

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИЦАДЗЕ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

А. О. БАБАЯН

Армянский Государственный Инженерный Университет
E-mail: barmenak@gmail.com

Аннотация. В работе формулируется нелокальная краевая задача для уравнения Бицадзе. Доказывается, что поставленная задача корректна, и вычисляется индекс. Далее, определяются в явном виде условия разрешимости неоднородной задачи и решения соответствующей однородной задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости, $\Gamma = \partial D^+$ – его граница и $D^- = \mathbb{C} \setminus \overline{D^+}$. В области D^+ рассмотрим уравнение Бицадзе ([1])

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2}(x, y) \equiv \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

Решение уравнения (1) ищется в классе $C^{(n, \alpha)}(D^+ \cup \Gamma)$ и на границе Γ удовлетворяет условию

$$(2) \quad \frac{\partial^n u}{\partial r^n}(z) - a(z) \overline{u(\alpha(z))} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

где n – натуральное число, f – заданная на Γ функция из класса $C^{(n, \nu)}(\Gamma)$, $a(z) \in C^{(n+1, \nu)}(\Gamma)$, $a(z) \neq 0$ при всех $z \in \Gamma$, а

$$\alpha(z) = e^{i\delta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z} \bar{z}_0}$$

– конформное отображение D^+ на себя. Оператор $\frac{\partial}{\partial r}$ – оператор дифференцирования по направлению радиуса-вектора точки z . При $f \equiv 0$ задачу (1), (2) будем называть *однородной*.

Задача (1), (2) не является линейной над полем комплексных чисел, однако, она линейна над полем действительных чисел. Таким образом, линейную зависимость рассматриваем над полем действительных чисел.

Известно ([1], [2]), что классические задачи Дирихле, Неймана, Пуанкаре для уравнения (1) не являются нетеровыми. В [3] описаны условия разрешимости классических и других некорректных задач для полианалитического уравнения $\frac{\partial^n u}{\partial \bar{z}^n} = 0$ в единичном круге. В монографии [4] исследована локальная граничная

задача

$$\frac{\partial u}{\partial r}(z) - a(z)\overline{u(z)} = f(x, y), \quad z = x + iy, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

для уравнения (1).

В настоящей работе доказывается, что задача (1), (2) является нетеровой и определены дефектные числа этой задачи в зависимости от a и n . Особый интерес представляет случай $n = -\text{ind}(a(z))|_{\Gamma} = 2$.

Введем некоторые определения.

Пусть $m = \text{ind}(a(z))|_{\Gamma}$, тогда ([5]) имеет место представление

$$(3) \quad a(z) = a_+(z)z^m a_-(z), \quad z \in \Gamma,$$

где

$$a_+(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln(a(t)t^{-m})dt}{t-z}\right), \quad z \in D^+,$$

$$a_-(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln(a(t)t^{-m})dt}{t-z}\right), \quad z \in D^-$$

Заметим, что функции $a_{\pm}, a_{\pm}^{-1}$ являются аналитическими в $D^{\pm}$, удовлетворяют условию Гельдера вплоть до границы и $a_-(\infty) = 1$. Далее, функция $a_-(z)\alpha(z)$ является аналитической в $D^- \setminus \{\bar{z}_0^{-1}\}$ и имеет простой полюс в точке $\bar{z}_0^{-1}$. Последняя функция может быть представлена в виде

$$(4) \quad a_-(z)\alpha(z) = \xi_-(z) + \frac{Bz}{1 - z\bar{z}_0},$$

где B – постоянная,

$$(5) \quad B = a_-(\bar{z}_0^{-1})e^{i\delta}(1 - |z_0|^2) \neq 0.$$

Если $m < -1$, то

$$(6) \quad z^m a_-(z)\alpha(z) = z^{-|m|}\xi_-(z) + B \sum_{j=1}^{|m|-1} \bar{z}_0^{|m|-j-1} z^{-j} + P_+(z),$$

где P_+ аналитическая в D^+ функция. При $m = -1$ сумма в этой формуле отсутствует.

В работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $n = 1$. Тогда при $m < -2$ неоднородная задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются $-2(m+2)$ линейно независимых условий, а соответствующая однородная задача не имеет нетривиальных решений. При $m > -2$ неоднородная задача (1), (2) всегда имеет решение, а соответствующая однородная задача имеет $2(m+2)$ линейно независимых решений.

Теорема 2. Пусть $n \geq 2$. Тогда при $m < -2$ неоднородная задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда граничная функция f удовлетворяет $2(n-m-4)$ линейно независимым условиям, при этом соответствующая однородная задача имеет $2(n-2)$ линейно независимых решений. При $m > -2$ для разрешимости неоднородной задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы граничная функция f удовлетворяла $2(n-2)$ линейно независимым условиям,

а соответствующая однородная задача будет иметь $2(n + m)$ линейно независимых решений.

Теорема 3. При $n = 2$ и $m = -2$, задача (1), (2) однозначно разрешима. Если $n = 1$ и $m = -2$, то задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(7) \quad |a_+^{-1}(0)|^2 - |B|^2 \neq 0,$$

где B определено в (5).

Теорема 4. При $m = -2$, задача (1), (2) фредгольмова. Если $n > 2$, то однородная задача имеет $2(n - 2)$ линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы граничная функция f удовлетворяла $2(n - 2)$ линейно независимым условиям. Если $n = 1$ и условие (7) не выполняется, то однородная задача имеет одно линейно независимое решение, а неоднородная задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда граничная функция f удовлетворяет одному линейно независимому условию.

Замечание 1. Из теорем 1-4 следует, что задача (1), (2) нетерова, и индекс этой задачи не зависит от n и равен $2(m + 2)$.

Замечание 2. Если $a(z) = a_0 z^{-2}$, где a_0 – отличная от нуля постоянная, то условие (7) запишется в виде $|a_0|(1 - |z_0|^2) \neq 1$.

В параграфе 2 теоремы 1-4 доказываются в случае $n = 1$, а в параграфе 3 – при $n \geq 2$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ПРИ $n = 1$

Общее решение уравнения (1) представим в виде (см. [4])

$$(8) \quad u(x, y) = \varphi(z) + (1 - z\bar{z})\psi(z) + C\bar{z}, \quad z = x + iy, \quad (x, y) \in D^+,$$

где φ и ψ – аналитические в D^+ функции, C – постоянная. Отметим, что φ , ψ и C определяются по функции u однозначно.

Пусть $n = 1$. В этом случае после подстановки общего решения (8) и разложения (3) в граничное уравнение (2), получаем

$$(9) \quad \frac{z\varphi'(z) - 2\psi(z)}{a_+(z)} + \frac{Ca_+^{-1}(z)}{z} - z^m a_-(z) \overline{\varphi(\alpha(z))} - \bar{C} z^m a_-(z) \alpha(z) = \frac{f(z)}{a_+(z)}, \quad z \in \Gamma.$$

Правую часть этого равенства запишем в виде суммы двух функций $F^\pm$, допускающих аналитическое продолжение в D^+ и D^- соответственно:

$$(10) \quad f(z)(a_+(z))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{-k} z^{-k} \equiv F_+(z) + F_-(z), \quad |z| = 1.$$

Здесь $F_-(\infty) = 0$.

Сначала рассмотрим случай $m \leq -2$. Используя (6) и отделяя в (9) слагаемые, допускающие аналитическое продолжение в D^+ и D^- , получим систему для определения φ , ψ и C :

$$(11) \quad \frac{z\varphi'(z) - 2\psi(z)}{a_+(z)} + C \left(\frac{a_+^{-1}(z) - a_+^{-1}(0)}{z} \right) - \overline{C}P_+(z) = F_+(z), \quad z \in \Gamma,$$

$$(12)$$

$$\frac{1}{z^{|m|}} \left(a_-(z) \overline{\varphi(\alpha(z))} + \overline{C}\xi_-(z) \right) - C \frac{a_+^{-1}(0)}{z} + \overline{C}B \sum_{j=1}^{|m|-1} \frac{\bar{z}_0^{|m|-j-1}}{z^j} = -F_-(z), \quad z \in \Gamma.$$

В последнем уравнении, приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях z , получаем условия, необходимые для разрешимости задачи (1), (2):

$$(13) \quad Ca_+^{-1}(0) - \overline{C}B\bar{z}_0^{|m|-2} = d_{-1},$$

$$(14) \quad \overline{C}B\bar{z}_0^{|m|-j-1} = -d_{-j}, \quad j = 2, \dots, |m| - 1.$$

При $m = -2$ условия (14) отсутствуют.

Предположим, что условия (13) и (14) выполняются. Если $m < -2$, то из условия (14) при $j = |m| - 1$ однозначно определяем C . При условиях (13) и (14) уравнение (12) примет вид

$$\frac{1}{z^{|m|}} \left(a_-(z) \overline{\varphi(\alpha(z))} + \overline{C}\xi_-(z) \right) = \sum_{k=|m|}^{\infty} d_{-k} z^{-k} \equiv \frac{1}{z^{|m|}} \Phi^-(z),$$

где Φ^- – заданная функция, аналитическая в D^- . Из этого неравенства однозначно определяем функцию $\varphi(\alpha(z))$:

$$(15) \quad \varphi(\alpha(z)) = \left(\overline{a_-(z)} \right)^{-1} \left(\overline{\Phi^-(z)} - \overline{C\xi_-(z)} \right).$$

Если χ – аналитическая в D^- функция, непрерывная вплоть до границы, то имеем

$$(16) \quad \overline{\chi(z)} = \overline{\chi(\bar{z}^{-1})} \equiv \tilde{\chi}(z), \quad |z| = 1,$$

где $\tilde{\chi}$ функция, аналитическая в D^+ . Используя (16) и обозначая через β функцию, обратную к α , определяем

$$(17) \quad \varphi(z) = \tilde{a}_-^{-1}(z) \left(\tilde{\Phi}^-(z) - C\tilde{\xi}_-(z) \right).$$

Таким образом, функция φ определяется однозначно, и из (11) однозначно определяется ψ .

Итак, если $n = 1$ и $m < -2$ то задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет $-2(m+2)$ условиям (13), (14), соответствующая однородная задача не имеет нетривиальных решений.

Пусть $m = -2$. Тогда, добавляя к (13) сопряженное уравнение, получаем систему для определения C и $\overline{C}$:

$$(18) \quad Ca_+^{-1}(0) - \overline{C}B = d_{-1}, \quad C\overline{B} - \overline{Ca_+^{-1}(0)} = \bar{d}_{-1}.$$

Если выполняется условие (7), то из системы (18) однозначно определяем C и затем, из (12) и (11) определяем φ и ψ . Итак, при $n = 1$, $m = -2$, если условие (7) выполнено, то задача (1), (2) однозначно разрешима. Если условие (7) не выполняется, то из (18) получаем одно условие разрешимости задачи (1), (2):

$$(19) \quad \overline{a_+^{-1}(0)}d_{-1} - B\bar{d}_{-1} = 0,$$

Соответствующая однородная задача имеет одно линейно независимое решение.

Рассмотрим случай $m > -2$. Используя равенство (4), функцию $z^m a_-(z)\alpha(z)$ представим в следующей форме

$$(20) \quad \begin{aligned} z^m a_-(z)\alpha(z) &= \sum_{j=0}^m q_{-j} z^{m-j} + \frac{Bz^{m+1}}{1 - z\bar{z}_0} + \sum_{j=m+1}^{\infty} q_{-j} z^{m-j} \\ &\equiv Q_+(z) + \eta_-(z), \end{aligned}$$

где q_{-j} — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции ξ_- . Функция Q_+ аналитична в D^+ , а функция η_- аналитична в D^- , при этом $\eta_-(\infty) = 0$. При $m = -1$ в (20) конечная сумма отсутствует.

Представим функцию $a_-(z)\overline{\varphi(\alpha(z))}$ в виде

$$(21) \quad a_-(z)\overline{\varphi(\alpha(z))} = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{X}_j z^{-j}, \quad z \in \Gamma.$$

Используя это разложение и подставляя (20) в (9), отделяя слагаемые, допускающие аналитическое продолжение в D^+ и D^- , получим

$$(22) \quad \frac{z\varphi'(z) - 2\psi(z)}{a_+(z)} + C \frac{a_+^{-1}(z) - a_+^{-1}(0)}{z} - \bar{C}Q_+(z) - \sum_{j=0}^m \bar{X}_j z^{m-j} = F_+(z), \quad z \in \Gamma,$$

$$(23) \quad z^m \left(a_-(z)\overline{\varphi(\alpha(z))} - \sum_{j=0}^m \bar{X}_j z^{-j} \right) - C \frac{a_+^{-1}(0)}{z} + \bar{C}\eta_-(z) = -F_-(z), \quad z \in \Gamma,$$

при $m = -1$ сумма $\sum_{j=0}^m \bar{X}_j z^{-j}$ отсутствует. Переходя в (23) к комплексно сопряженным величинам, определяем функцию φ :

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{j=0}^m X_j \beta^j(z) \tilde{a}_-^{-1}(\beta(z)) + \bar{C} \beta^{m+1}(z) \tilde{a}_-^{-1}(\beta(z)) \overline{a_+^{-1}(0)} \\ &\quad - C \beta^m(z) \tilde{a}_-^{-1}(\beta(z)) \tilde{\eta}_-(\beta(z)) + G_+(z), \quad z \in D^+. \end{aligned}$$

Здесь G_+ — заданная аналитическая в D^+ функция, комплексные постоянные X_j и C берутся произвольно. При этом легко видеть, что функции

$$\beta^j(z) \tilde{a}_-^{-1}(\beta(z)) \quad (j = 0, \dots, m) \quad \text{и} \quad \beta^{m+1}(z) \tilde{a}_-^{-1}(\beta(z))$$

линейно независимы над полем комплексных чисел. Далее, из (22) определяем ψ и, окончательно, из (8) находим решение задачи (1), (2). Таким образом, при $n = 1$, $m > -2$ задача (1), (2) всегда имеет решение, а соответствующая однородная задача имеет $2(m+2)$ линейно независимых решения.

Теоремы 1, 3, 4 при $n = 1$ доказаны.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ПРИ $n \geq 2$.

Пусть в (2) $n \geq 2$. Подставим общее решение задачи (1), (2), т.е. функцию (8), в граничное равенство (2). Получим

$$z^n \varphi^{(n)}(z) - 2nz^{n-1} \psi^{(n-1)}(z) - n(n-1)z^{n-2} \psi^{(n-2)}(z) - a(z) \overline{(\varphi(\alpha(z)))} + \overline{C} \alpha(z) = f(z), \quad |z| = 1.$$

Подставляя (3) и деля обе части последнего равенства на $a_+(z)$, получаем уравнение, аналогичное (9):

$$(24) \quad \frac{z^n \varphi^{(n)}(z) - 2nz^{n-1} \psi^{(n-1)}(z) - n(n-1)z^{n-2} \psi^{(n-2)}(z)}{a_+(z)} - z^m a_-(z) \overline{(\varphi(\alpha(z)))} - \overline{C} z^m a_-(z) \alpha(z) = \frac{f(z)}{a_+(z)}, \quad z \in \Gamma.$$

Пусть $m \leq -2$. В этом случае, используя (6), (10) и отделяя слагаемые, допускающие аналитическое продолжение в D^+ и D^- , получим два уравнения для определения φ , ψ и C :

$$(25) \quad \frac{z^n \varphi^{(n)}(z) - 2nz^{n-1} \psi^{(n-1)}(z) - n(n-1)z^{n-2} \psi^{(n-2)}(z)}{a_+(z)} - \overline{C} P_+(z) = F_+(z), \quad z \in D^+,$$

$$(26) \quad z^{-|m|} (a_-(z) \overline{(\varphi(\alpha(z)))} + \overline{C} \xi_-(z)) + \overline{C} B \sum_{j=1}^{|m|-1} \bar{z}_0^{|m|-j-1} z^{-j} = -F_-(z), \quad z \in D^-.$$

Так же, как и в предыдущем параграфе, приравнявая коэффициенты ряда Лорана правой и левой части (26), получим необходимые условия разрешимости задачи (1), (2):

$$(27) \quad \overline{C} B \bar{z}_0^{|m|-j-1} = -d_{-j}, \quad j = 1, \dots, |m| - 2.$$

$$(28) \quad \overline{C} B = -d_{-|m|+1},$$

При $m = -2$ условия (27) отсутствуют. Из равенства (28) определяем C , заметив, что из (5) имеем $B \neq 0$. Пусть выполнены условия (27). Тогда из (26) однозначно определяем φ . Подставляя эту функцию в (25), получаем следующее уравнение для определения ψ

$$(29) \quad z^{n-1} \psi^{(n-1)}(z) + \frac{(n-1)}{2} z^{n-2} \psi^{(n-2)}(z) = -\frac{a_+(z)}{2n} F_+(z) + L_+(z), \quad z \in D^+.$$

Здесь L_+ — аналитическая в D^+ функция, однозначно определенная по F_- . В уравнении (29) левая часть в точке нуль имеет порядок $O(|z|^{n-2})$ при $z \rightarrow 0$, и, следовательно, для разрешимости этого уравнения необходимо, чтобы

$$(30) \quad (a_+(z) F_+(z))^{(j)} \Big|_{z=0} = 2n L_+^{(j)}(0), \quad j = 0, \dots, n-3.$$

При $n = 2$ эти условия отсутствуют. Если условия (30) выполнены, то, разделив обе части (29) на z^{n-2} , получим уравнение для определения ψ :

$$(31) \quad z\psi^{(n-1)}(z) + \frac{(n-1)}{2}\psi^{(n-2)}(z) = \Omega_+(z), \quad z \in D^+.$$

Так как ψ и Ω_+ – аналитические функции в D^+ , то их можно представить рядом Тейлора в окрестности точки $z = 0$:

$$\psi^{(n-2)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k z^k, \quad \Omega_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k z^k.$$

Подставим эти разложения в (31)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\mu_k z^k + \frac{n-1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k z^k, \quad z \in D^+.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z , получим уравнения для определения неизвестных коэффициентов μ_k :

$$0, 5(n-1)\mu_0 = \omega_0, \quad (k+0, 5(n-1))\mu_k = \omega_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как $n-1 > 0$, то коэффициенты определяются однозначно. Таким образом, функция $\psi^{(n-2)}$ из уравнения (31) определяется однозначно. Интегрируя эту функцию $n-2$ раза, определяем функцию ψ . При этом, за счет постоянных интегрирования, появляются $n-2$ линейно независимых (над полем комплексных чисел) слагаемых, которые являются решениями однородной задачи (1), (2).

Итак, при $n > 1$, $m < -2$ неоднородная задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются $2(n-m-4)$ линейно независимых условий (27), (30). Соответствующая однородная задача имеет при этом $2(n-2)$ линейно независимых решения. Линейно независимыми решениями однородной задачи (1), (2) в этом случае являются функции

$$1 - z\bar{z}, \quad i(1 - z\bar{z}), \quad z^k(1 - z\bar{z}), \quad iz^k(1 - z\bar{z}) \quad k = 0, 1, \dots, n-3.$$

Рассмотрим случай $n = 2$, $m = -2$. В этом случае имеем единственное условие разрешимости (28) уравнения (26): $\overline{C}B = -d_1$, из которого однозначно определяется C . Далее, из (26) и (29) однозначно определяем φ и ψ . Таким образом, задача (1), (2) однозначно разрешима, и, следовательно, теоремы 3 и 4 доказаны.

Для завершения доказательства теоремы 2, остается рассмотреть случай $m > -2$. При этом, используя (20) и (21), приводим уравнение (24) к следующим уравнениям, аналогичным (22), (23):

$$(32) \quad \frac{z^n \varphi^{(n)}(z) - 2nz^{n-1} \psi^{(n-1)}(z) - n(n-1)z^{n-2} \psi^{(n-2)}(z)}{a_+(z)} - \overline{C}Q_+(z) - \sum_{j=0}^m X_{-j} z^{m-j} = F_+(z), \quad z \in D^+,$$

$$(33) \quad z^m \left(a_-(z) \overline{\varphi(\alpha(z))} - \sum_{j=0}^m X_{-j} z^{-j} \right) + \overline{C}\eta_-(z) = -F_-(z), \quad z \in D^-.$$

Так же, как и в предыдущих случаях, сначала решаем (33) и затем, определив φ , из (32) определяем $\psi^{(n-2)}$ и ψ . При этом задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются условия (30), а соответствующая однородная задача имеет $2(m+n)$ линейно независимых решений. Доказательство теорем 1-4 завершено.

Abstract. A non-local boundary value problem for the Bitsadze equation is stated. It is proved that the problem is correct and its index is calculated. Some solvability conditions of the non-homogeneous problem and some solutions of the homogeneous problem are explicitly determined.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Бицадзе, *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка* (Наука, Москва, 1966).
- [2] N. E. Tovmasyan, *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics* (World Scientific, Singapore 1994).
- [3] H. Begehr, A. Kumar, "Boundary Value Problems for the Inhomogeneous Polyanalytic Equation"1, *Analysis* **25**, 55-71 (2005).
- [4] N. E. Tovmasyan, *Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields* (World Scientific, Singapore, 1998).
- [5] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, Москва, 1962).

Поступила 12 декабря 2006