$

и вычислим производную $(s_1^i - 1)$ порядка от данной функции :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{s_1^i - 1} \Omega_1^i(z_1)}{\partial^{s_1^i - 1} z_1} &= \frac{1}{(s_1^i - 1)!} \sum_{\nu=0}^{p_1^i - s_1^i} a_\nu(z_1^i) \sum_{\ell=0}^{s_1^i - 1} C_{s_1^i - 1}^\ell S_1^{(s_1^i - 1 - \ell)}(z_1) \times \\ &\times (s_1^i + \nu - p_1^i - 1) \cdots (s_1^i + \nu - p_1^i - \ell) (z_1 - z_1^i)^{s_1^i + \nu - p_1^i - 1 - \ell} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{p_1^i - s_1^i} a_\nu(z_1^i) \sum_{\ell=0}^{s_1^i - 1} C_{s_1^i - 1}^\ell S_1^{(s_1^i - 1 - \ell)}(z_1) A_\nu(z_1 - z_1^i)^{s_1^i + \nu - p_1^i - 1 - \ell}. \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{s_1^i - 1} \Omega_1^i(z_1)}{\partial^{s_1^i - 1} z_1} \right| &\leq \sum_{\nu=0}^{p_1^i - s_1^i} \sum_{\ell=0}^{s_1^i - 1} |a_\nu(z_1^i)| |C_{s_1^i - 1}^\ell| \left| S_1^{(s_1^i - 1 - \ell)}(z_1) \right| |A_\nu| \times \\ &\times |z_1 - z_1^i|^{s_1^i + \nu - p_1^i - 1 - \ell} \leq \sum_{\nu=0}^{p_1^i - s_1^i} |a_\nu(z_1^i)| |B_\nu| |z_1 - z_1^i|^{s_1^i - p_1^i + \nu - 1} \leq \\ &\leq B (1 + |z_1^i|)^{-\lambda_1 - 1}. \end{aligned}$$

Последующие шаги в точности совпадают с предыдущим доказательством сходимости ряда. Следовательно, можно ещё раз применить одномерный результат.

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_{\mathbf{R}} |f(x_1, x_2)|^p |x_1|^{w_1} dx_1 \right\} |x_2|^{w_2} dx_2 \leq \\ &\leq A_1 \int_{\mathbf{R}} \sum_i \left| \frac{\partial^{(s_1^i - 1)} f(z_1^i, \cdot)}{\partial^{(s_1^i - 1)} z_1} \right|^p |x_2|^{w_2} (1 + |z_1^i|)^{w_1} dx_2 \leq \\ &\leq A_2 \sum_i \sum_j \left| \left\{ \frac{\partial^{s_1^i - 1 + s_2^j - 1} f(z_1^i, z_2^j)}{\partial^{s_1^i - 1} z_1 \partial^{s_2^j - 1} z_2} \right\} \right|^p (1 + |z_1^i|)^{w_1} (1 + |z_2^j|)^{w_2} = \\ &= A_2 \sum_i \sum_j |a_{ij}|^p (1 + |z_1^i|)^{w_1} (1 + |z_2^j|)^{w_2} = \|a_{ij}\|_{\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{p, w_1, w_2}}^p < \infty. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Принадлежность к соответствующему классу доказана. Аналогично можно получить неравенство в другую сторону :

$$\|f\|_{w_1, w_2}^p \geq A \|a_{ij}\|_{\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{p, w_1, w_2}}^p. \quad (2.13)$$

Из неравенств (2.12) и (2.13) вытекает, что

$$\|f\|_{w_1, w_2}^p \asymp \|a_{ij}\|_{\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{p, w_1, w_2}}^p.$$

Кроме того, из Теоремы 2.2 вытекает, что функция $f(z_1, z_2)$ удовлетворяет интерполяционным условиям (2.11).

Теорема 2.4. Каждая целая функция $f(z) \in W_{\sigma}^{p, w}(\mathbf{C}^n)$ разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{\kappa \in \mathbb{R}_n^+} c_{\kappa} \Omega^{\kappa}(z),$$

где

$$c_{\kappa} = \frac{\partial^{(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1)} f(z_1^{i_1}, z_2^{i_2}, \dots, z_n^{i_n})}{\partial^{s_1^{i_1}-1} z_1 \dots \partial^{s_n^{i_n}-1} z_n},$$

а $\{z_i^k\}_0^{\infty}$, $i = \overline{1, n}$ — нули целой функции $S(z) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, где $w_i + p\lambda_i \in (-1, p-1)$.

Доказательство. Итак, имеем функцию $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ от n переменных, принадлежащую $W_{\sigma}^{p, w}(\mathbf{C}^n)$. Зафиксируем первые $(n-1)$ переменных, в результате получим функцию одной переменной, которая принадлежит классу $W_{\sigma_n}^{p, w_n}$. Можем применить аналогичную теорему для одномерного случая, т.е. Теорему 2.1

$$f(\dots, z_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \frac{\partial^{(s_n^{i_1}-1)} f(z_n^{i_1})}{\partial^{(s_n^{i_1}-1)} z_n} \Omega_n^{i_1}(z_n).$$

Функция

$$\frac{\partial^{(s_n^{i_1}-1)} f(z_n^{i_1})}{\partial^{(s_n^{i_1}-1)} z_n}$$

зависит от $(n-1)$ переменных и, как уже отмечалось в Теореме 2.3, она принадлежит классу $W_{\sigma}^{p, w}(\mathbf{C}^{n-1})$. На втором шаге, зафиксируем первые $(n-2)$ переменные и воспользуемся Теоремой 2.1 для $(n-1)$ -ой переменной, получаем

$$f(\dots, z_{n-1}, z_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \frac{\partial^{(s_n^{i_1}-1+s_{n-1}^{i_2}-1)} f(\dots, z_{n-1}^{i_2}, z_n^{i_1})}{\partial^{(s_n^{i_1}-1)} z_n \partial^{(s_{n-1}^{i_2}-1)} z_{n-1}} \Omega_n^{i_1}(z_n) \Omega_{n-1}^{i_2}(z_{n-1}).$$

И, наконец, на последнем шаге получим необходимое разложение

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{\kappa=(i_1, \dots, i_n), \kappa \in \mathbb{R}_n^+} \frac{\partial^{(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1)} f(z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_1})}{\partial^{(s_1^{i_1}-1)} z_n \dots \partial^{(s_n^{i_n}-1)} z_1} \Omega_1^{i_1}(z_1) \dots \Omega_n^{i_n}(z_n).$$

Обозначив

$$\frac{\partial^{(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1)} f(z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_1})}{\partial^{(s_1^{i_1}-1)} z_n \dots \partial^{(s_n^{i_n}-1)} z_1} = a_{i_1, \dots, i_n},$$

из (2.13) получим

$$f(z) = \sum_{\kappa \in \mathbb{R}_n^+} a_\kappa \Omega^\kappa(z), \quad \{a_\kappa\} \in \ell_\lambda^{p,w}.$$

Следствие 2.1. Если $f(z) \in W_\sigma^{p,w}(\mathbf{C}^n)$ ($1 < p < \infty$, $-1 < w < p-1$) и $\{z_i^k\}_0^\infty$, $i = \overline{1, n}$, — нули функции $S(z) \in S_{\lambda_1, \lambda_n}$, $w_i + p\lambda_i \in (-1, p-1)$ и

$$\frac{\partial^{(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1)} f(z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_n})}{\partial^{(s_1^{i_1}-1)} z_1 \dots \partial^{(s_n^{i_n}-1)} z_n} = 0,$$

то $f(z) \equiv 0$ ($\kappa = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{R}_n^+$).

Объединив результаты Теорем 2.3 и 2.4, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2.5. Пусть $\{z_i^k\}_0^\infty$, $i = \overline{1, n}$, — нули функции $S(z) \in S_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, где $w_i + p\lambda_i \in (-1, p-1)$. Тогда ряд (2.9) осуществляет линейное топологическое отображение всего пространства $\ell_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{p, w_1, \dots, w_n} \equiv \ell_\lambda^{p, w}$ на пространство $W_\sigma^{p, w}(\mathbf{C}^n)$, причём справедливы соотношения

$$\frac{\partial^{(s_1^{i_1}-1+s_2^{i_2}-1+\dots+s_n^{i_n}-1)} f(z_1^{i_1}, \dots, z_n^{i_n})}{\partial^{(s_1^{i_1}-1)} z_1 \dots \partial^{(s_n^{i_n}-1)} z_n} = c_{i_1, \dots, i_n} = c_\kappa,$$

$$\|f\|_{p, w} \asymp \|\{c_\kappa\}\|_{\ell_\lambda^{p, w}}.$$

Отметим, что в специальном случае, когда $w = 0$, $\lambda = 0$, из Теоремы 2.5 следует известная теорема Пойа-Планшереля [3].

Abstract. The paper investigates the interpolation and basicity problem in Banach spaces of entire functions of exponential type in several variable. Some sufficient conditions for solvability of these problem and the explicit analytic form of the solutions are obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский, “Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент”, Изв. АН СССР, серия Математика, том 39, № 3, стр. 657 – 702, 1975.
2. Б. Я. Левин, “Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа”, Сб. “Математическая физика и функциональный анализ”, ФНИИТ АН УССР, Вып. 1, стр. 136 – 146, 1969.
3. N. Plancherel, G. Polya, Fonctions Entieres et Integrales de Fourier Multiples, Seconde Partie, 1937.
4. С. Г. Рафаелян, “Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа”, Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 18, № 3, 1983.
5. М. М. Джрбашян, С. Г. Рафаелян, “О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов L_p ”, ДАН Арм.ССР, 1981.
6. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, Наука, Москва, 1966.

Поступила 10 апреля 2007