Известия НАН Армении. Математика, том 42, н. 4, 2007, стр. 67-76

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ БАНАХОВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПАКТНОГО ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННОГО ОПЕРАТОРАМИ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

И. М. КАРАХАНЯН И М. И. КАРАХАНЯН

Ереванской Государственный Университет
E-mail: *karakhan@ysu.am*

Аннотация. Данная работа посвящена описанию классической ситуации Петера-Вейля для случая операторов обобщенного сдвига, порожденной компактным топологическим пространством.

Пусть $BL(X)$ – банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве X. Далее будем предполагать, что на пространстве X задана сопряженно-билинейная форма $<,>$: $X \times X \to \mathbb{C}$. В этом случае пара $(X;<,>)$, где $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ и существует константа $k>0$, что для всех $(x,y \in X)$ имеет место неравенство $|\langle x,y\rangle| \le k\|x\|\|y\|$, называется самодвойственным банаховым пространством.

Если $(X,<,>)$ – самодвойственное банахово пространство, тогда операторы $S,T \in BL(X)$ называются взаимно-сопряженными (обозначим $T=S^*$), если для всех $x,y \in X$ имеет место $\langle Sx,y\rangle = \langle x,Ty\rangle$. Рассмотрим подалгебру

$$\mathcal{A} = BL(X;<,>) = \left\{S \in BL(X) : S \text{ которые имеют сопряженный } S^* \in BL(X)\right\}$$

Если ввести норму $\|S\|_{\mathcal{A}} = \max\{\|S\|, \|S^*\|\}$, где $\|\cdot\|$ – операторная норма в $BL(X)$, то норма $\|S\|_{\mathcal{A}}$ – алгебраическая норма и отображение $S \to S^*$ есть изометрическая инволюция в алгебре $\mathcal{A} = BL(X;<,>)$, которая является банаховой звездочно-нормированной алгеброй относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$.

Examples.

1) Если $X = H$ – комплексное гильбертово пространство, то H есть самодвойственное банахово пространство относительно скалярного произведения в H.
2) Пусть Ω – хаусдорфов компакт, $X = C(\Omega)$ и μ есть положительная конечная регулярная борелевская мера на Ω, с носителем Ω. Кроме того, пусть
$$\langle f,g\rangle = \int_\Omega f\overline{g}d\mu, \quad f,g \in C(\Omega).$$
Тогда пара $(C(\Omega);<,>)$ есть самодвойственное банахово пространство, где $k=\mu(\Omega)$ и
$$\mathcal{A} = BL(X;<,>) \neq BL(X)$$

есть банахова звездочно-нормированная алгебра.

Пусть Ω – хаусдорфов компакт и μ есть нигде не тривиальная положительная мера на Ω (для всякого открытого множества U $\mu(U) > 0$). Обозначим через $L^p(\Omega, \mathcal{A})$ пространство $\mathcal{A}$-значных функций $\mathcal{L}^p(\Omega; \mathcal{A})$, опрделенных с точностью до эквивалентности, где $(p = 1, 2)$. Тогда пространство $L^p(\Omega, \mathcal{A})$ есть банахово пространство [10] относительно нормы

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_\Omega \|f(t)\|^p_{\mathcal{A}} d\mu(t)}.$$

Предположим, что в линейных пространствах вектор-функций $L^p(\Omega; \mathcal{A})$, где $(p = 1, 2)$ определено семейство операторов $\tau^\Omega = \{\tau^s\}_{s\in\Omega}$, зависящих от элемента $s \in \Omega$. Таким образом, каждой вектор-функции $f(t) \in L^p(\Omega, \mathcal{A})$ ставится в соответствие вектор-функция от двух переменных $F(s, t) = \tau^s_t f(t)$.

Через $\tau^{+\Omega} = \{(\tau^+)^s\}_{s\in\Omega}$ обозначим совокупность “сопряженных"операторов, определенных равенством

$$\langle \tau^s f, g\rangle_{\mathcal{A}} = \int_\Omega \tau^s f(t) g(t)^* d\mu(t) = \int_\Omega f(t)((\tau^+)^s g(t))^* d\mu(t) = \langle f, (\tau^+)^s g\rangle_{\mathcal{A}}. \tag{1}$$

Везде в дальнейшем будем предполагать, что для семейства операторов τ^Ω выполняются следующие условия:

i) существует такой элемент $e \in \Omega$, что

$$\tau^e_t f(t) = f(t), \quad \tau^s_e f(t) = f(s),$$

ii) $\tau^\Omega \subset L(L^p(G, \mathcal{A}))$, т.е. имеет место линейность

$$\tau^s_t[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\tau^s_t f(t) + \beta\tau^s_t g(t),$$

iii) $\tau^r_s \tau^s_t f(t) = \tau^s_t \tau^r_t f(t)$ ассоциативность

iv) ограниченность операторов τ^Ω

$$\left(\int_\Omega \|\tau^s_t f(t)\|^p_{\mathcal{A}} d\mu(t)\right)^{1/p} \le K_p \left(\int_\Omega \|f(t)\|^p_{\mathcal{A}} d\mu(t)\right)^{1/p},$$

$$\left(\int_\Omega \|(\tau^+)^s_t f(t)\|^p_{\mathcal{A}} d\mu(t)\right)^{1/p} \le K^+_p \left(\int_\Omega \|f(t)\|^p_{\mathcal{A}} d\mu(t)\right)^{1/p},$$

где K_p и K^+_p не зависят от s и f,

v) непрерывность операторов τ^s, если $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A})$ и $s \in \Omega$, то для каждого ε $(\varepsilon > 0)$ можно указать такую окрестность U точки s, что если $s', s \in U$, то

$$\int_\Omega \left\|\tau^{s'}_t f(t) - \tau^s_t f(t)\right\|^p_{\mathcal{A}} d\mu(t) < \varepsilon^p,$$

$$\int_\Omega \left\|(\tau^+)^{s'}_t f(t) - (\tau^+)^s_t f(t)\right\|^p_{\mathcal{A}} d\mu(t) < \varepsilon^p.$$

Семейство операторов $\tau^\Omega \cup (\tau^+)^\Omega$, удовлетворящее всем вышеуказанным аксиомам, называют *операторами обобщенного сдвига* (ООС).

Отметим, что множество $C(\Omega, \mathcal{A})$ всех непрерывных вектор-функций плотно в $L^p(\Omega, \mathcal{A})$. Обозначим

$$\mathcal{D}(\Omega, \mathcal{A}) = \{f \in C(\Omega, \mathcal{A}) : \text{для которых } \tau^s f(t)|_{t=e} = f(s)\}$$

и будем предполагать, что всюду $dim\mathcal{D}(\Omega, \mathcal{A}) = \infty$.

Если в выражении $\tau^s f(t)$ рассматривать s как переменную, а t как параметр, то получим двойственное семейство операторов $\theta^\Omega = \{\theta^t\}_{t\in\Omega}$, где

$$\theta^t f(s) = \tau^s f(t). \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что θ^Ω есть ООС и

$$[\tau^s, \theta^t] = \tau^s\theta^t - \theta^t\tau^s = 0. \tag{3}$$

Определим сопряженные операторы $(\theta^+)^\Omega$ для семейства θ^Ω при помощи равенства:

$$\int_\Omega \theta^t f(s)g(s)^* d\mu(s) = \int_\Omega \tau^s f(t)g(s)^* d\mu(s) = \int_\Omega f(s)((\theta^+)^t g(s))^* d\mu(s). \tag{4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что для всякой вектор-функции $f \in L^2(\Omega, \mathcal{A})$ имеют место следующие два условия

$$(\tau^+)^r_s \tau^s f(t) = \tau^s_t (\tau^+)^r f(t), \tag{5}$$

$$(\theta^+)^r_s \tau^s f(t) = (\tau^+)^r \tau^s f(t). \tag{6}$$

Если семейство ООС τ^Ω есть еще коммутативное и нормальное семейство, т.е.

$$\tau^s_t \tau^r_t f(t) = \tau^r_t \tau^s_t f(t), \tag{7}$$

$$(\tau^+)^s_t \tau^r_t f(t) = \tau^r_t ((\tau^+)^s_t) f(t), \tag{8}$$

то семейство τ^Ω будем называть нормальными операторами обобщенного сдвига (НООС).

В пространстве $L^1(\Omega, \mathcal{A})$ рассмотрим "$\mathcal{A}$-значную свертку", порожденную ООС τ^Ω по формуле

$$(f * g)_\mathcal{A}(t) = \int_\Omega f(s)(\theta^+)^s g(t) d\mu(s) = \int_\Omega (\tau^+)^s f(t) g(s) d\mu(s). \tag{9}$$

Так как отображения $t \to h(t)$, где $h(t) \in L^1_\tau(\Omega)$ и $t \to a(t) = a \in \mathcal{A}$, где $a \in \mathcal{A}$ лежат в $L^1_\tau(\Omega, \mathcal{A})$, то $L^1_\tau(\Omega, \mathcal{A})$ есть $\mathcal{A}$ и $L^1_\tau(\Omega)$ – бимодули.

Ввиду того, что $L^1(\Omega) \subset L^1(\Omega, \mathcal{A})$, то ООС τ^Ω по формуле (9) индуцирует на пространстве $L^1(\Omega)$ обычную свертку и првращает ее в банахову алгебру, где

$$\|f\|_{1,\tau} = K_1 \int_\Omega |f(t)| d\mu(t).$$

и которую обозначим через $L^1_\tau(\Omega)$. Нетрудно видеть, что, что в групповой алгебре $L^1_\tau(\Omega)$ свертки, порожденные ООС τ^Ω и θ^Ω совпадают, т.е.

$$(f * g)_\tau(t) = \int_\Omega (\theta^+)^s f(t) g(s) d\mu(s) = \int_\Omega f(s)(\theta^+)^s g(t) d\mu(s) = (f * g)_\theta(t).$$

Таким образом, $L^1_\tau(\Omega) = L^1_\theta(\Omega)$, и, кроме того, получаем, что

$$\int_\Omega (\tau^+)^s f(t) d\mu(s) = \int_\Omega f(s) d\mu(s), \quad \int_\Omega (\theta^+)^s f(t) d\mu(s) = \int_\Omega f(s) d\mu(s), \tag{10}$$

т.е. мера μ инвариантна относительно ООС τ^Ω и θ^Ω. Отображение $f \to f^*$, где $f^*(s) = \overline{(\tau^+)^s f(e)}$ есть инволюция в алгебре $L^1_\tau(G)$. В силу инвариантности меры μ относительно ООС τ^Ω и θ^Ω имеем $\|f\|_{1,\tau} = \|f^*\|_{1,\tau}$, т.е. $L^1_\tau(\Omega)$ есть банахова звездочно-нормированная алгебра.

Пусть Ω – компактное пространство. Рассмотрим банахову алгебру $L^1_\tau(\Omega)$. Тогда $L^2_\tau(\Omega) \subset L^1_\tau(\Omega)$, и, если $f, g \in L^2_\tau(\Omega)$, то $f * g \in C(\Omega)$. Как и в [9] имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. *Для любой функции $f \in L^1_\tau(\Omega)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\varphi \in L^1_\tau(\Omega)$ такая, что*

$$\|f * \varphi - f\|_{1,\tau} < \varepsilon \quad \text{и} \quad \|\varphi * f - f\|_{1,\tau} < \varepsilon.$$

Доказательство: Пусть $U(e)$ есть окрестность нейтрального элемента $e \in \Omega$ и $\chi_U \in L^1_\tau(\Omega)$ есть неотрицательная функция, равная нулю вне $U(e)$ и удовлетворяющая условию

$$\int_\Omega \chi_U d\mu = 1. \tag{11}$$

Тогда

$$(\chi_U * f)(t) = \int_\Omega \chi_U(s)(\theta^+)^s f(t) d\mu(s). \tag{12}$$

Следовательно, из (11) и (12) имеем

$$\begin{aligned} \|\chi_U * f - f\|_{1,\tau} &= \left\| \int_\Omega \chi_U(s)[(\theta^+)^s f(t) - f(t)] d\mu(s) \right\|_{1,\tau} \\ &\le \int_\Omega \chi_U(s) \|(\theta^+)^s f - f\|_{1,\tau} d\mu(s) < \varepsilon \int_\Omega \chi_U(s) d\mu(s) < \varepsilon \end{aligned} \tag{13}$$

так как при подходящей окрестности $U(e)$ будем иметь $\|(\theta^+)^s f - f\|_{1,\tau} < \varepsilon$. Аналогично, $\|f * \chi_U - f\|_{1,\tau} < \varepsilon$.

Предложение 2. *Замкнутое подпространство $J \subset L^1_\tau(\Omega)$ является левым (или правым) идеалом в алгебре $L^1_\tau(\Omega)$ тогда и только тогда, когда J инвариантно относительно всех ООС τ^Ω (или θ^Ω).*

Доказательство: Пусть $U = U(e)$ – окрестность нейтрального элемента $e \in U$ и $\chi_U \in L^1_\tau(\Omega)$ – неотрицательная функция, как в предложении 1. Если J – левый идеал в алгебре $L^1_\tau(\Omega)$ и $f \in J$, то $\tau^{s_0}\chi_U * f \in J$. С другой стороны,

$$(\tau^{s_0}\chi_U * f)_\tau(t) = \int_\Omega \tau^{s_0}\chi_U(s)(\theta^+)^s f(t) d\mu(s) = (\chi_U * \tau^{s_0} f)(t),$$

поэтому $\chi_U * \tau^{s_0} f \in J$. Но так как $\chi_U * f \to f$, то $\chi_U * \tau^{s_0} f \to \tau^{s_0} f$, и, следовательно, $\tau^{s_0} f \in J$. Аналогично проверяется инвариантность правого идеала J относительно ООС θ^{Ω}.

Пусть $Z_\tau(\Omega) = Z(L^1_\tau(\Omega))$ есть центр групповой алгебры $L^1_\tau(\Omega)$. Тогда нетрудно видеть, что $f \in L^1_\tau(\Omega)$ принадлежит центру $Z_\tau(\Omega)$ тогда и только тогда, когда f почти всюду на $\Omega \times \Omega$ удовлетворяет условию $f(t) = (\theta^+)^s \tau^s f(t)$.

Легко видеть, что сумма и свертка двух функций из $Z_\tau(\Omega)$ также принадлежит $Z_\tau(\Omega)$.

Пусть $\{\mathcal{U}^\alpha\}$ – система всех попарно неэквивалентных унитарных неприводимых (и, следовательно, конечномерных) представлений компактного пространства Ω, порожденных ООС τ^{Ω}. Обозначим через χ_α характер представления $\mathcal{U}^\alpha$ и пусть $n_\alpha = dim\, \mathcal{U}^\alpha$. Тогда характер $\chi_\alpha \in Z_\tau(\Omega)$ и линейная оболочка характеров плотны в $Z_\tau(\Omega)$. Более того, эти характеры образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L^2_\tau(\Omega) \cap Z_\tau(\Omega)$. Свертка двух характеров при этом имеет следующий вид

$$\chi_\alpha * \chi_\beta = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{k(n_\beta)} \chi_\alpha,$$

где $k(n_\beta)$ – константа, зависящая от β. Полагая, что $\sigma_\alpha = k(n_\alpha)\chi_\alpha$, имеем нормированное условие свертывания

$$\sigma_\alpha * \sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta} \sigma_\alpha. \tag{14}$$

Пусть

$$J^{\langle\alpha\rangle}_\tau = \left\{ f \in L^1_\tau(\Omega) : f * \sigma_\alpha = f \right\}$$

Тогда $J^{\langle\alpha\rangle}_\tau$ есть конечномерный (и, следовательно, замкнутый), минимальный, симметричный, двусторонний идеал в групповой алгебре $L^1_\tau(\Omega)$, образованный линейными комбинациями матричных элементов представления $\mathcal{U}^\alpha$. Легко видеть, что каждый ненулевой минимальный, замкнутый, двусторонний идеал в алгебре $L^1_\tau(\Omega)$ совпадает с одним из идеалов $J^{\langle\alpha\rangle}_\tau$, и алгебра

$$L^1_\tau(\Omega) = \overline{\sum_\alpha J^{\langle\alpha\rangle}_\tau},$$

т.е. алгебра $L^1_\tau(\Omega)$ есть замкнутая прямая сумма замкнутых, минимальных, двусторонних идеалов $J^{\langle\alpha\rangle}_\tau$, причем $n^2_\alpha = dim\, J^{\langle\alpha\rangle}_\tau$.

Отметим, что если $(\mathcal{U}^\alpha_{i,j})^{n_\alpha}_{i,j=1}$ есть матрица представления $\mathcal{U}^\alpha$ в каком-нибудь ортогональном базисе, то тогда идеал $J^{\langle\alpha\rangle}_\tau$ есть линейная оболочка матричных элементов $(\mathcal{U}^\alpha_{i,j})^{n_\alpha}_{i,j=1}$. Заметим, что идеал $J^{\langle\alpha\rangle}_\tau$ изоморфен алгебре всех линейных операторов, действующих в пространстве представления $\mathcal{U}^\alpha$. Правило свертывания (14) порождает интегральные операторы

$$\Pi_\alpha : L^1_\tau(\Omega) \to Im(\Pi_\alpha) = J^{\langle\alpha\rangle}_\tau \tag{15}$$

действующие по формуле $\Pi_\alpha(f) = f * \sigma_\alpha$. Из соотношения (14) следует, что операторы Π_α есть проекторы, т.е. $\Pi_\alpha \Pi_\beta = \delta_{\alpha\beta} \Pi_\alpha$. Так как проекторы Π_α конечномерны, то, значит, и есть компактные операторы. Вышесказанное про идеалы

$J_\tau^{\langle\alpha\rangle}$ означает, что система проекторов $\{\Pi_\alpha\}$ полна, минимальна и тотальна, т.е.

$$L_\tau^1(\Omega) = \overline{\sum_\alpha Im(\Pi_\alpha)}, \quad J_\tau^{\langle\alpha\rangle} \cap \overline{\sum_{\beta\neq\alpha} J_\tau^{\langle\beta\rangle}} = \{0\}$$

для всех α и $\bigcap_\alpha Ker(\Pi_\alpha) = \{0\}$. Нетрудно видеть, что $[\Pi_\alpha, \tau^s] = 0$ и $[\Pi_\alpha, \theta^s] = 0$, т.е. система проекторов $\{\Pi_\alpha\}$ коммутирует с ООС τ^Ω и θ^Ω.

Пусть Ω – компактное пространство. Отображение $T : \Omega \to \mathcal{A} = BL(X, <, >)$, назовем *представлением Ω, порожденного ООС τ^Ω в банаховом пространстве* X, если $\tau^s T(t) = T(s)T(t)$. Как обычно, предполагаем, что отображение $(t, x) \to T(t)x$ есть непрерывное отображение $\Omega \times X \to X$. Одновременно заметим, что $(\tau^+)^s T(t) = T(s)^* T(t)$, $\theta^s T(t) = T(t)T(s)$, $(\theta^+)^s T(t) = T(t)T(s)^*$ и $T(e) = I$. Обозначим через $L(\tau)$ и $R(\theta)$ аналоги соответственно левого и правого регулярных представлений компактного пространства Ω в групповой алгебре $L_\tau^1(\Omega)$, определенные по формулам $R(\tau^s)f(t) = \tau^s f(t)$ и $L(\theta^s)f(t) = \theta^s f(t)$.

Так как

$$\begin{aligned}(\Pi_\alpha \tau^s)f(t) = \Pi_\alpha(\tau^s f)(t) &= \int_\Omega \tau^s f(\xi)(\theta^+)^\xi \sigma_\alpha(t) d\mu(\xi) \\ &= \int_\Omega \sigma_\alpha(t)\tau^s f(\xi)\overline{\sigma_\alpha(\xi)} d\mu(\xi) = \sigma_\alpha(t)\sigma_\alpha(s)\langle f, \sigma_\alpha\rangle\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(\tau^s \Pi_\alpha)f(t) = \tau_s(\Pi_\alpha f)(t) &= \tau^s \int_\Omega f(\xi)(\theta^+)^\xi \sigma_\alpha(t) d\mu(\xi) \\ &= \sigma_\alpha(s)\sigma_\alpha(t)\langle f, \sigma_\alpha\rangle,\end{aligned}$$

где

$$\langle f, \sigma_\alpha\rangle = \int_\Omega f(\xi)\overline{\sigma_\alpha(\xi)} d\mu(\xi).$$

то интегральные операторы Π_α коммутируют с ООС τ^Ω, т.е. $[\Pi_\alpha, \tau] = 0$. Аналогично можно убедиться в том, что $[\Pi_\alpha, \theta] = 0$. Отсюда следует, что $R(\tau)(J_\tau^{\langle\alpha\rangle}) \subset J_\tau^{\langle\alpha\rangle}$ и $L(\theta)(J_\tau^{\langle\alpha\rangle}) \subset J_\tau^{\langle\alpha\rangle}$.

Так как все представления топологических пространств Ω, порожденных ООС τ^Ω, предполагаются сильно непрерывными, то любое банахово представление компактного пространства Ω ограничено, в силу теоремы Банаха-Штейнгауса, т.е.

$$\sup_{t\in\Omega} \|T(t)\| < \infty.$$

Теорема 1. *Пусть $T : \Omega \to BL(X, <, >)$ есть представление компактного пространства Ω, порожденного ООС τ^Ω в банаховом пространстве X. Тогда ограниченные операторы*

$$P_\alpha = \int_\Omega \sigma_\alpha(t)T(t)d\mu(t) \tag{16}$$

образуют полную, минимальную, тотальную систему попарно аннулирующих проекторов, коммутирующих с представлением T так, что подпространства

$X_\alpha = Im(P_\alpha)$ инвариантны для представления T и

$$X = \overline{\sum_\alpha X_\alpha}. \tag{17}$$

Кроме того, любое инвариантное подпространство, на котором представление T эквивалентно $\mathcal{U}^\alpha$, содержится в X_α.

Доказательство: на групповой алгебре $L^1_\tau(\Omega)$ рассмотрим преобразование Фурье, порожденное представлением T по формуле

$$\hat{f} = \int_\Omega f(t)T(t)d\mu(t). \tag{18}$$

Оно является непрерывным гомоморфизмом алгебры $L^1_\tau(\Omega)$ в алгебру $BL(X, <,>)$, и $\|\hat{f}\| \le C\|f\|$, где $C = \sup\{\|T(t)\| : t \in \Omega\}$. В частности, $P_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha$, и, значит, в силу (14) имеем

$$P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha. \tag{19}$$

Так как проекторы P_α есть Фурье-образы функций σ_α и операторы $T(t)$ входят в сильное замыкание Фурье-образа $L^1_\tau(\Omega)$, то $[P_\alpha, T(t)] = 0$ для всех $t \in \Omega$.

Пусть $x \in X$. Рассмотрим непрерывный гомоморфизм $\mathcal{L}_x : L^1_\tau(\Omega) \to X$ по формуле $\mathcal{L}_x f = \hat{f}x$. Тогда $\mathcal{L}_x$ сплетает регулярное предсатвление $R(\tau)$ и данное представление T, т.е. $\mathcal{L}_x R(\tau^s) = T(s)^* \mathcal{L}_x$ и $\mathcal{L}_x R((\tau^+)^s) = T(s)\mathcal{L}_x$. Отсюда имеем, что $\mathcal{L}_x \sigma_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha x = P_\alpha x$.

Убедимся в полноте системы $\{P_\alpha\}$. В самом деле, пусть $\varphi \in X^*$ есть такой функционал, что $\varphi|_{X_\alpha} = 0$ при всех α. Рассмотрим произвольный элемент $x \in X$ и функцию $f \in L^1_\tau(\Omega)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x(f * \sigma_\alpha) &= (\widehat{f * \sigma_\alpha})(x) = \int_\Omega (f * \sigma_\alpha)(t)T(t)d\mu(t)x \\
&= \int_\Omega f(\xi)\left(\int_\Omega \sigma_\alpha(t)\theta^\xi T(t)d\mu(t)\right)d\mu(\xi)x \\
&= \int_\Omega f(\xi)\left(\int_\Omega \sigma_\alpha(t)T(t)T(\xi)d\mu(t)\right)d\mu(\xi)x \\
&= \int_\Omega \sigma_\alpha(t)T(t)d\mu(t)\int_\Omega f(\xi)T(\xi)d\mu(\xi)x = P_\alpha \hat{f}x = P_\alpha \mathcal{L}_x f.
\end{aligned}$$

Так как $\mathcal{L}_x : L^1_\tau(\Omega) \to X$, то $\mathcal{L}^*_x : X^* \to L^1_\tau(\Omega)^*$. Поэтому для каждого функционала $\psi \in X^*$ имеем

$$\mathcal{L}^*_x \psi(f * \sigma_\alpha) = \psi(\mathcal{L}_x(f * \sigma_\alpha)) = \psi(P_\alpha \mathcal{L}_x f) \tag{20}$$

. Ввиду того, что $\varphi|_{X_\alpha} = 0$, то в силу (20) функционал $\mathcal{L}^*_x\varphi$ также аннулируется на подпространствах $J^{\langle\alpha\rangle}_\tau$, и так как $L^1_\tau(\Omega) = \overline{\sum_\alpha J^{\langle\alpha\rangle}_\tau}$, то $\mathcal{L}^*_x\varphi = 0$. Так как $x \in \overline{Im(\mathcal{L}_x)}$, то $\varphi(x) = 0$ и, следовательно, $\varphi = 0$.

Покажем тотальность системы проекторов $\{P_\alpha\}$. Пусть элемент $x \in X$ такой, что для всех индексов α $P_\alpha x = 0$. Так как $\mathcal{L}_x(f * \sigma_\alpha) = 0$, то при каждом $\varphi \in X^*$ $\mathcal{L}^*_x = 0$ и, значит, $\mathcal{L}^*_x = 0$, т.е. $\mathcal{L}_x = 0$, тогда $\hat{f}x = 0$ для всех функций $f \in L^1_\tau(\Omega)$.

Так как сильное замыкание Фурье-образа групповой алгебры $L^1_\tau(\Omega)$ содержит единичный оператор (так как $\lim_{U(e)} \hat{\chi}_{U(e)} x = x$), то $x = 0$.

Наконец, пусть $Y \subset X$ есть инвариантное подпростанство для представления T такое, что $T|_Y \sim \mathcal{U}^\alpha$. Для каждого $x \in Y$ и каждого функционала $\varphi \in X^*$ функция $f(t) = \varphi(T(t)x)$ есть линейная комбинация системы матричных элементов $\{\mathcal{U}^\alpha_{i,j}(t)\}$, и поэтому

$$\varphi(P_\alpha x) = (\sigma_\alpha * f)(e) = (\Pi_\alpha f)(e) = f(e) = \varphi(x).$$

но тогда $x = P_\alpha x \in Im(P_\alpha) = X_\alpha$, и доказательство завершено.

Следствие 1. *Для каждого банахова представления $T : \Omega \to BL(X, <,>)$ компактного пространства Ω, порожденного ООС τ^Ω, система конечномерных подпредставлений образует полную систему.*

Напомним, что, если $T : \Omega \to BL(X, <,>)$ есть представление топологического пространства Ω в банаховом пространстве X, порожденном ООС τ^Ω, и вектор $x \in X$ $(x \neq 0)$ порождает одномерное инвариантное подпространство представления T, то $x \in X$ называется *весовым вектором.* Тогда $T(t)x = \chi(t)x$, где χ – одномерный комплексный характер пространства Ω, порожденный ООС τ^Ω, т.е. $\chi : \Omega \to \mathbb{C}^*$ и $\tau^s\chi(t) = \chi(s)\chi(t)$, где χ непрерывное отображение в мультипликативную группу C^* поля комплексных чисел. Отметим, что для каждого веса χ множествао всех весовых векторов, дополненных нулевым вектором, является подпространством, которое обозначим через X_χ, и называется *весовым подпространством, соответствующим весу* χ. Если характер χ такой, что $|\chi(t)| = 1$ при всех $t \in \Omega$, то характер χ называется *унитарным.* Все характеры компактного пространства, порожденные ООС τ^Ω являются униртарными.

Следствие 2. *Пространство X банахова представления $T : \Omega \to BL(X, <,>)$ компактного пространства Ω, порожденного семейством НООС τ^Ω, разлагается в замкнутую прямую сумму весовых подпространств, т.е. $X = \overline{\sum_\chi X_\chi}$.*

В случае, при котором Ω есть компактная группа, этот же рзультат был получен в [3] и [4].

В случае, когда $X = \mathcal{D}(\Omega)$ (см. [7]) и $T(s) = R(\tau^s)$ есть обобщение левого регулярного представления, порожденного ООС τ^s , мы из теоремы 3 получаем следующее

Следствие 3. *Пусть Ω – компактное пространство, тогда каждая функция $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ может быть равномерно аппроксимирована на Ω линейными комбинациями вида*

$$s_{\mathcal{N}}(t) = \sum_{\nu=1}^{\mathcal{N}} \sum_{i,j=1}^{\alpha_\nu} a^{(\alpha_\nu)}_{ij} \mathcal{U}^{\alpha_\nu}_{ij}(t) = \sum_{\nu=1}^{\mathcal{N}} tr(A^{\alpha_\nu}\mathcal{U}^{\alpha_\nu}(t)), \tag{21}$$

где $tr(B)$ – след матрицы B.

Доказательство: Беря в качестве представления $T(s) = R(\tau^s)$, мы получим систему взаимно аннулирующих проекторов

$$P_\alpha = \int_\Omega \sigma_\alpha(t) R(\tau^t) d\mu(t)$$

коммутирующих с представлением $R(\tau^t)$ и образующих полную, минимальную и тотальную систему. При этом,

$$\mathcal{D}(\Omega) = \overline{\sum_\alpha \mathcal{D}_\alpha}(\Omega),$$

где

$$\mathcal{D}_\alpha(\Omega) = \Im(P_\alpha) \subset \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{и} \quad dim\mathcal{D}_\alpha(\Omega) < \infty.$$

В случае, когда Ω – компактная группа и ООС τ^Ω есть обычный сдвиг (т.е. $\tau^s f(t) = f(ts)$), тогда $\mathcal{D}(\Omega) = C(\Omega)$ и, в силу теоремы 3, имеем

$$C(\Omega) = \overline{\sum_\alpha C_\alpha(\Omega)},$$

где

$$C_\alpha(\Omega) = Im(P_\alpha), \quad P_\alpha = \int_\Omega \sigma_\alpha(t) R(t) d\mu(t),$$

т.е. $L(t)$ есть левое регулярное представление компактной группы Ω в пространстве $C(\Omega)$. Тогда получается следующее

Следствие 4. *Каждая непрерывная функция f на компактной группе Ω равномерно на Ω приближается линейными комбинациями (21).*

Пусть Ω – компактная группа с инвариантной мерой Хаара μ и $\mathfrak{A}(\Omega)$ – некоторая компактная группа автоморфизмовΩ с инвариантной мерой Хаара ν. Тогда ООС Дельсарта

$$\tau^s f(t) = \int_{\mathfrak{A}(\Omega)} f(t \cdot a(s)) d\nu(a) \tag{22}$$

порождает левое регулярное представление $R(\tau^s)$, и мы получаем аппроксимационные теоремы типа следствий 6 и 7 для пространства Дельсарта

$$\mathcal{D}(\Omega) = \overline{\sum_\alpha \mathcal{D}_\alpha(\Omega)},$$

где $\mathcal{D}_\alpha(\Omega) = Im(P_\alpha)$ и

$$P_\alpha = \int_\Omega \sigma_\alpha(t) R(\tau^t) d\mu(t),$$

т.е.

$$P_\alpha f(s) = \int_\Omega \sigma_\alpha(t) \tau^t f(s) d\mu(t) = \int_{\mathfrak{A}(\Omega)} P_\alpha^{<a>} f(s) d\nu(a),$$

где

$$P_\alpha^{<a>} f(s) = \int_\Omega \sigma_\alpha(t) f(s \cdot a(t)) d\mu(t), \quad a \in \mathfrak{A}(\Omega).$$

Рассмотрим также такой важный случай ООС как гиперкомплексные системы. Если Ω – компактное пространство, то ООС τ^Ω определяется формулой

$$\tau^s f(t) = \int_\Omega f(\xi) d_\xi \mu(s, t, \xi), \tag{23}$$

где $\mu(s, t, E)$ – функция двух точек $s, t \in \Omega$ и борелевского множества $E \subset \Omega$, которая по E – регулярная мера. От меры μ мы, естественно, требуем, чтобы она была такой, что семейство операторов (23) было бы семейством ООС [8].

Как и выше, семейство ООС τ^{Ω}, задаваемое по формуле (23), порождает левое регулярное представление $L(\tau^s)$, которое при помощи системы проекторов $\{P_\alpha\}$ приводит к аппроксимационным теоремам типа следствий 6 и 7.

Если ООС τ^{Ω} – нормальное семейство, то тогда

$$\mathcal{D}(\Omega) = \overline{\sum_{\chi} \mathcal{D}_\chi},$$

где $\mathcal{D}_\chi(\Omega)$ есть весовые подпространства для регулярного представления $L(\tau^t)$. Отметим, что все вышеуказанные рассуждения можно привести и для правого регуляного представления $R(\tau^t) = L(\theta^t)$.

Abstract. The paper is devoted to description a version of the classical Peter-Weyl theory in the case of generalized shift operators generated by a compact topological space.

Список литературы

[1] Ю. И. Любич, "Почти-периодичность функций в спектральном анализе операторов", ДАН СССР **132** (3), 518-520 (1960).

[2] Ю. И. Любич, "Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора", УМН **18** (1(109)), 165-171, (1963).

[3] Ю. И. Любич, *Введение в теорию банаховых представлений групп*, Высш. школа, Харьков, 1985.

[4] М. Ю. Любич, Ю. И. Любич, "Почти-периодичность операторов полугрупп операторов и теория Перрона-Фробениуса", XV Зимняя Воронежская школа, 1987, Деп. ВИНИТИ, no. 5691).

[5] М. И. Караханян, "Почти-периодичность функций в спектральном анализе нормальных операторов", ДАН Арм. ССР **83**, 154-157 (1986).

[6] М. И. Караханян, "Об условиях полноты системы собственных векторов обобщенно нормального оператора", Ученые записки ЕГУ, (3(169)), 3-8 (1988).

[7] М. И. Караханян, "О спектральной теореме банахова представления компактной группы сдвигами Дельсарта", Ученые записки ЕГУ, (1), 20-27 (2000).

[8] Б. М. Левитан, *Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения*, ГИФМЛ, Москва, 1962).

[9] М. А. Наймарк, *Теория представлений групп*, Наука, Москва, 1976.

[10] Л. Шварц, *Анализ*, Мир, Москва, 1972.

Поступила 15 января 2007