Известия НАН Армении. Математика, том 42, н. 4, 2007, стр. 11-26

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Г. А. ГРИГОРЯН

Институт математики, Национальная Академия Наук Армении
E-mail: *mathphys2@instmath.sci.am*

Аннотация. В настоящей статье изучаются некоторые свойства продолжаемых на полуоси $[t_0, +\infty)$ решений уравнения Риккати

$$y'(t) + a(t)y^2(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0.$$

Дается описание видов множеств начальных значений этих уравнений. Выделяются два типа решений: нормальные, которые в некотором смысле устойчивы, и предельные, которые неустойчивы в смысле Ляпунова. Получены соотношения, выражающие предельные решения через любое нормальное решение в квадратурах и элементарных функциях. Выведены соотношения между продолжаемыми на $[t_0, +\infty)$ решениями, обобщающие формулы Виета.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим уравнение Риккати

$$y'(t) + a(t)y^2(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0, \tag{1}$$

где $t \in [t_0, +\infty) \subset (l, +\infty)$, а $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – непрерывные функции, определенные на $(l, +\infty)$. Посредством соотношений (см. [1], стр. 153-154)

$$\phi(t) = \lambda_0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)y(\tau)d\tau\right\} \quad \text{и} \quad \psi(t) = y(t)\phi(t), \tag{2}$$

где λ_0 – постоянная величина, уравнение (1) связано со следующей системой

$$\begin{cases} \phi'(t) = a(t)\psi(t), \\ \psi'(t) = -c(t)\phi(t) - b(t)\phi(t). \end{cases} \tag{3}$$

При $a(t) \equiv 1$ эта система эквивалентна уравнению

$$\phi''(t) + b(t)\phi'(t) + c(t)\phi(t) = 0, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{4}$$

Решение $y(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_{(0)}$, может либо продолжаться на $[t_0, +\infty)$, либо иметь в некоторой точке $t_1 > t_0$ вертикальную асимптоту. В первом случае решение $y(t)$ мы называем t_0-регулярным решением, а начальное значение $y_{(0)}$ – регулярным начальным значением.

И. М. Соболь (см. [2], [3]) успешно применил свойства t_0-регулярных решений уравнения

$$y'(t) + y^2(t) + c(t) = 0, \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{5}$$

для изучения асимптотических свойств решений соответствующего неосциллирующего уравнения

$$\phi''(t) + c(t)\phi(t) = 0, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{6}$$

Известно (см. [3]), что множество t_0-регулярных начальных значений решений уравнения (5) (если не пусто) имеет вид $[y_{(0)}, +\infty)$. Ниже нами доказано, что в общем случае множество t_0-регулярных начальных значений уравнения (1) является, если оно не пусто, одним из следующих видов множеств: (α, β), $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta]$, причем, если $\alpha(\beta)$ не является t_0-регулярным начальным значением, то оно может принимать значение $-\infty(+\infty)$, а отрезок $[\alpha, \beta]$ может вырождаться в точку.

t_0-регулярное решение с начальным значением из внутренности (или границы) множества t_0-регулярных начальных значений мы называем нормальным (или предельным) решением.

Из теоремы работы [3] следует, что двум различным нормальным решениям $y_1(t)$ и $y_2(t)$ уравнения (5) отвечают асимптотически эквивалентные соответственно решения $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ уравнения (6) в том смысле, что соотношения

$$\frac{\phi_1(t)}{\phi_2(t)} \quad \text{и} \quad \frac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)}$$

ограничены на $[t_0, +\infty)$, в то время как предельному значению $y_\star(t)$ отвечает “минимальное"решение $\phi_*(t)$, имеющее асимптптическое поведение на $+\infty$, отличное от асимптотического поведения $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$, линейно независимых от него. Из полученных ниже некоторых соотношений видно, что в некотором смысле эти свойства сохраняются в более общем случае. Именно, двум различным нормальным решениям уравнения (1) отвечают по формулам (2) решения системы (3), координаты которых являются асимптотически эквивалентными в вышеупомянутом смысле. Каждому предельному решению уравнения (1) отвечает решение системы, имеющее асимптотическое поведение на $+\infty$, отличное от асимптотического поведения на $+\infty$ линейно независимых от него решений.

Как видим, если для любого $t_1 \geq t_0$ уравнение (1) не имеет t_1-предельных решений (таким, например, является уравнение $y'(t) + \cos t\, y^2(t) = 0$), то все решения системы (1) асимптотически эквивалентны. Этот случай отличается от других своей "бедностью"разнообразия решений системы (3) с точки зрения их асимптотического поведения на $+\infty$. Заметим, что в этом случае система (3) не может иметь более одного конечного характеристического числа Ляпунова, если нормальные решения $y(t) = o(t)$ при $t \to +\infty$ (таковы все нормальные решения уравнения $y'(t) + \cos t y^2(t) = 0$). Если же уравнение (1) имеет нормальные и два предельных решения (другой крайний случай), то мы имеем систему (3) с “богатым"разнообразием ее решений с точки зрения их асимптотического поведения на $+\infty$.

Известно (см. [1], стр. 143-146 и [4]), что в общем случае уравнение (1) не решается в квадратурах и элементарных функциях. Для нахождения решений уравнения (1) приходится в общвм случае применить численные методы (например, методы Рунге–Кутта, см. [5], стр. 387-395). При этом, если искомое решение не является устойчивым, то возникают определенные трудности, связанные с обеспечением нужной точности построения решения. Так как в силу своего определения предельное решение не является устойчивым по Ляпунову, то эти трудности могут возникать при численном нахождении последнего. Если же решение нормально, то во многих случаях оно устойчиво по Ляпунову (даже во некоторых случаях нормальные решения асимптотически сближаются, см. [3] и [6], стр. 95) и поэтому упомянутые трудности в этом случае могут не возникать. Значит, если имеется формула, явно выражающая предельное решение через нормальное, то во многих случаях упомянутые трудности можно обойти с применением этой формулы.

Нами получены формулы (см. ниже), которые выражают любое предельное решение через нормальные в квадратурах и элементарных функциях. Получены также соотношения между двумя произвольными регулярными решениями, являющимися обобщением формул Виета в случае действительных и различных корней квадратного трехчлена. На основе одного из этих соотношений получен критерий для асимптотического сближения нормальных решений уравнения (1).

2. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть $t_1 \geq t_0$.

Определение 1. *Решение уравнения* (1) *называется* t_1*-регулярным, если оно существует на всем* $[t_1, +\infty)$.

Пусть $Y(t, t_1, \lambda)$ – общее решение уравнения (1) в области

$$G_{t_1} = \{(t, y) : t \in I_{t_1}(\lambda), y \in \mathbb{R}\},$$

где $I_{t_1}(\lambda)$ – максимальный интервал существования для решения $\widetilde{y}_\lambda(t)$ уравнения (1) с $\widetilde{y}_\lambda(t_1) = \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Лемма 1. *Если* $y_0(t)$ – t_0*-регулярное решение уравнения* (1), *то на* $[t_0, +\infty) \times \mathbb{R} \cap G_{t_1}$ *общее решение* $Y(t, t_1, \lambda)$ *можно задать по формуле*

$$Y(t, t_1, \lambda) = y_0(t) + \lambda \frac{e_{y_0}(t_1, t)}{1 + \lambda \mu_{y_0}(t_1, t)}, \tag{7}$$

где

$$e_{y_0}(t_1, t) = \exp\left\{-\int_{t_1}^{t} [2a(s)y_0(s) + b(s)]ds\right\},$$

$$\mu_{y_0}(t_1, t) = \int_{t_1}^{t} a(\tau)e_{y_0}(t_1, \tau)d\tau, \quad t_1, t \geq t_0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доказательство этой леммы элементарно, поэтому мы его опускаем.

Пусть $y_i(t)$ $(i=1,2)$ – два t_0-регулярных решения уравнения (1). Тогда в силу леммы 1 для любых $t_1, t \in [t_0,+\infty)$ справедливо равенство

$$y_i(t) = y_j(t) + \lambda_{ij}\frac{e_{y_j}(t_1,t)}{1+\lambda_{ij}(t_1)\mu_{y_j}(t_1,t)}, \tag{8}$$

где $\lambda_{ij}(t_1) = y_i(t_1) - y_j(t_1)$. Отсюда

$$y_i(t) - y_j(t) = \lambda_{ij}\frac{e_{y_j}(t_1,t)}{1+\lambda_{ij}(t_1)\mu_{y_j}(t_1,t)}, \quad t_1, t \in [t_0,+\infty), \quad i=1,2. \tag{9}$$

Левые части этих равенств не зависят от t_1, следовательно, от t_1 не зависят и их правые части. В силу этого мы можем ввести обозначения

$$\nu_{y_i,y_j}(t) = -\frac{1+\lambda_{ij}(t_1)\mu_{y_j}(t_1,t)}{\lambda_{ij}(t_1)e_{y_j}(t_1,t)}, \quad t \geq t_0, \quad i,j=1,2 \quad (i \neq j).$$

Тогда равенство (8) можно переписать в виде

$$y_i(t) = y_j(t) - \frac{1}{\nu_{y_i,y_j}(t)}, \quad t \geq t_0, \quad i=1,2 \quad (i\neq j). \tag{10}$$

Из этих равенств, очевидно, следует, что

$$\nu_{y_1,y_2}(t) = -\nu_{y_2,y_1}(t), \quad t \geq t_0. \tag{11}$$

Теорема 1. *Для t_0-регулярных решений $y_1(t)$ и $y_2(t)$ выполняются соотношения*

$$a(t)[y_1(t)+y_2(t)] = \frac{\nu'_{y_1,y_2}(t)}{\nu_{y_1,y_2}(t)} - b(t), \quad t \in [t_0,+\infty), \tag{12}$$

$$a(t)y_1(t)y_2(t) = y_1'(t) + y_1(t)\frac{\nu'_{y_1,y_2}(t)}{\nu_{y_1,y_2}(t)} + c(t), \quad t \in [t_0,+\infty). \tag{13}$$

Доказательства: Нетрудно проверить, что

$$\nu'_{y_1,y_2}(t) = -a(t) + [2a(t)y_2(t)+b(t)]\nu_{y_1,y_2}(t), \quad t \geq t_0.$$

Так как $\nu_{y_1,y_2}(t) \neq 0$, $t \in [t_0,+\infty)$, то из последнего равенства выводим

$$\frac{\nu'_{y_1,y_2}(t)}{\nu_{y_1,y_2}(t)} - a(t)y_2(t) - b(t) = -\frac{a(t)}{\nu_{y_1,y_2}(t)} + 2a(t)y_2(t) + b(t)$$
$$- a(t)y_2(t) - b(t) = a(t)\left[y_2(t) - \frac{1}{\nu_{y_1,y_2}(t)}\right], \quad t \in [t_0,+\infty).$$

Отсюда и из (10) получим (12). Далее умножим обе части (12) на $y_1(t)$. Получим

$$a(t)y_1^2(t) + a(t)y_1(t)y_2(t) = y_1(t)\frac{\nu'_{y_1,y_2}(t)}{\nu_{y_1,y_2}(t)} - b(t)y_1(t), \quad t \geq t_0.$$

Отсюда в силу уравнения (1) получим (13) Теорема доказана.

Из (8) выводим

$$-2a(t)y_i(t) - b(t) = -2a(t)y_j(t) - b(t) - 2\lambda_{ij}\frac{a(t)e_{y_j}(t_1,t)}{1+\lambda_{ij}(t_1)\mu_{y_j}(t_1,t)}, \quad i=1,2.$$

Интегрируя эти равенства в пределах от t_1 до t, получим для $t_1, t \geq t_0$, $i = 1, 2$,

$$\int_{t_1}^{t} \big[2a(t)y_i(\tau) + b(\tau)\big] d\tau = \int_{t_1}^{t} \big[2a(\tau)y_j(\tau) + b(\tau)\big] d\tau - \ln\big(1 + \lambda_{ij}(t_1)\mu_{y_j}(t_1, t)\big)^2.$$

Отсюда следует, что

$$e_{y_i}(t_1, t) = \frac{e_{y_j}(t_1, t)}{(1 + \lambda_{ij}(t_1)\mu_{y_j}(t_1, t))^2}, \quad t_1, t \geq t_0, \quad i, j = 1, 2,$$

и, значит, для $t_1, t \geq t_0$

$$e_{y_1}(t_1, t)e_{y_2}(t_1, t) = \frac{e_{y_1}(t_1, t)e_{y_2}(t_1, t)}{\big(1 + \lambda_{1,2}(t_1)\mu_{y_2}(t_1, t)\big)^2\big(1 + \lambda_{2,1}(t_1)\mu_{y_1}(t_1, t)\big)^2}. \tag{14}$$

Поскольку $\big(1 + \lambda_{ij}(t_1)\mu_{y_j}(t_1, t_1)\big) = 1 > 0$ $(i, j = 1, 2)$, а решения $y_i(t)$ $(i = 1, 2)$ – t_0-регулярны, то из (8) следует, что $(1 + \lambda_{ij}(t_1)\mu_{y_j}(t_1, t)) > 0$ при $t_1, t \geq t_0$, $i, j = 1, 2$. Следовательно, в силу (14) будем иметь

$$\big(1 + \lambda_{1,2}(t_1)\mu_{y_2}(t_1, t)\big)\big(1 + \lambda_{2,1}(t_1)\mu_{y_1}(t_1, t)\big) \equiv 1.$$

Отсюда легко вывести следующие соотношения:

$$\mu_{y_i}(t_1, t) = \frac{\mu_{y_j}(t_1, t)}{1 + \lambda_{ij}(t_1)\mu_{y_j}(t_1, t_1)}, \quad t_1, t \geq t_0, \quad i, j = 1, 2. \tag{15}$$

Определение 2. *t_1-регулярное решение $y_0(t)$ называется t_1-нормальным, если существует δ-окрестность $U_\delta(y_0(t_1)) = (y_0(t_1) - \delta, y_0(t_1) + \delta)$ точки $y_0(t_1)$ такая, что любое решение $y(t)$ уравнения* (1) *с $y(t_1) \in U_\delta(y_0(t_1))$ является t_1-регулярным. В противном случае решение $y_0(t)$ называется t_1-предельным или t_1-граничным.*

Определение 3. *t_1-предельное решение $y_0(t)$ называется нижним (верхним) t_1-предельным, если любое решение $y(t)$ уравнения* (1) *с $y(t_1) < y_0(t_1)$ $(y(t_1) > y_0(t_1))$ не является t_1-регулярным.*

Определение 4. *Число λ называется t_1-допустимым параметром функции $\mu_{y_0}(t_1, t)$ если $1 + \lambda\mu_{y_0}(t_1, t) \neq 0$ при $t \in [t_1, +\infty)$.*

Множество t_1-допустимых параметров функции $\mu_{y_0}(t_1, t)$ будем обозначать через $D_{y_0}(t_1)$. В дальнейшем будем считать, что уравнение (1) имеет хотя бы одно t_0-регулярное решение.

Из представления (7) общего решения уравнения (1) видно, что решение $y_0(t)$ t_1-нормально тогда и только тогда, когда существует δ-окрестность $(-\delta, \delta)$ точки нуль такая, что для любого $\lambda \in (-\delta, \delta)$ решение $Y(t, t_1, \lambda)$ является t_1-регулярным. Решение $y_0(t)$ является нижним (верхним) t_1-предельным решением тогда и только тогда, когда для любого $\lambda < 0$ (> 0) $Y(t, t_1, \lambda)$ не является t_1-регулярным. Отсюда, принимая во внимание (7) приходим ко следующему утверждению.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

A) *t_1-регулярное решение $y_0(t)$ уравнения* (1) *является t_1-нормальным тогда и только тогда, когда $\mu_{y_0}(t_1, t)$ ограничена по $t \in [t_1, +\infty)$,*

B) *t_1-регулярное решение $y_0(t)$ уравнения* (1) *является нижним, но не верхним (верхним, но не нижним) t_1-предельним решением тогда и только тогда, когда $\mu_{y_0}(t_1,t)$ ограничена снизу, но не сверху (ограничена сверху, но не снизу) по $t \in [t_1,+\infty)$,*

C) *t_1-регулярное решение $y_0(t)$ уравнения* (1) *является одновременно нижним и верхним предельным решением тогда и только тогда, когда функция $\mu_{y_0}(t_1,t)$ не ограничена ни снизу, ни сверху на $t \in [t_1,+\infty)$.*

Функцию $\mu_{y_0}(t_1,t)$ в дальнейшем будем называть характеристической функцией решения $y_0(t)$ уравнения (1).

Пусть $y_0(t)$ – t_0-регулярное решение уравнения (1). Тогда для любого $t_1 > t_0$ это решение t_1-регулярно, и поскольку

$$\mu_{y_0}(t_0,t) = \mu_{y_0}(t_0,t_1) + e_{y_0}(t_0,t_1)\mu_{y_0}(t_1,t), \quad t_1,t \geq t_0, \tag{16}$$

то из теоремы 2 немедленно получаем

Следствие 1. *Пусть $t_1 > t_0$, тогда справедливы следующие утверждения:*

A′) *t_0-регулярное решение уравнения* (1) *t_1-нормально тогда и только тогда, когда оно t_0-нормально,*

B′) *t_0-регулярное решение уравнения* (1) *является нижним, но не верхним (верхним, но не нижним) t_1-предельним решением тогда и только тогда, когда оно является нижним, но не верхним (верхним, но не нижним) t_0-предельним решением,*

C′) *t_0-регулярное решение уравнения* (1) *является одновременно нижним и верхним t_1-предельным решением тогда и только тогда, когда оно является одновременно нижним и верхним t_0-предельним решением.*

Как видим, тип t_0-регулярного решения (нормальное, нижнее или верхнее предельное) не меняется, на каком бы множестве $[t_1,+\infty) \subset [t_0,+\infty)$ мы его ни рассматривали. В связи с этим, в дальнейшем t_0-регулярное (t_0-нормальное, t_0-предельное) решение уравнения (1), вне зависимости от того на каком множестве $[t_1,+\infty)$ ($t_1 \geq t_0$) мы его рассматриваем, будем называть регулярным (нормальным, предельным) решением уравнения (1) Пусть $t_1 \geq t_0$. Для регулярного решения $y_0(t)$ введем в рассмотрение следующие величины:

$$\underline{\mu}(y_0,t_1) = \inf_{t\in[t_1,+\infty)} \mu_{y_0}(t_1,t), \quad \overline{\mu}(y_0,t_1) = \sup_{t\in[t_1,+\infty)} \mu_{y_0}(t_1,t).$$

В случае, когда $y_0(t)$ нормально, для его характеристической функции в силу теоремы 2 A) может выполняться одно из следующих условий:

1) $-\infty < \underline{\mu}(y_0,t_1) < \mu_{y_0}(t_1,t) < \overline{\mu}(y_0,t_1) < +\infty$, $t \in [t_1,+\infty)$,
2) $-\infty < \underline{\mu}(y_0,t_1) \leq \mu_{y_0}(t_1,t) < \overline{\mu}(y_0,t_1) < +\infty$, $t \in [t_1,+\infty)$, $\mu_{y_0}(t_1,t_2) = \underline{\mu}(y_0,t_1)$ для некоторого $t_2 \geq t_1$,
3) $-\infty < \underline{\mu}(y_0,t_1) < \mu_{y_0}(t_1,t) \leq \overline{\mu}(y_0,t_1) < +\infty$, $t \in [t_1,+\infty)$, $\mu_{y_0}(t_1,t_2) = \overline{\mu}(y_0,t_1)$ для некоторого $t_2 \geq t_1$,
4) $-\infty < \underline{\mu}(y_0,t_1) \leq \mu_{y_0}(t_1,t) \leq \overline{\mu}(y_0,t_1) < +\infty$, $t \in [t_1,+\infty)$, $\mu_{y_0}(t_1,t_2) = \underline{\mu}(y_0,t_1)$ и $\mu_{y_0}(t_1,t_3) = \overline{\mu}(y_0,t_1)$ для некоторых $t_2,t_3 \geq t_1$.

Если $y_0(t)$ является нижним, но не верхним предельным решением, то в силу теоремы 2 B) будем иметь

$$\underline{\mu}(y_0, t_1) > -\infty, \quad \overline{\mu}(y_0, t_1) = +\infty,$$

и тогда возможны случаи:

5) $-\infty < \underline{\mu}(y_0, t_1) < \mu_{y_0}(t_1, t) < \overline{\mu}(y_0, t_1) = +\infty$, $t \in [t_1, +\infty)$,

6) $-\infty < \underline{\mu}(y_0, t_1) \le \mu_{y_0}(t_1, t) < \overline{\mu}(y_0, t_1) = +\infty$, $t \in [t_1, +\infty)$, $\mu_{y_0}(t_1, t_2) = \underline{\mu}(y_0, t_1)$ для некоторого $t_2 \ge t_1$.

Аналогично, если $y_0(t)$ является верхним, но не нижним предельным решением, то имеем следующие возможные случаи:

7) $-\infty = \underline{\mu}(y_0, t_1) < \mu_{y_0}(t_1, t) < \overline{\mu}(y_0, t_1) < +\infty$, $t \in [t_1, +\infty)$,

8) $-\infty = \underline{\mu}(y_0, t_1) < \mu_{y_0}(t_1, t) \le \overline{\mu}(y_0, t_1) < +\infty$, $t \in [t_1, +\infty)$, $\mu_{y_0}(t_1, t_2) = \overline{\mu}(y_0, t_1)$ для некоторого $t_2 \ge t_1$.

Наконец, если решение $y_0(t)$ является одновременно и нижним и верхним предельным решением, то:

9) $-\infty = \underline{\mu}(y_0, t_1) < \mu_{y_0}(t_1, t) < \overline{\mu}(y_0, t_1) = +\infty$, $t \in [t_1, +\infty)$.

Множество t_1-допустимых параметров в случаях 1)-9), как нетрудно убедиться соответственно следующие:

1) $D_{y_0}(t_1) = \left[-\dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0, t_1)}, -\dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0, t_1)}\right]$ (ясно, что в этом случае $\underline{\mu}(y_0, t_1) < 0$, $\overline{\mu}(y_0, t_1) > 0$),

2) $D_{y_0}(t_1) = \left[-\dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0, t_1)}, -\dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0, t_1)}\right)$ если $\underline{\mu}(y_0, t_1) \ne 0$ и $D_{y_0}(t_1) = \left[-\dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0, t_1)}, +\infty\right)$ если $\underline{\mu}(y_0, t_1) = 0$ (очевидно, что $\overline{\mu}(y_0, t_1) > 0$)),

3) $D_{y_0}(t_1) = \left(-\dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0, t_1)}, -\dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0, t_1)}\right]$, если $\overline{\mu}(y_0, t_1) \ne 0$ и $D_{y_0}(t_1) = \left(-\infty, -\dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0, t_1)}\right]$, если $\overline{\mu}(y_0, t_1) = 0$,

4) $D_{y_0}(t_1) = \left(-\dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0, t_1)}, -\dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0, t_1)}\right)$, если $\underline{\mu}(y_0, t_1) < 0$ и $\overline{\mu}(y_0, t_1) > 0$, $D_{y_0}(t_1) = \left(-\infty, -\dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0, t_1)}\right)$, если $\overline{\mu}(y_0, t_1) = 0$ и $\underline{\mu}(y_0, t_1) < 0$, $D_{y_0}(t_1) = \left(-\dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0, t_1)}, +\infty\right)$, если $\overline{\mu}(y_0, t_1) > 0$ и $\underline{\mu}(y_0, t_1) = 0$, $D_{y_0}(t_1) = (-\infty, +\infty)$, если $\overline{\mu}(y_0, t_1) = \underline{\mu}(y_0, t_1) = 0$,

5) $D_{y_0}(t_1) = \left[0, -\dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0, t_1)}\right]$,

6) $D_{y_0}(t_1) = \left[0, -\dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0, t_1)}\right)$,

7) $D_{y_0}(t_1) = \left[-\dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0, t_1)}, 0\right]$,

8) $D_{y_0}(t_1) = \left(-\dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0,t_1)}, 0\right]$,

9) $D_{y_0}(t_1) = \{0\}$.

3. ТИПЫ МНОЖЕСТВ РЕГУЛЯРНЫХ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НОРМАЛЬНЫМ И ПРЕДЕЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Пусть $t_1 \geq t_0$. Введем следующее определение.

Определение 5. *Число* $y_{(0)} (\in \mathbb{R})$ *называется* t_1*-регулярным начальным значением уравнения* (1)*, если его решение* $y_0(t)$ *с* $y_0(t_1) = y_{(0)}$ *является* t_1*-регулярным.*

Множество t_1-регулярных начальных значений уравнения (1) будем обозначать через $reg(t_1)$.

Если $y_{(0)} \in reg(t_1)$, а $\lambda \in D_{y_0}(t_1)$, то в силу (7) имеет место равенство

$$y_{(0)} = y_0(t_1) + \lambda.$$

Очевидно, что $reg(t_1)$ не зависит от выбора $y_0(t)$). Поэтому для случаев 1)-9) $reg(t_1)$ будет соответственно равняться:

1′) $reg(t_1) = \left[y_0(t_1) - \dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0,t_1)}, y_0(t_1) - \dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0,t_1)}\right]$,

2′) $reg(t_1) = \left[y_0(t_1) - \dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0,t_1)}, y_0(t_1) - \dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0,t_1)}\right)$, если $\underline{\mu}(y_0,t_1) \neq 0$ и

$reg(t_1) = \left[y_0(t_1) - \frac{1}{\overline{\mu}(y_0,t_1)}, +\infty\right)$ if $\underline{\mu}(y_0,t_1) = 0$,

3′) $reg(t_1) = \left(y_0(t_1) - \dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0,t_1)}, y_0(t_1) - \dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0,t_1)}\right]$ если $\overline{\mu}(y_0,t_1) \neq 0$ и

$reg(t_1) = \left(-\infty, y_0(t) - \dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0,t_1)}\right]$, если $\overline{\mu}(y_0,t_1) = 0$,

4′) $reg(t_1) = \left(y_0(t_1) - \dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0,t_1)}, y_0(t_1) - \dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0,t_1)}\right)$, если $\underline{\mu}(y_0,t_1) < 0$ и $\overline{\mu}(y_0,t_1) > 0$,

$reg(t_1) = \left(-\infty, y_0(t_1) - \dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0,t_1)}\right)$, если $\underline{\mu}(y_0,t_1) < 0$ и $\overline{\mu}(y_0,t_1) = 0$,

$reg(t_1) = \left(y_0(t_1) - \dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0,t_1)}, +\infty\right)$, если $\underline{\mu}(y_0,t_1) = 0$ и $\overline{\mu}(y_0,t_1) > 0$,

$reg(t_1) = (-\infty, +\infty)$ if $\underline{\mu}(y_0,t_1) = \overline{\mu}(y_0,t_1) = 0$,

5′) $reg(t_1) = \left[y_0(t_1), y_0(t_1) - \dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0,t_1)}\right]$,

6′) $reg(t_1) = \left[y_0(t_1), y_0(t_1) - \dfrac{1}{\underline{\mu}(y_0,t_1)}\right)$,

7′) $reg(t_1) = \left(y_0(t_1) - \dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0,t_1)}, y_0(t_1)\right]$,

8′) $reg(t_1) = \left(y_0(t_1) - \dfrac{1}{\overline{\mu}(y_0,t_1)}, 0\right]$, 9′) $reg(t_1) = \{y_0(t_1)\}$.

Введем обозначения

$$A(t_1) = \inf\{t : t \in reg(t_1)\}, \quad B(t_1) = \sup\{t : t \in reg(t_1)\}.$$

Тогда из 1)-9) видно, что $reg(t_1)$ может являться множеством одного из следующих видов:

i) $reg(t_1) = (A(t_1), B(t_1))$,
ii) $reg(t_1) = [A(t_1), B(t_1))$,
iii) $reg(t_1) = [A(t_1), B(t_1)]$,
iv) $reg(t_1) = [A(t_1), B(t_1))$,

при этом, если $A(t_1) \notin reg(t_1)$ (или $B(t_1) \notin reg(t_1)$), то $A(t_1)$ $(B(t_1))$ может принимать значение $-\infty$ $(+\infty)$.

Очевидно, что если $A(t_0) \in reg(t_0)$ $(B(t_0) \in reg(t_0))$, то в силу следствия 1 $A(t) \equiv y_*(t)$ $(B(t) \equiv y^*(t))$ является нижним (верхним) предельным решением уравнения (1). Поэтому в силу i)-iii) мы можем соответственно записать

i′) $reg(t) = [y_*(t), y^*(t)]$,
ii′) $reg(t) = [y_*(t), B(t))$,
iii′) $reg(t) = (A(t), y^*(t)]$, $t \in [t_0, +\infty)$.

На простом примере покажем, что какими бы ни были числа $A(t_1)$ и $B(t_1)$ случай iii) может иметь место. Подобные примеры можно привести для случаев i), ii) и iv).

Пример 1. *Рассмотрим уравнение Риккати*

$$y'(t) + a(t)y^2(t) = 0, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{17}$$

Очевидно, $y_0(t) \equiv 0$ *является его регулярным решением, характеристическая функция которого равна*

$$\mu_{y_0}(t_1, t) = \int_{t_1}^{t} a(\tau)d\tau \stackrel{def}{=} \mathcal{A}(t_1, t), \quad t_1, t \geq t_0.$$

Для краткости записи обозначим

$$\underline{\mathcal{A}}(t_1) = \underline{\mu}(y_0, t_1), \quad \overline{\mathcal{A}}(t_1) = \overline{\mu}(y_0, t_1),$$

где $y_0(t) \equiv 0$. Пусть последовательность $S_n, n = 1, 2, \ldots$ ограничена и такая, что

$$\begin{gathered} 0 < S_1 < S_3 < \ldots < S_{2m+1} < \ldots, \\ 0 > S_2 > S_4 > \ldots S_{2m} \ldots, \\ \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1}} - \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}} = B(t_1) - A(t_1) > 0. \end{gathered} \tag{18}$$

и пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$, причем $t_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Пусть, далее, $a(t)$ такая, что $(-1)^{k+1}a(t) > 0$ при $t \in (t_k, t_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots$, причем

$$\int_{t_1}^{t_2} a(\tau)d\tau = S_1 > 0, \int_{t_2}^{t_3} a(\tau)d\tau = S_2 - S_1 < 0, \int_{t_3}^{t_4} a(\tau)d\tau = S_3 - S_2 > 0,$$

$$\ldots \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(\tau)d\tau = S_k - S_{k-1}, \quad ((S_k - S_{k-1})(-1)^{k-1} > 0), \ldots$$

Тогда, очевидно, $0 > \underline{\mathcal{A}}(t_1) = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} > -\infty$ и

$$0 < \overline{\mathcal{A}}(t_1) = \lim_{m\to\infty} S_{2m+1} < +\infty, \tag{19}$$

при этом

$$\underline{\mathcal{A}}(t_1) < \mathcal{A}(t_1, t) < \overline{\mathcal{A}}(t_1), \quad t \ge t_1.$$

Тогда для уравнения (17) будем иметь

$$reg(t_1) = \left[-\frac{1}{\overline{\mathcal{A}}(t_1)}, -\frac{1}{\underline{\mathcal{A}}(t_1)}\right].$$

Произведем в уравнении (17) замену

$$y(t) = z(t) - \frac{1}{\overline{\mathcal{A}}(t_1)} - A(t_1)$$

придем к уравнению, для которого

$$reg(t_1) = \left[A(t_1), A(t_1) + \frac{1}{\overline{\mathcal{A}}(t_1)} - \frac{1}{\underline{\mathcal{A}}(t_1)}\right].$$

Отсюда, в силу (18) и (19) для исходного уравнения (17) получим

$$reg(t_1) = [A(t_1), B(t_1)].$$

Если $A(t_1) = B(t_1)$, то достаточно последовательность S_n, $n = 1, 2, \ldots$ выбрать так, чтобы $\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = +\infty$ и $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = -\infty$. Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – регулярные решения уравнения (1). Тогда умножением на $a(t)$ и интегрированием в пределах от t_0 до t, из (9) при $t_1 = t_0$ получим

$$\int_{t_0}^{t} a(\tau)(y_i(\tau) - y_j(\tau))d\tau = \ln(1 + \lambda_{ij}(t_0)\mu_{y_j}(t_0, t)), \tag{20}$$

где $t \in [t_0, +\infty)$ и $i = 1, 2$. Если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – нормальные решения уравнения (1), то по теореме 2 A) соответствующие им характеристические функции $\mu_{y_1}(t_0, t)$ и $\mu_{y_2}(t_0, t)$ ограничены по $t \in [t_0, +\infty)$. Тогда из (20) следует

$$\left|\int_{t_0}^{t} a(\tau)(y_1(\tau) - y_2(\tau))d\tau\right| \le M, \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{21}$$

для некоторого достаточно большого значения M. Если $y_1(t) \equiv y_0(t)$ – нормальное, а $y_2(t) \equiv y_{np}(t)$ – предельное решения, то по теореме 2 $\mu_{y_0}(t_0, t)$ ограничено по $t \in [t_0, +\infty)$, и, следовательно, из (20) следует, что

$$\int_{t_0}^{t} a(\tau)(y_{np}(\tau) - y_0(\tau))d\tau \le M_1, \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{22}$$

для некоторого достаточно большого значения M_1. Заметим, далее, что если $y_2(t) \equiv y_{np}(t)$ – предельное решение, то

$$\liminf_{t\to+\infty} \big(1 + \lambda_{2,1}(t_0)\mu_{y_1}(t_0, t)\big) = 0. \tag{23}$$

Отсюда и из (20)

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} a(\tau)(y_{np}(\tau) - y_0(\tau))d\tau = -\infty. \tag{24}$$

Из этого равенства, в частности, получаем, что если $y_*(t)$ – нижнее, а $y^*(y)$ – верхнее предельное решения, то

$$\begin{aligned} &\liminf_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} a(\tau)(y^*(\tau) - y_*(\tau))d\tau = -\infty, \\ &\limsup_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} a(\tau)(y^*(\tau) - y_*(\tau))d\tau = +\infty. \end{aligned} \tag{25}$$

Если на множестве решений системы (3) ввести отношение эквивалентности $\sim$: полагая $(\phi_1(t), \psi_1(t)) \sim (\phi_2(t), \psi_2(t))$тогда и только тогда, когда $\dfrac{\phi_1(t)}{\phi_2(t)}$ и $\dfrac{\phi_2(t)}{\phi_1(t)}$ ограничены, то из (21) следует, что все решения системы (3), отвечающие по формулам (2) нормальным решениям уравнения (1), являются эквивалентными. Из (24) и (25) следует, что решения системы (3), отвечающие предельным решениям уравнения (1), не эквивалентны между собой и не эквивалентны решениям, отвечающим нормальным решениям уравнения (1).

Из (22) и (24) видно, что решение системы (3), отвечающее предельному решению уравнению (1), обладает неким свойством "минимальности". Отметим, что из (21) и (24) следует теорема 2 из [3].

Пусть $y_0(t)$ – нормальное, а $y_*(t)$ – нижнее предельное решения уравнения (1). В силу (8) имеем

$$y_*(t) = y_0(t) + \lambda_* \frac{e_{y_0}(t_0, t)}{1 + \lambda_* \mu_{y_0}(t_0, t)}, \tag{26}$$

где $\lambda_* = y_*(t_0) - y_0(t_0)$. Заметим, что

$$\inf_{t \ge t_0} (1 + \lambda_* \mu_{y_0}(t_0, t)) = 0$$

Действительно, в противном случае из (26) следовало бы, что $y_*(t)$ нормально. Из последнего равенства следует, что

$$\lambda_* = -\frac{1}{\overline{\mu}(y_0, t_0)}.$$

Отсюда и из (26) получаем, что

$$y_*(t) = y_0(t) - \frac{1}{\overline{\nu}_{y_0}(t)}, \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{27}$$

где

$$\overline{\nu}_{y_0}(t) = \frac{\overline{\mu}(y_0, t_0) - \mu_{y_0}(t_0, t)}{e_{y_0}(t_0, t)} > 0, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{28}$$

Сравнивая (27) и (10), приходим к заключению, что

$$\nu_{y_0 y_*}(t) = \overline{\nu}_{y_0}(t), \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{29}$$

Аналогичным образом показывается, что

$$\nu_{y_0 y^*}(t) = \underline{\nu}_{y_0}(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{30}$$

где $y^*(t)$ – верхнее предельное решение и

$$\underline{\nu}_{y_0}(t) = \frac{\underline{\mu}(y_0, t_0) - \mu_{y_0}(t_0, t)}{e_{y_0}(t_0, t)} < 0, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{31}$$

На основе формул (8), (10) и (27) - (31) заключаем, что если для некоторого нормального решения $y_0(t)$ выполняется равенство $\overline{\nu}_{y_0}(t) \neq 0$ ($\underline{\nu}_{y_0}(t) \neq 0$)) при $t \geq t_0$, то уравнение (1) имеет нижнее (верхнее) предельное решение. Очевидно, что имеет место и обратное утверждение. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть $y_0(t)$ – некоторое нормальное решение уравнения* (1). *Тогда для того, чтобы уравненив* (1) *имело нижнее (верхнее) предельное решение необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\nu}_{y_0}(t) \neq 0 \quad (\underline{\nu}_{y_0}(t) \neq 0) \quad \textit{при} \quad t \geq t_0.$$

При выполнении этого условия нижнее (верхнее) предельное решение находится по формуле

$$y_*(t) = y_0(t) - \frac{1}{\overline{\nu}_{y_0}(t)} \quad \left(y^*(t) = y_0(t) - \frac{1}{\underline{\nu}_{y_0}(t)}\right), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Для регулярного решения $y_0(t)$ рассмотрим интеграл

$$\nu_{y_0}(t) \equiv \int_t^{+\infty} a(\tau) \exp\left\{-\int_t^{\tau} [2a(s)y_0(s) + b(s)]ds\right\} d\tau, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Для каждого значения $t \geq t_0$ этот интеграл либо сходится, либо расходится. Пусть $\nu_{y_0}(t_0)$ сходится (заметим, что если $\nu_{y_0}(t)$ сходится при некотором $t = t_1$, то он сходится и при остальных значениях t). Тогда

$$\nu_{y_0}(t) = \lim_{t \to \infty} \mu_{y_0}(t_0, t) \equiv \mu_{y_0}(t_0, +\infty).$$

Отсюда следует, что $\mu_{y_0}(t_0, t)$ ограничена по t. Значит, в силу теоремы 2 A) решение $y_0(t)$ нормально. Нетрудно показать, что

$$\nu_{y_0}(t) = \frac{\mu_{y_0}(t_0, +\infty) - \mu_{y_0}(t_0, t)}{e_{y_0}(t_0, t)}, \quad t \geq t_0. \tag{32}$$

Следовательно, если $\nu_{y_0}(t) \neq 0$ при $t \geq t_0$, то число $\mu_{y_0}(t_0, +\infty)$ совпадает с $\overline{\mu}(y_0, t_0)$, если $\mu_{y_0}(t_0, +\infty)$ положительно, и совпадает с $\underline{\mu}(y_0, t_0)$, если $\mu_{y_0}(t_0, +\infty)$ отрицательно. Таким образом, ввиду (28), (31) и (32) имеем

$$\nu_{y_0}(t) = \begin{cases} \overline{\nu}_{y_0}(t) & \text{если} \quad \mu_{y_0}(t_0, +\infty) = \nu_{y_0}(t_0) > 0, \\ \underline{\nu}_{y_0}(t) & \text{если} \quad \mu_{y_0}(t_0, +\infty) = \nu_{y_0}(t_0) < 0. \end{cases}$$

Пусть $y_1(t)$ – нормальное решение, отличное от $y_0(t)$. Тогда в силу (15)

$$\lim_{t \to +\infty} \mu_{y_1}(t_0, t) \equiv \mu_{y_1}(t_0, +\infty) = \frac{\mu_{y_1}(t_0, +\infty)}{1 + \lambda_{1,0}\mu_{y_1}(t_0, +\infty)} \neq \pm\infty$$

(так как $\mu_{y_1}(t_0, t)$ ограничена по t), где $\lambda_{1,0} = y_1(t_0) - y_0(t_0)$. Значит, интеграл $\nu_{y_1}(t_0) = \mu_{y_1}(t_0, +\infty)$ сходится при каждом $t \geq t_0$, и, следовательно, $\nu_{y_1}(t)$ также сходится.

Из теоремы 3 и приведенных после нее рассуждений следует

Теорема 4. *Пусть для некоторого регулярного решения $y_0(t)$ интеграл $\nu_{y_0}(t_0)$ сходится. Тогда справедливы следующие утверждения:*

I) *Для каждого $t \geq t_0$ и для всех нормальных решений $y(t)$ и только для них интегралы $\nu_y(t)$ сходятся.*

II) *Для того, чтобы уравнение* (1) *имело предельное решение необходимо и достаточно, чтобы*

$$\nu_{y_0}(t) \neq 0, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

При выполнении этого условия единственное предельное решение $y_{np}(t)$ *определяется по формуле*

$$y_{np}(t) = y_0(t) - \frac{1}{\nu_{y_0}(t)}, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{33}$$

при этом $y_{np}(t)$ *является нижним (верхним) предельным решением тогда и только тогда, когда* $\nu_{y_0}(t_0) > 0$ *(*$\nu_{y_0}(t_0) < 0$*).*

Следует отметить, что из утверждения I) теоремы 4 следует теорема 1 работы [3].

Пусть $y_i(t)$ $(i = 1, 2)$ – нормальные, а $y_{np}(t)$ – предельное решения уравнения (1), и пусть

$$\phi_1(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)y_1(\tau)d\tau\right\}, \quad \psi_1(t) = y_1(t)\phi_1(t),$$

$$\phi_2(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)y_{np}(\tau)d\tau\right\}, \quad \psi_2(t) = y_{np}(t)\phi_2(t).$$

В силу связей (2), $\{\phi_i(t), \psi_i(t)\}$ $(i = 1, 2)$ является решением системы (3). Следовательно, в силу тех же связей для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ функция

$$\widetilde{Y}(t, t_0, \lambda) = \frac{\psi(t) + \lambda\psi_2(t)}{\phi_1(t) + \lambda\phi_2(t)}$$

представляет собой решение уравнения (1) в той области изменения t, в которой $\phi_1(t) + \lambda\phi(t) \neq 0$. Разделим числитель и знаменатель на $\phi_1(t)$. Получим

$$\widetilde{Y}(t, t_0, \lambda) = \frac{y_1(t) + \lambda y_{np}(t)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)(y_{np}(\tau) - y_1(\tau))d\tau\right\}}{1 + \lambda\exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)(y_{np}(\tau) - y_1(\tau))d\tau\right\}} \tag{34}$$

Поскольку

$$\widetilde{Y}(t_0, t_0, \lambda) = \frac{y_1(t_0) + \lambda y_{np}(t_0)}{1 + \lambda},$$

то из (34) следует, что

$$y_2(t) = \frac{y_1(t) + \lambda_2 y_{np}(t)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)(y_{np}(\tau) - y_1(\tau))d\tau\right\}}{1 + \lambda_2\exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)(y_{np}(\tau) - y_1(\tau))d\tau\right\}},$$

где

$$\lambda_2 = \frac{y_2(t_0) - y_1(t_0)}{y_{np}(t_0) - y_2(t_0)}.$$

Отсюда выводим

$$a(t)(y_2(t) - y_1(t)) = \frac{\lambda_2 a(t)(y_{np}(t) - y_1(t)) \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)(y_{np}(\tau) - y_1(\tau))d\tau\right\}}{1 + \lambda_2 \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)(y_{np}(\tau) - y_1(\tau))d\tau\right\}}.$$

Интегрируя это равенство в пределах от t_0 до t, получим

$$\int_{t_0}^{t} a(\tau)(y_2(\tau) - y_1(\tau))d\tau = \ln\left[\frac{y_{np}(t_0) - y_2(t_0)}{y_{np}(t_0) - y_1(t_0)}\right]$$
$$+ \ln\left|1 + \lambda_2 \exp\left\{\int_{t_0}^{t} a(\tau)(y_{np}(\tau) - y_1(\tau))d\tau\right\}\right|, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{35}$$

Теорема 5. *Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – нормальные решения уравнения* (1)*, причем $\nu_{y_1}(t_0)$ сходится и*

$$\nu_{y_1}(t) \neq 0, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Тогда единственное предельное решение $y_{np}(t)$ уравнения (1) *связано с $y_1(t)$ и $y_2(t)$ посредством соотношения*

$$\int_{t_0}^{+\infty} a(\tau)(y_2(\tau) - y_1(\tau))d\tau = \ln\left[\frac{y_{np}(t_0) - y_2(t_0)}{y_{np}(t_0) - y_1(t_0)}\right]. \tag{36}$$

Доказательство: Условия теоремы в силу теоремы 4 обеспечивают существование и единственность предельного решения $y_{np}(t)$ уравнения (1). Поскольку

$$\nu_{y_1}(t_0) = \lim_{t\to+\infty} \mu_{y_1}(t_0, t),$$

то в силу (23) имеем

$$\lim_{t\to+\infty}(1 + \lambda_{np}\mu_{y_1}(t_0, t)) = 0,$$

где $\lambda_{np} = y_{np}(t_0) - y_1(t_0)$. Отсюда, в силу (20) следует, что

$$\int_{t_0}^{+\infty} a(\tau)(y_{np}(\tau) - y_1(\tau))d\tau = -\infty. \tag{37}$$

Устремляя $t \to +\infty$ в (35), с учетом равенства (37) получим (36). Теорема доказана.

В дальнейшем будем считать, что $\nu_{y_0}(t_0)$ сходится для некоторого регулярного решения $y_0(t)$. В силу (33) для нормальных решений $y_1(t)$, $y_2(t)$ и предельного решения $y_{np}(t)$ выполняется равенство

$$\frac{y_{np}(t) - y_2(t)}{y_{np}(t) - y_1(t)} = \frac{\nu_{y_1}(t)}{\nu_{y_2}(t)}, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{38}$$

Устремляя $t_0 \to +\infty$, из (36) получим

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y_{np}(t) - y_2(t)}{y_{np}(t) - y_1(t)} = 1. \tag{39}$$

Отсюда и из (38) имеем

$$\lim_{t\to+\infty} = \frac{\nu_{y_1}(t)}{\nu_{y_2}(t)} = 1. \tag{40}$$

Из (33) и (39) выводим

$$\lim_{t\to+\infty} = \frac{y_1(t)-y_2(t)}{y_{np}(t)-y_1(t)} = \lim_{t\to+\infty} \nu_{y_1}(t)(y_1(t)-y_2(t)) = 0.$$

Из (40) следует, что в последнем равенстве функцию $\nu_{y_1}(t)$ можно заменить $\nu_{y_0}(t)$, где $y_0(t)$ – любое нормальное решение. Следовательно, если при некотором нормальном решении выполняется неравенство $\nu_{y_0}(t) \geq \epsilon > 0$ при всех $t \in [t_0,+\infty)$, то все нормальные решения асимптотически сближаются, т.е. для любых нормальных решений $y_1(t)$ и $y_2(t)$ выполняется равенство:

$$\lim_{t\to+\infty}(y_2(t)-y_1(t)) = 0.$$

Из (11) и (13) следует, что для произвольных решений $y_1(t)$ и $y_2(t)$ выполняется равенство

$$y_1'(t)-y_2'(t) = -(y_1(t)-y_2(t))\frac{\nu_{y_1,y_2}'(t)}{\nu_{y_1,y_2}(t)}, \quad t\in[t_0,+\infty).$$

Отсюда имеем

$$\frac{[y_1(t)-y_2(t)]'}{y_1(t)-y_2(t)} = -\frac{\nu_{y_1,y_2}'(t)}{\nu_{y_1,y_2}(t)}, \quad t\in[t_0,+\infty).$$

Интегрируя это равенство в пределах от t_0 до t, получим

$$\ln\frac{y_1(t)-y_2(t)}{y_1(t_0)-y_2(t_0)} = -\ln\frac{\nu_{y_1,y_2}(t)}{\nu_{y_1,y_2}(t_0)}, \quad t\in[t_0,+\infty),$$

Отсюда

$$\frac{y_1(t)-y_2(t)}{y_1(t_0)-y_2(t_0)}\frac{\nu_{y_1,y_2}(t)}{\nu_{y_1,y_2}(t_0)} = 1, \quad t\in[t_0,+\infty). \tag{41}$$

Поскольку $y_1(t)$ и $y_2(t)$ нормальны, то

$$\inf_{t\geq t_0}\big(1+\lambda_{1,2}(t_0)\mu_{y_2}(t_0,t)\big) > 0.$$

Поэтому $\nu_{y_1,y_2}(t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$ тогда и только тогда, когда $e_{y_2}^{-1}(t_0,t)\to+\infty$ при $t\to+\infty$. Отсюда в силу (41) получим следующий критерий:

Теорема 6. *Для того, чтобы все нормальные решения уравнения* (1) *асимптотически сблизились при* $t\to+\infty$ *необходимо и достаточно, чтобы для некоторого нормального решения* $y_0(t)$ *выполнялось равенство*

$$\int_{t_0}^{+\infty}[2a(\tau)y_0(\tau)+b(\tau)]d\tau = +\infty.$$

Эта теорема является обобщением теоремы из [3].

Пример 2. Пусть $a(t) \equiv a_0 \neq 0$, $b(t) \equiv b_0$ *и* $c(t) \equiv c_0, b_0^2 - 4a_0c_0 > 0$. *Тогда*

$$\widetilde{y}_\pm(t) \equiv y_\pm = \frac{-b_0 \pm \sqrt{b_0^2 - 4a_0c_0}}{2a_0}$$

являются регулярными решениями уравнения (1).

Нетрудно показать, что $\nu_{y_+}(t_0)$ сходится, а $\nu_{y_-}(t_0)$ расходится. Тогда в силу теоремы 4, $y_+(t)$ – нормальное решение, а $y_-(t)$ – единственное предельное решение уравнения (1), (оно нижнее, если $a_0 > 0$ и верхнее, если $a_0 < 0$). Так как $y_+^{'} \equiv 0$ and $\nu_{y_+}^{'}(t) \equiv 0$. то применяя (12) и (13) к решениям $y_\pm$, получим известные формулы Виета:

$$\begin{cases} a_0(y_+ + y_-) = -b_0, \\ a_0y_+y_- = c_0. \end{cases}$$

Далее, так как $2a_0y_+ + b_0 = \sqrt{b_0^2 - 4a_0c_0} > 0$, то

$$\int_{t_0}^{+\infty} [2a_0y_+ + b_0]d\tau = +\infty,$$

Тогда в силу теоремы 6 все нормальные решения уравнения (1) асимптоточески сближаются.

Abstract. The paper studies some properties of solutions of the Riccati equation

$$y'(t) + a(t)y^2(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0$$

on a semiaxis $[t_0, +\infty)$ for different types of initial value sets. Two types of solutions are singled out: normal, that are in a sense stable, and extremal, that are non-stable in the Lyapunov sense. Relations expressing the extremal solutions by means of a given normal solution in quadratures and elementary functions are obtained and some relations between solutions the extendable to $[t_0, +\infty)$ are derived.

Список литературы

[1] А. И. Егоров, *Уравнения Рикатти* (Физматлит, Москва, 2001).

[2] И. М. Соболь, "Об асимптоточеском поведении решений линейных дифференциальных уравнений", ДАН СССР **LXI** (2), (1948).

[3] И. М. Соболь, "Об уравнениях Риккати и и приводимых к ним линейных уравнениях второго порядка", ДАН **LXV** (3), (1949).

[4] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (Москва, 1961).

[5] Ю. П. Боглаев, *Вычислительная математика и программирование* (Высшая школа, Москва,1990).

[6] Р. Беллман, *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений* (Изд-во иностранной литературы, Москва, 1954).

Поступила 13 февраля 2007