Известия НАН Армении. Математика, **42**, № *5, 2007, 11–16*

ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ ТИПА ТЕОРЕМЫ Г. СЕГЁ

С. А. Вагаршакян

Ереванский государственный университет
E-mail : suren86@gmail.com

Резюме. В этой статье приводится новый результат типа хорошо известной теоремы Г. Сегё и А. Колмогорова о наилучшем приближении аналитическими полиномами в весовых пространствах L^p. Результаты такого типа играют существенную роль в теории предсказания стационарных процессов. Хорошо известно, что точность наилучшего предсказания на один шаг вперёд, не зависит от p. В данной статье мы докажем, что в случае предсказания на два шага вперёд получаются разные результаты для $p = 2$ и $p = \infty$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье приводится аналог следующей, хорошо известной теоремы Г. Сегё, (см. [1], стр. 201).

Теорема 1.1. *Пусть $h(z)$ – неотрицательная, непрерывная функция на единичной окружности $|z| = 1$. Тогда для любого $1 \le p \le \infty$ имеет место равенство :*

$$\inf_{c_j,n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left| e^{-ix} - \sum_{j=0}^{n} c_j e^{ijx} \right| h(e^{ix}) \right)^p dx \right)^{1/p} = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\, h(e^{ix}) dx \right\}.$$

А. Колмогоров [3] обобщил приведённый выше результат. С целью сравнения с результатом данной статьи здесь мы приводим формулировку частного случая теоремы А. Колмогорова. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ix} + z}{e^{ix} - z} \log\, h(e^{ix}) dx \right\}, \quad |z| < 1,$$

которая имеет граничные значения почти всюду и $|F(z)| = h(z)$, $|z| = 1$.

Теорема 1.2. *Пусть $h(z)$ – неотрицательная, интегрируемая функция на $|z|=1$ и пусть $h(z)=h(\bar{z}), |z|=1$. Тогда имеет место равенство :*

$$\inf_{c_j,n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|Ae^{-2ix}-\sum_{j=0}^{n}c_je^{ijx}\right|h(e^{ix})\right)^2dx\right)^{1/2}=$$

$$=|A||F(0)|\sqrt{1+\left(\frac{|F'(0)|}{2\,|F(0)|}\right)^2}.$$

Следующая теорема является основным результатом данной статьи.

Теорема 1.3. *Пусть $h(z)$ – неотрицательная, непрерывная функция на $|z|=1$. Тогда*

$$\inf_{c_j}\left(\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|Ae^{-2ix}-\sum_{j=0}^{n}c_je^{ijx}\right|h(e^{ix})\right)=$$

$$=|A|\,|F(0)|\sqrt{1+\frac{1}{2}\left|\frac{F'(0)}{F(0)}\right|^2+\left|\frac{F'(0)}{F(0)}\right|\sqrt{1+\left|\frac{F'(0)}{2F(0)}\right|^2}}.$$

Заметим, что в Теореме 1.1 точность наилучшего приближения функции e^{-ix}, $x=[-\pi,\pi]$, аналитическими многочленами не зависит от параметра $1\le p\le\infty$. Однако для функции e^{-2ix} мы получаем разные величины для наилучшего приближения, когда $p=2$ и $p=\infty$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Приведём некоторые известные определения и вспомогательные результаты.

Определение 2.1. Обозначим через H^∞ пространство всех ограниченных аналитических функций $f(z)$ в $|z|<1$, с нормой

$$||f||_{H^\infty}=\sup_{|z|<1}|f(z)|.$$

Хорошо известна следующая теорема (см., например, [2], стр. 142).

Теорема 2.1. *Пусть $z_1,z_2,\cdots,z_n$ – точки в единичном круге (т.е. $|z_k|<1$, $k=1,\cdots,n$) и пусть $w_1,w_2,\cdots,w_n$ – произвольные комплексные числа. Тогда существует единственная функция $f(z)\in H^\infty$ с минимальной нормой, удовлетворяющая условиям $f(z_n)=w_n$, $n=1,2,\cdots,n$. Более того, эта функция допускает представление*

$$f(z)=CB(z)$$

где $B(z)$ – произведение Бляшке порядка не больше $n-1$ (т.е. оно содержит по крайней мере $n-1$ элементарных сомножителей Бляшке), а C – комплексное число.

Воспользуемся следующим, хорошо известным свойством дробно-линейных преобразований

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ac - bd \neq 0.$$

Известно, что если a_1, a_2, a_3, a_4 различные комплексные числа и w_1, w_2, w_3, w_4 их образы, т.е. $w(a_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, то

$$\frac{a_4 - a_1}{a_4 - a_2}\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} = \frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2}\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}. \tag{1}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.2. *Пусть $h(z)$ – неотрицательная непрерывная функция на $|z| = 1$, a_1 и a_2 – комплексные числа такие, что $|a_1| < 1$ и $|a_2| < 1$ и пусть A_1 и A_2 – произвольные комплексные числа. Тогда имеет место равенство*

$$\inf_{c_j}\left(\max_{|z|=1}\left|\frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} - \sum_{j=0}^{n} c_j z^j\right| h(z)\right) =$$

$$= \inf_{K\in H^\infty}\left\{\sup_{|z|=1}|K(z)|;\ K(a_1) = b_1,\ K(a_2) = b_2\right\},$$

где

$$b_1 = F(a_1)\frac{A_1}{1-|a_1|^2}\frac{a_1 - a_2}{1 - \bar{a}_2 a_1} \quad \text{и} \quad b_2 = F(a_2)\frac{a_2 - a_1}{1 - \bar{a}_1 a_2}\frac{A_2}{1-|a_2|^2}.$$

Доказательство. Очевидно, имеем

$$I = \inf_{c_j}\left(\max_{|z|=1}\left|\frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} - \sum_{j=0}^{n} c_j z^j\right| h(z)\right) =$$

$$= \inf_{c_j}\left(\max_{|z|=1}\left|\frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}\frac{z-a_2}{1-\bar{a}_2 z}\right|\left|\frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} - \sum_{j=0}^{n} c_j z^j\right| h(z)\right) =$$

$$= \inf_{P(z)\in H^\infty}\left(\max_{|z|=1}\left|\frac{A_1}{1-\bar{a}_1 z}\frac{z-a_2}{1-\bar{a}_2 z} + \frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}\frac{A_2}{1-\bar{a}_2 z} - \frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}\frac{z-a_2}{1-\bar{a}_2 z}P(z)\right| h(z)\right)$$

Обозначим через

$$f(z) = \frac{A_1}{1-\bar{a}_1 z}\frac{z-a_2}{1-\bar{a}_2 z} + \frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}\frac{A_2}{1-\bar{a}_2 z} - \frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}\frac{z-a_2}{1-\bar{a}_2 z}P(z),$$

аналитическую в единичном круге $|z| < 1$ функцию, где $P(z)$ – произвольная функция из H^∞.

Заметим, что независимо от выбора $P(z) \in H^\infty$, функция $f(z)$ удовлетворяет следующим условиям :

$$f(a_1) = \frac{A_1}{1-|a_1|^2}\frac{a_1-a_2}{1-\bar{a}_2 a_1} \quad \text{и} \quad f(a_2) = \frac{a_2-a_1}{1-\bar{a}_1 a_2}\frac{A_2}{1-|a_2|^2}.$$

Следовательно, имеем

$$I = \inf\left\{\max_{|z|=1}|f(z)|\,h(z); \quad f(a_1)=c_1, \quad f(a_2)=c_2\right\},$$

где

$$I = \inf_{K\in H^\infty}\left\{\max_{|z|=1}|K(z)|\,;\ K(a_1)=b_1,\ K(a_2)=b_2\right\}.$$

Доказательство основного результата. В предыдущей теореме подставим

$$a_1 = 0, \quad a_2 = a, \quad A_1 = -\frac{1}{a}, \quad A_2 = \frac{1}{a}.$$

Тогда имеем

$$I(a) = \inf_{c_j}\left(\max_{|z|=1}\left|\frac{1}{z(z-a)} - \sum_{j=0}^{n} c_j z^j\right| h(z)\right) =$$

$$= \inf_{K\in H(D)}\left\{\max_{|z|=1}|K(z)|\,;\ K(0)=F(0),\ K(a)=F(a)\frac{1}{1-|a|^2}\right\}.$$

Отметим, что функция $K(z) \in H^\infty$, на которой достигается нижняя грань, должна быть произведением Бляшке не выше первого порядка. Если она имеет нулевой порядок, тогда $K(z) = D = \text{const}$ и, следовательно,

$$D = K(0) = F(0) = K(a) = \frac{F(a)}{1-|a|^2}.$$

Это означает, что $I(a) = |F(0)|$ и

$$\frac{F(a)-F(0)}{a} = -\bar{a}F(0).$$

Если же порядок рассматриваемого произведения Бляшке равен 1, то $K(z)$ является дробно-линейным преобразованием, т.е.

$$K(z) = D\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1.$$

Поэтому обозначая

$$K(0) = F(0) = w_1 \quad \text{и} \quad K(a) = \frac{F(a)}{1-|a|^2} = w_2$$

получаем

$$K(0) = w_1 \quad K(a) = w_2 \quad K(\infty) = \frac{D^2}{\bar{w}_1} \quad K\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) = \frac{D^2}{\bar{w}_2}.$$

Из формулы (1), следует

$$\frac{1}{1-|a|^2} = \frac{D^2 - w_1\bar{w}_2}{D^2 - |w_2|^2} \frac{D^2 - w_2\bar{w}_1}{D^2 - |w_1|^2}.$$

После элементарных преобразований приходим к равенству

$$|a|^2 = \frac{D^2|w_2 - w_1|^2}{|D^2 - \bar{w}_1 w_2|^2}.$$

Далее, учитывая равенство $I(a) = |D|$, получаем

$$I^4 - (w + \bar{w} + R)I^2 + w\bar{w} = 0, \tag{2}$$

где

$$R = \frac{1}{\left(1-|a|^2\right)^2} \left|\frac{F(a)-F(0)}{a} + \bar{a}F(0)\right|^2$$

и

$$w = \frac{\bar{F}(0)F(a)}{1-|a|^2}.$$

Так как $I \geq \max\{|w_1|, |w_2|\}$, то I должен равняться наибольшему корню уравнения (2). Следовательно,

$$I(a) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(w + \bar{w} + R + \sqrt{(w+\bar{w}+R)^2 - 4w\bar{w}}\right)},$$

где

$$w + \bar{w} + R = \frac{\bar{F}(0)F(a) + F(0)\bar{F}(a)}{1-|a|^2} + \frac{1}{\left(1-|a|^2\right)^2}\left|\frac{F(a)-F(0)}{a} + \bar{a}F(0)\right|^2$$

и

$$4w\bar{w} = 4\frac{|F(0)|^2\,|F(a)|^2}{\left(1-|a|^2\right)^2}.$$

Переходя к пределу при $a \to 0$, получаем требуемый результат.

Abstract. The paper proves a new result similar to the well known theorems of G. Szego and A. Kolmogorov on the best approximation by analytic polynomials in weighted L^p spaces. Such results are essential in prediction theory for stationary processes. It is well known, that for one step prediction, the size of the best approximation is the same for all p. The paper proves that for two step prediction the best approximation sizes are different for $p = 2$ and $p = \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Koosis, Introduction to H^p Spaces, Cambridge University Press, 1980.
2. John B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Los Angeles, California, 1981.
3. А. Н. Колмогоров, Интерполяция и Экстраполяция Стационарных Процессов, Izvestia AN USSR, том 5, стр. 3 – 14, 1941.

Поступила 18 мая 2007