

О РЯДАХ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

К. А. НАВАРСАДЯН И А. А. СТЕПАНЯН

Ереванский Государственный Университет
Институт математики, Национальная Академия Наук Армении
E-mail: knavasard@ysu.am, arpi_stepanyan@yandex.rue

Аннотация. В настоящей статье рассматриваются ряды по системе Хаара с условиями $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x) = \infty$ и $a_n \chi_n(x) \rightarrow 0$ почти всюду. Доказываются теоремы исправления и представления подрядами этого ряда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются ряды по системе Хаара

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x),$$

для которых почти всюду (п.в.):

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x) = \infty$$

и

$$(3) \quad a_n \chi_n(x) \rightarrow 0.$$

Напомним, что система Хаара на $[0, 1]$ определяется следующим образом: $\chi_1(x) = 1$ а для $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\chi_n(x) = \chi_k^i(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} & \text{если } \frac{i-1}{2^k} < x < \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{\frac{k}{2}} & \text{если } \frac{2i-1}{2^{k+1}} < x < \frac{i}{2^k}, \\ 0 & \text{если } x \notin \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right]. \end{cases}$$

Значения функций Хаара в точках разрыва для наших целей не существенны, и мы их не приводим. Как обычно, положим $\Delta_n = \text{supp} \chi_n$. Ясно, что если $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то $\Delta_n = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right]$.

В настоящей работе важную роль играют следующие теоремы, доказанные Ф. Г. Арутюняном [1] и (для маргиналов) Ганди [2] (см. также [3]).

Теорема 1. Если

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n \chi_n(x) < \infty, \quad x \in E, \quad \mu E > 0,$$

то ряд (1) сходится п.в. на E к конечной п.в. функции.

Теорема 2. Для того, чтобы ряд (1) сходился п.в. на множестве $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x)$ была конечна для почти всех $x \in E$.

Ряды по системе Хаара с условиями (2) и (3), были рассмотрены в работе Г. М. Мушегяна [4], где, в частности, доказана

Теорема 3. Если для почти всех $x \in [0, 1]$ выполняются (2) и (3), то ряд (1) является универсальным относительно перестановок в классе измеримых (не обязательно конечных) функций в смысле сходимости п.в.

Напомним, что ряд

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

называется *универсальным* относительно перестановок в некотором классе измеримых функций S , если для любой функции $F \in S$ члены ряда (4) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходил к F . Ряд (4) называется универсальным в классе S относительно подрядов, если для любой функции $F \in S$ существует последовательность $\{\delta_n\}$, $\delta_n = 0$ или 1, для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n f_n(x)$ сходится к $F(x)$.

Методами работы [4] можно установить, что ряд (1), п.в. удовлетворяющий условиям (2) и (3), является универсальным относительно подрядов в смысле сходимости п.в. в классе п.в. конечных измеримых функций.

В работе А. А. Талаляна [5] было установлено существование ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, где $\{\varphi_n(x)\}$ – произвольный базис пространства L^p , который универсален относительно перестановок в смысле сходимости по мере и в смысле суммируемости п.в. методами Чезаро положительного порядка. Об исследованиях универсальных ортогональных рядов можно узнать в работах [6] и [7].

В настоящей работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 4. Пусть для почти всех $x \in [0, 1]$ выполняются (2) и (3). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 1 - \varepsilon$, такое, что для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ существует $g \in L^1(0, 1)$ такая, что $g(x) = f(x)$, $x \in E$, а ряд Фурье-Хаара функции g является подрядом ряда (1), т.е. существуют числа $\delta_n = 0$ или 1 такие, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n a_n \chi_n(x)$ сходится к функции g в метрике $L^1(0, 1)$.

Теорема 5. Пусть для почти всех $x \in [0, 1]$ выполняются (2) и (3). Тогда для любого $p \in (0, 1)$ ряд (1) является универсальным относительно подрядов в классе $L^p(0, 1)$, в смысле сходимости пространства $L^p(0, 1)$.

Рассмотрим такие подсистемы $\{\chi_{n_k}(x)\}$ системы Хаара, для которых

$$(5) \quad \mu \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} \Delta_{n_k} \right) = 1.$$

Очевидно, что если для $\{\chi_{n_k}(x)\}$ не удовлетворяется условие (5), то она не полна по мере, т.е. (5) является необходимым условием для представления функций рядами по системе $\{\chi_{n_k}(x)\}$. Ясно также, что если условие (5) не выполняется, и положить $a_n = 0$ для $n \notin \{n_k\}$, то не выполнится и (2).

Нетрудно установить, что если (5) выполняется, то числа a_{n_k} можно выбрать так, чтобы условие (2) также выполнялось. При этом, a_{n_k} можно подобрать монотонными, т.е. $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$. Действительно, из (5) следует существование чисел N_k , $N_k < N_{k+1}$ таких, что

$$\mu \left(\bigcup_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \Delta_{n_k} \right) > 1 - 2^{-i}.$$

Ясно, что для любого j имеет место

$$\mu \left(\bigcap_{i=j}^{\infty} \bigcup_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \Delta_{n_k} \right) > 1 - 2^{1-j},$$

и, следовательно, множество

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} \bigcup_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \Delta_{n_k}$$

имеет меру 1. Положим $a_{n_k} = \frac{1}{\sqrt{i \cdot n_k}}$ если $N_i < k \leq N_{i+1}$. Очевидно, что последовательность $\{a_{n_k}\}$ монотонная. Пусть $x \in E$. Тогда для некоторого j точка x принадлежит

$$\bigcap_{i=j}^{\infty} \bigcup_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \Delta_{n_k}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^2 \chi_{n_k}^2(x) \geq \sum_{i=j}^{\infty} \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} a_{n_k}^2 \chi_{n_k}^2(x) \geq \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \infty.$$

Пусть $\{\psi_n\}$ – нормированный базис в банаховом пространстве B , а система $\{\psi_n^*\}$ биортогональная к $\{\psi_n\}$. Для любого $\psi \in B$ и $m = 1, 2, \dots$ сумма

$$G_m(\psi) = \sum_{n \in A} \psi_n^*(\psi) \psi_n$$

определяется по следующему правилу. Пусть A – подмножество натуральных чисел, $\text{card } A = m$ со свойством $|\psi_n^*(\psi)| \geq |\psi_k^*(\psi)|$, если $n \in A$ и $k \notin A$. Если

$G_m(\psi)$ в норме пространства B сходится к ψ , то говорят гриди алгоритм для ψ сходится. Подробнее о гриди алгоритме и гриди базисе можно узнать из работ [8], [9] и [10].

Здесь сформулируем два следствия из теоремы 4. Известно (см. [12]), что если последовательность a_n монотонно стремится к нулю и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$, то ряд (1) удовлетворяет условию (2). Если, кроме того, $a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, когда $n \rightarrow \infty$, то ряд (1) будет удовлетворять также условию (3).

Теорема 6. Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 1 - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ существует $g \in L^1(0, 1)$, которая совпадает с f на E и гриди алгоритм которой сходится.

Действительно, для этого достаточно в теореме 4 положить $a_n = \frac{1}{\sqrt{n \ln(n+1)}}$. Здесь отметим, что если $f \in L^1(0, 1)$, то $G_m(f)$ необязательно сходится (см. [11]). Поэтому в теореме 6, “исправление” функции f вне множества E по существу.

Теорема 7. Для любой подсистемы $\{\chi_{n_k}\}$ системы Хаара с условием (5) существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{n_k}(x)$ с $a_k \downarrow 0$ такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$, $\mu E > 1 - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ существует $g \in L^1(0, 1)$, которая совпадает с f на E и ряд Фурье-Хаара имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k a_{n_k} \chi_{n_k}(x)$, где $\delta_k = 0$ или 1.

Теоремы 6 и 7 исправляют результаты из [13].

Ниже мы будем пользоваться обозначениями: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $C, C_1, \dots$ – абсолютные постоянные,

$$\|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p dx, \quad p \in (0, 1].$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. Пусть для почти всех $x \in [0, 1]$ выполняются (2) и (3). Тогда для любых чисел $l \neq 0$, $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$, $N \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1]$ и для любого двоичного интервала $\Delta \subset [0, 1]$ существуют числа $\delta_n = 0$ или 1, $M \in \mathbb{N}$ и множество $E \subset \Delta$ такие, что

- 1) $P(x) = \sum_{n=N_0}^M \delta_n a_n \chi_n(x) = 0$, если $x \notin \Delta$,
- 2) $|P(x) - l| < \delta$, если $x \in E$,
- 3) $\mu E > (1 - \varepsilon)\mu\Delta$,
- 4) $\|P\|_p \leq C|l|^p \mu\Delta$,
- 5) $\sup_{N \leq m \leq M} \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right|^p dx \leq C \left(\frac{|l|}{\varepsilon} \right)^p \mu\Delta$,
- 6) $\int_{\Delta} |P(x) - l|^p dx \leq (\delta^p + \varepsilon^{1-p} C |l|^p) \mu\Delta$.

Доказательство: Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x) = \infty$ для почти всех $x \in [0, 1]$. Тогда, согласно теореме 2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ п.в. расходится. В силу теоремы 1 для почти всех x имеем

$$(6) \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_n \chi_n(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_n \chi_n(x) = -\infty$$

Пусть $l \neq 0$, $\delta \in (0, 1)$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ – некоторые числа. Поскольку $a_n \chi_n(x) \rightarrow 0$ п.в., существуют множество $E_0 \subset \Delta$ и число $N_0 \in \mathbb{N}$, $N_0 \geq N$ такие, что

$$(7) \quad \mu E_0 > \left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right) \mu \Delta, \quad \mu \Delta_n < \mu \Delta \quad \text{для} \quad n \geq N_0,$$

$$(8) \quad |a_n \chi_n(x)| < \delta_1 \quad \text{если} \quad x \in E_0 \quad \text{и} \quad n > N_0,$$

где $\delta_1 = \min\{\delta/2, |l|/2\}$. Без ограничения общности будем считать, что (6) выполняется для всех $x \in E_0$.

На Δ определим функцию $\tau(x)$ следующим образом. Если для всех $M \in \mathbb{N}$ и $t \in \Delta_M$ с $x \in \Delta_M$ имеет место

$$\sum_{n=N_0}^M a_n \chi_n(t) \in \left[-\frac{4l}{\varepsilon}, l\right]$$

, то $\tau(x) = +\infty$ (в случае отрицательного l под $[-\frac{4l}{\varepsilon}, l]$ подразумеваем $[l, -\frac{4l}{\varepsilon}]$). В противном случае $\tau(x)$ равно наименьшему M , при котором $x \in \Delta_{M+1}$ и для

некоторого $t \in \Delta_{M+1}$ выполняется $\sum_{n=N_0}^M a_n \chi_n(t) \notin [-\frac{4l}{\varepsilon}, l]$. Из (6) следует, что

$\{x : \tau(x) = +\infty\}$ имеет меру нуль и не пересекается с множеством E_0 .

Легко видеть, что при $j = N_0, N_0 + 1, \dots$ множество $e_j = \{x : \tau(x) = j\} \subset \Delta$ либо пусто, либо совпадает с $\Delta_{j+1} = \text{supp} \chi_{j+1}$. Поэтому для любого $n > j + 1$ интервалы Δ_n и e_j либо не пересекаются, либо $\Delta_n \subset e_j$. Положим $\delta_n = 0$, если $\Delta_n \cap \Delta = \emptyset$ или $\Delta_n \subset e_j$ для некоторого j или $n < N_0$, и $\delta_n = 1$ в противном случае.

Пусть $x \in E_0$, тогда из (6) и определения функции $\tau(x)$ следует, что $x \in e_j$ для некоторого $j \geq N$. Следовательно,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \delta_n a_n \chi_n(x) = \sum_{n=N_0}^j a_n \chi_n(x).$$

Но $\sum_{n=N_0}^j a_n \chi_n(x)$ на $e_j = \Delta_{j+1}$ постоянная и для некоторого $x' \in e_j$ имеет место

$$\sum_{n=N_0}^{j+1} a_n \chi_n(x') \notin \left[-\frac{4l}{\varepsilon}, l\right].$$

Следовательно, в силу (8) и определения функции $\tau(x)$, для любого $x \in E_0$ либо

$$(9) \quad \left| \sum_{n=N}^{\infty} \delta_n a_n \chi_n(x) - l \right| < \delta_1$$

либо

$$(10) \quad \left| \sum_{n=N}^{\infty} \delta_n a_n \chi_n(x) + \frac{4l}{\varepsilon} \right| < \delta_1.$$

Более того, для любого $M \geq N_0$

$$(11) \quad \sum_{n=N}^M \delta_n a_n \chi_n(x) \in \left[-\frac{4l}{\varepsilon}, l \right] \quad \text{для всех } x \in \Delta$$

и

$$\sum_{n=N}^M \delta_n a_n \chi_n(x) = 0 \quad \text{если } x \notin \Delta.$$

Из (7), (9) и (10) следует, что существуют измеримое множество E_1 и число $M \in \mathbb{N}$ такие, что

$$(12) \quad E_1 \subset E_0, \quad \mu E_1 > \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \mu \Delta,$$

а для полинома $P(x) = \sum_{n=N}^M \delta_n a_n \chi_n(x)$ и любого $x \in E_1$ выполняется либо

$$(13) \quad |P(x) - l| < 2\delta_1 \leq \delta$$

либо

$$(14) \quad \left| P(x) + \frac{4l}{\varepsilon} \right| < 2\delta_1 \leq \delta.$$

Положим $E = \{x \in E_1 : |P(x) - l| < 2\delta_1\}$. Поскольку

$$\int_0^1 P(x) dx = \sum_{n=N}^M \delta_n a_n \int_0^1 \chi_n(x) dx = 0,$$

то с учетом (11)-(14) получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 P(x) dx = \int_{\Delta} P(x) dx = \int_{\Delta \setminus E_1} P(x) dx + \int_E P(x) dx \\ &+ \int_{E_1 \setminus E} P(x) dx \leq \frac{4|l|}{\varepsilon} \mu(\Delta \setminus E_1) + |l| \mu E + \left(-\frac{4|l|}{\varepsilon} + 2\delta_1 \right) \mu(E_1 \setminus E) \\ &\leq (2|l| + 2\delta_1) \mu \Delta - \frac{4|l|}{\varepsilon} \mu(E_1 \setminus E) \leq 3|l| \mu \Delta - \frac{4|l|}{\varepsilon} \mu(E_1 \setminus E). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(15) \quad \mu(E_1 \setminus E) \leq \frac{3\varepsilon}{4} \mu \Delta.$$

Очевидно, что полином $P(x)$ и множество E удовлетворяют условиям 1) - 3) и 5) леммы 1 (см. (11)-(15)). Ясно, что если $x \in E$, то $|P(x)| \leq |l|$. Поэтому (см. также (11), (12) и (15))

$$\int_0^1 |P(x)|^p dx = \int_E |P(x)|^p dx + \int_{\Delta \setminus E} |P(x)|^p dx$$

$$\leq |l|^p \mu E + \left(\frac{4|l|}{\varepsilon} \right)^p \mu(\Delta \setminus E) \leq |l|^p \mu \Delta + \left(\frac{4|l|}{\varepsilon} \right)^p \mu \Delta \leq 5^p |l|^p \mu \Delta$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} |P(x) - l|^p dx &\leq \int_E |P(x) - l|^p dx + \int_{\Delta \setminus E} |P(x) - l|^p dx \\ &\leq \delta^p \mu E + \left(\left(\frac{4|l|}{\varepsilon} \right)^p + |l|^p \right) \varepsilon \mu \Delta \leq (\delta^p + 5^p |l|^p \varepsilon^{1-p}) \mu \Delta. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x) = \infty, \quad a_n \chi_n(x) \rightarrow 0 \text{ п.в. на } [0, 1],$$

а $f(x) = \sum_{k=1}^j l_k \chi_{I_k}(x)$ – ступенчатая функция, определенная на $[0, 1]$, где $\{I_k\}_{k=1}^j$ – непересекающиеся двоичные интервалы. Тогда для любых чисел $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\delta \in (0, 1)$ существуют функция $g \in L^1(0, 1)$, измеримое множество $E \subset [0, 1]$ и полином

$$P(x) = \sum_{n=N}^M \delta_n a_n \chi_n(x), \quad \text{где } \delta_n = 0 \text{ или } 1,$$

которые удовлетворяют условиям:

- 1) $\mu E > 1 - \varepsilon$,
- 2) $g(x) = f(x)$ для всех $x \in E$,
- 3) $\|g - P\|_1 < \delta$,
- 4) $\|g\|_1 \leq C \|f\|_1$,
- 5) $\sup_m \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right| dx \leq C \|f\|_1$.

Доказательство: Пусть $f(x) = \sum_{k=1}^j l_k \chi_{I_k}(x)$ – ступенчатая функция, $\varepsilon \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$ и $N \in \mathbb{N}$ – некоторые числа. Без ограничения общности будем считать, что

$$(16) \quad \frac{C|l_k| \mu I_k}{\varepsilon} < \|f\|_1, \quad k = 1, 2, \dots, j,$$

где C – постоянная из леммы 1 (в противном случае интервалы I_k представим в виде объединения двоичных интервалов, для которых выполняются условия (16)).

В силу леммы 1, для любого $k = 1, 2, \dots, j$ существуют полином $P_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n \chi_n(x)$ с $N_1 = N$ и измеримое множество $E_k \subset I_k$, удовлетворяющие условиям:

$$(17) \quad \mu E_k > (1 - \varepsilon) \mu I_k,$$

$$(18) \quad P_k(x) = 0 \quad \text{если} \quad x \notin I_k,$$

$$(19) \quad |P_k(x) - l_k| < \delta \quad \text{если} \quad x \in E_k,$$

$$(20) \quad \int_0^1 |P_k(x)| dx < C |l_k| \mu I_k,$$

$$(21) \quad \sup_{m < N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^m a_n \delta_n \chi_n(x) \right| dx \leq C \frac{|l_k|}{\varepsilon} \mu I_k.$$

Положим

$$(22) \quad P(x) = \sum_{k=1}^j P_k(x) = \sum_{n=N}^M \delta_n a_n \chi_n(x), \quad E = \bigcup_{k=1}^j E_j,$$

$$(23) \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{если} \quad x \in E \\ P(x) & \text{если} \quad x \in [0, 1] \setminus E \end{cases}$$

Условия 1) -3) немедленно следуют из (17)-(19), (22) и (23). Из (22), (23) и (20) получаем

$$\begin{aligned} \|g\|_1 &= \int_E |f(x)| dx + \int_{[0,1] \setminus E} |P(x)| dx \\ &\leq \|f\|_1 + \sum_{k=1}^j \int_0^1 |P_k(x)| dx \leq \|f\|_1 + \sum_{k=1}^j C |l_k| \mu I_k = (C+1) \|f\|_1. \end{aligned}$$

Пусть

$$\sup_m \int_{[0,1]} \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right| dx = \int_{[0,1]} \left| \sum_{n=N}^{m_0} \delta_n a_n \chi_n(x) \right| dx$$

и $N_k < m_0 \leq N_{k+1}$. Тогда, учитывая (20), (21) и (16), получим

$$\begin{aligned} \sup_m \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right| dx &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{k-1} |P_i(x)| dx + \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{m_0} \delta_n a_n \chi_n(x) \right| dx \\ &\leq C \sum_{i=1}^{k-1} |l_i| \mu I_i + C \frac{|l_k|}{\varepsilon} \mu I_k \leq (C+1) \|f\|_1. \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть для почти всех $x \in [0, 1]$ выполняются (2) и (3) и

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^j l_k \chi_{I_k}(x)$$

– ступенчатая функция на $[0, 1]$, где $\{I_k\}_{k=1}^j$ – непересекающиеся двоичные интервалы. Тогда для любых чисел $N \in \mathbb{N}$, $q \in (0, 1)$ и $\alpha > 0$ существует полином

$$P(x) = \sum_{n=N}^M \delta_n a_n \chi_n(x), \quad \text{где} \quad \delta = 0 \quad \text{или} \quad 1,$$

удовлетворяющий условиям:

1. $\int_{[0,1]} |\varphi - P|^q dx < \alpha,$
2. $\sup_m \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right|^q dx < 2 \int_0^1 |\varphi|^q dx.$

Доказательство: Пусть $\varphi(x)$ – ступенчатая функция, $N \in \mathbb{N}$, $q \in (0, 1)$ и $\alpha > 0$ – некоторые числа. Выберем положительные числа δ и ε так, чтобы

$$(24) \quad \delta^q + C\varepsilon^{1-q}|l_k|^q < \alpha, \quad k = 1, 2, \dots, j,$$

где C – постоянная из леммы 1. Без ограничения общности будем считать, что для всех $k = 1, 2, \dots, j$

$$(25) \quad C \left(\frac{|l_k|}{\varepsilon} \right)^q \mu I_k < \|\varphi\|_q.$$

В противном случае интервалы I_k представим в виде объединения двоичных интервалов, для которых выполняются (25).

Согласно лемме 1, для любого $k = 1, 2, \dots, j$ существует полином

$$P_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n \chi_n(x) \quad (N_1 = N),$$

удовлетворяющий условиям

$$(26) \quad P_k(x) = 0 \quad \text{если} \quad x \notin I_k,$$

$$(27) \quad \int_{I_k} |P_k(x) - l_k|^q dx \leq (\delta^q + C\varepsilon^{1-q}|l_k|^q) \mu I_k,$$

$$(28) \quad \|P_k\|_q \leq C|l_k|^q \mu I_k,$$

$$(29) \quad \sup_{N_k < m \leq N_{k+1}} \int \left| \sum_{n=N_k}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right|^q dx \leq C \left(\frac{|l_k|}{\varepsilon} \right)^q \mu I_k$$

(в случае $l_k = 0$ положим $P_k(x) \equiv 0$). Положим

$$(30) \quad P(x) = \sum_{k=1}^j P_k(x) = \sum_{n=N}^M \delta_n a_n \chi_n(x).$$

Из (30), (27), (26) и (24) получим

$$\int_{[0,1]} |P(x) - \varphi(x)|^q dx \leq \sum_{k=1}^j \int_{I_k} |P_k(x) - l_k|^q dx \leq \sum_{k=1}^j \alpha \mu I_k = \alpha.$$

Пусть

$$\sup_{m \leq M} \int_{[0,1]} \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right|^q dx = \int_{[0,1]} \left| \sum_{n=N}^{m_0} \delta_n a_n \chi_n(x) \right|^q dx$$

и $N_i < m_0 \leq N_{i+1}$, тогда из (26), (28) и (29) следует

$$\begin{aligned} \sup_{m \leq M} \int_{[0,1]} \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right|^q dx &= \sum_{k=1}^{i-1} \|P_k\|_q^q + \int_{[0,1]} \left| \sum_{n=N_i}^{m_0} \delta_n a_n \chi_n(x) \right|^q dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{i-1} C |l_k|^q \mu I_k + C \left(\frac{|l_i|}{\varepsilon} \right)^q \mu I_i. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (25) получим

$$\sup_{m \leq M} \int_{[0,1]} \left| \sum_{n=N}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right|^q dx < 2 \|\varphi\|_q^q.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

3.1. Доказательство теоремы 4. Пусть η_k – монотонная последовательность положительных чисел с условием

$$(31) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < +\infty.$$

Рассмотрим последовательность всех ступенчатых функций $\{f_n(x)\}$

$$(32) \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{M_n} \alpha_k^{(n)} \chi_{I_k^{(n)}}(x)$$

с рациональными значениями $\alpha_k^{(n)}$ и двоичными интервалами постоянства $I_k^{(n)}$.

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ – произвольное число. В силу леммы 2 для каждой функции $f_k(x)$ из последовательности (32), $k = 1, 2, \dots$, существуют функция $g_k \in L^1(0, 1)$, измеримое множество $E_k \subset [0, 1]$ и полином $P_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n \chi_n(x)$ (где $\delta_n = 0$ или 1), удовлетворяющие условиям

$$(33) \quad \mu E_k > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k},$$

$$(34) \quad g_k(x) = f_k(x) \quad \text{если} \quad x \in E_k,$$

$$(35) \quad \|g_k - P_k\|_1 < \eta_k,$$

$$(36) \quad \|g_k\|_1 \leq C \|f_k\|_1,$$

$$(37) \quad \sup_{N_k < m \leq N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right| dx \leq C \|f_k\|_1.$$

Обозначим

$$(38) \quad E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Из (33) и (38) следует, что $\mu E > 1 - \varepsilon$.

Пусть $f \in L^1(0, 1)$. Из последовательности (32) выберем такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, чтобы выполнялось

$$(39) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \sum_{m=1}^k f_{n_m}\|_1 = 0$$

и

$$(40) \quad \|f_{n_k}\|_1 \leq \eta_k, \quad k \geq 2.$$

Положим $\varphi_1(x) = g_{n_1}(x)$ и

$$Q_1(x) = P_{n_1}(x) = \sum_{n=N_{n_1}}^{N_{n_1}+1} \delta_n a_n \chi_n(x).$$

Допустим уже определены функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{k-1}(x)$ и полиномы $Q_1(x), \dots, Q_{k-1}(x)$, удовлетворяющие условиям

$$(41) \quad \begin{aligned} \varphi_i(x) &= f_{n_i}(x), \quad x \in E, \quad 1 \leq i \leq k-1, \\ \int_0^1 \sum_{i=1}^{k-1} |Q_i(x) - \varphi_i(x)| dx &< 2\eta_k. \end{aligned}$$

Выберем ступенчатую функцию f_{m_k} ($m_k > m_{k-1}$, $m_1 = n_1$) из (32) такую, что

$$(42) \quad \left\| f_{m_k} - \left(f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right) \right\|_1 < \eta_k.$$

Согласно (40) и (41) имеем, что

$$(43) \quad \left\| f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \leq 3\eta_k.$$

Из (42) и (43) получим

$$(44) \quad \|f_{m_k}\|_1 \leq 4\eta_k.$$

Положим

$$(45) \quad \varphi_k(x) = f_{n_k}(x) + (g_{m_k}(x) - f_{m_k}(x)),$$

$$(46) \quad Q_k(x) = P_{m_k}(x) = \sum_{n=N_{m_k}+1}^{N_{m_k}+1} \delta_n a_n \chi_n(x).$$

Ясно, что (см. (45) и (34))

$$(47) \quad \varphi_k(x) = f_{n_k}(x), \quad \text{если } x \in E \subset E_{m_k}.$$

Поэтому, из (45), (42), (36), (44) и (41) получим

$$\begin{aligned}
 \|\varphi_k\|_1 &\leq \|f_{n_k} - f_{m_k}\|_1 + \|g_{m_k}\|_1 \\
 &\leq \left\| f_{m_k} - \left(f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right) \right\|_1 + \|g_{m_k}\|_1 + \left\| \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \\
 (48) \quad &\leq \eta_k + 4C\eta_k + 2\eta_k = (3 + 4C)\eta_k = C_1\eta_k.
 \end{aligned}$$

С учетом, (45), (42) и (35) получим

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{i=1}^k (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 &= \left\| P_{m_k} + f_{m_k} - g_{m_k} - f_{n_k} + \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \\
 (49) \quad &\leq \left\| f_{m_k} - \left(f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right) \right\|_1 + \|P_{m_k} - g_{m_k}\|_1 \leq 2\eta_k.
 \end{aligned}$$

Из (37) и (44) следует, что

$$(50) \quad \sup_{N_k < m \leq N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_{m_k}+1}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right| dx \leq C \|f_{m_k}\|_1 \leq 4C\eta_k.$$

Таким образом, по индукции определяются последовательности функций $\{\varphi_k(x)\}$ и полиномов $\{Q_k(x)\}$, удовлетворяющие условиям (47)-(50).

Положим

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \\
 (51) \quad \delta'_n &= \begin{cases} \delta_n, & \text{если } N_{m_k} + 1 \leq n \leq N_{m_{k+1}} \text{ для некоторого } k, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta'_n a_n \chi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x).$$

Из (48), (31), (47) и (39) следует, что $g \in L^1(0, 1)$ и $g(x) = f(x)$ когда $x \in E$.

Пусть N – любое натуральное число, тогда для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеет место $N_{m_k} + 1 \leq N < N_{m_{k+1}}$. Следовательно, с учетом, (48)-(51) получим

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{n=1}^N \delta'_n a_n \chi_n(x) - g \right\|_1 &\leq \left\| \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \\
 &\quad + \left\| \sum_{i=k}^{\infty} \varphi_i \right\|_1 + \left\| \sum_{n=N_{m_k}+1}^N \delta'_n a_n \chi_n(x) \right\|_1 \\
 &\leq 2\eta_{k-1} + C_1 \sum_{i=k}^{\infty} \eta_i + 4C\eta_k \leq C_2 \sum_{i=k-1}^{\infty} \eta_i.
 \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (31) получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta'_n a_n \chi_n(x)$ в метрике L^1 сходится к $g(x)$. Теорема 4 доказана.

3.2. Доказательство теоремы 5. Пусть $p \in (0, 1)$ – произвольное число, а $\{\alpha_n\}$ – последовательность положительных чисел, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. В силу леммы 3 для каждой функции $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ из последовательности (32) существует полином

$$P_k(x) = \sum_{N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n \chi_n(x),$$

где $\delta_n = 0$ или 1, удовлетворяющий условиям

$$(52) \quad \|f_k - P_k\|_p < \alpha_k,$$

$$(53) \quad \sup_{N_k < m \leq N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right|^p dx < 2\|f_k\|_p.$$

Пусть $f \in L^p(0, 1)$, а последовательность $\{\eta_k\}$ такая, что

$$(54) \quad \eta_1 > \eta_2 > \dots, \quad \eta_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Выберем n_1 настолько большим, чтобы выполнялись $\alpha_{n_1} < \eta_1$ и

$$\|f - f_{n_1}\|_p < \eta_1.$$

Ясно, что

$$\|f - P_{n_1}\|_p \leq \|f - f_{n_1}\|_p + \|f_{n_1} - P_{n_1}\|_p < 2\eta_1.$$

Допустим, что уже определены числа $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$, для которых

$$(55) \quad \left\| f - \sum_{i=1}^{k-1} P_{n_i} \right\|_p < 2\eta_{k-1}.$$

Выберем число n_k , чтобы выполнялись

$$(56) \quad \alpha_{n_k} < \eta_k$$

и

$$(57) \quad \left\| f - \sum_{i=1}^{k-1} P_{n_i} - f_{n_k} \right\|_p < \eta_k.$$

Из (52), (56) и (57) непосредственно следует

$$(58) \quad \left\| f - \sum_{i=1}^k P_{n_i} \right\|_p \leq \eta_k + \alpha_{n_k} < 2\eta_k.$$

Из (57), с учетом (54) и (55) получаем

$$(59) \quad \|f_{n_k}\|_p \leq \eta_k + 2\eta_{k-1} < 3\eta_{k-1}.$$

Следовательно, с учетом (53), имеем

$$(60) \quad \sup_{N_{n_k} < m \leq N_{n_k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_{n_k}+1}^m \delta_n a_n \chi_n(x) \right|^p dx < 6\eta_{k-1}.$$

Так, по индукции определим полиномы P_{n_k} , удовлетворяющие условиям (58) и (60).

Рассмотрим ряд

$$(61) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_{n_k}+1}^{N_{n_k+1}} \delta_n a_n \chi_n(x),$$

который является подрядом ряда (1). Пусть M – некоторое натуральное число и для некоторого k имеет место $N_{n_k} < M \leq N_{n_k+1}$. Тогда из (58) и (60) получаем

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^M b_n \chi_n(x) \right\|_p &\leq \left\| f - \sum_{i=1}^{k-1} P_{n_i} \right\|_p + \left\| \sum_{n=N_{n_k}+1}^M \delta_n a_n \chi_n(x) \right\|_p \\ &\leq 2\eta_{k-1} + 6\eta_{k-1} = 8\eta_{k-1}. \end{aligned}$$

Откуда, с учетом (54), получаем, что ряд (61) сходится к f в метрике $L^p(0, 1)$. Теорема доказана.

Abstract. The paper considers the series in Haar's system, satisfying the conditions $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x) = \infty$ and $a_n \chi_n(x) \rightarrow 0$ almost everywhere. Some theorems on correction of such series and representation by their subseries are proved.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Г. Арутюнян, “О рядах по системе Хаара”, ДАН Арм. ССР, **42** (3), 134-140 (1966).
- [2] R. Gundy “Martingale Theory and Pointwise Convergence of Certain Orthogonal Series”, Trans. Amer. Math. Soc. **124** (2), 228-248 (1966).
- [3] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды* (АФЦ, Москва, 1999).
- [4] Н. М. Мушегян, “Об универсальности рядов относительно перестановок”, Изв. АН Арм. ССР, Математика, **12** (4), 278-302 (1977).
- [5] А. А. Талалян, “О рядах по базисам пространства L_p , универсальных относительно перестановок”, ДАН Арм. ССР, **35** (4), 145-148 (1959).
- [6] А. А. Талалян, “Представление измеримых функций рядами”, УМН, **15** (5) (95), 77-141 (1960).
- [7] А. А. Талалян, Р. И. Овсепян, “Теоремы представления Д. Е. Меньшова и их влияние на развитие метрической теории функций”, УМН, **47** (5) (287), 15-44 (1992).
- [8] V. N. Temlyakov, “Nonlinear Methods of Approximation”, Found. Comput. Math. **3**, 33-107 (2003).
- [9] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “A Remark on Greedy Approximation in Banach Spaces”, East J. on Approx. **5**, 1-15 (1999).
- [10] P. Wojtaszczyk, “Greedy Algorithm for General Systems”, J. Approx. Theory **107**, 293-314 (2000).
- [11] P. Wojtaszczyk, “Greedy Type Bases in Banach Spaces”, in *Constructive Theory of Functions* (DARBA, Sofia, 2003).
- [12] П. Л. Ульянов, “О по системе Хаара”, Мат. сборник, **63** (3), 356-391 (1964).
- [13] М. Г. Григорян, С. Гогян, “О перестановках рядов по системе Хаара”, Изв. НАН Армении, Математика, в печати.