

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

АРПИ А. СТЕПАНЯН

Институт математики, Национальная Академия Наук Армении
E-mail: arpi_stepanyan@yandex.ru

Аннотация. Доказано, что любая почти всюду конечная измеримая функция представляется почти всюду абсолютно сходящимся рядом по общей системе Франклина, порожденной квази-двоичным и слабо регулярным разбиением.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ Ф. Г. Арутюнян [1] доказал следующие теоремы

Теорема 1. Для любой почти всюду (п.в.) конечной измеримой на $[0; 1]$ функции $f(x)$ существует ряд по системе Хаара $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$, который п.в. абсолютно сходится к $f(x)$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) = f(x) \quad \text{п.в. в } [0; 1]$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \chi_n(x)| < \infty \quad \text{п.в. в } [0; 1].$$

Теорема 2. Для любой п.в. конечной измеримой на $[0; 1]$ функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g(x)$ такая, что

- 1) $\mu\{x \in [0; 1] : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$,
- 2) ряд Фурье-Хаара функции $g(x)$ п.в. абсолютно сходится.

В работах [2], [3] и [4] теорема 1 распространена на другие системы, включающие в себя систему Хаара. В работе [5] теоремы 1 и 2 распространены на классическую систему Франклина.

В настоящей работе теоремы 1 и 2 распространяются на общую систему Франклина, порожденную квази-двоичным и слабо регулярным разбиением.

Условимся насчет некоторых обозначений. Через $C, C_1, C_\gamma, \dots$ обозначаются постоянные, зависящие только от своих индексов и различные в различных формулах. Через $|I|$ обозначим длину отрезка I . Запись $a \sim_\gamma b$ означает, что существуют положительные постоянные c_γ и C_γ такие, что $c_\gamma a \leq b \leq C_\gamma a$. Через

$\chi_A(x)$ обозначается характеристическая функция множества A , а через A^c – дополнение множества A до $[0; 1]$, т.е. $A^c = [0; 1] \setminus A$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМ

В работах [6] и [7] дано определение общей системы Франклина. Поскольку здесь мы доказываем теоремы только для общей системы Франклина, порожденной квази-двоичным и слабо регулярным разбиением отрезка $[0; 1]$, то приведем определения только для этого случая.

Пусть $\pi = \{t_i : 0 \leq i \leq n\}$ – разбиение отрезка $[0, 1]$, $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$. Через $\mathcal{S}_\pi$ обозначим пространство функций непрерывных на $[0, 1]$ и кусочно линейных с узлами из π .

Пусть $(\pi, \tilde{\pi})$ – такая пара разбиений отрезка $[0, 1]$, что $\tilde{\pi} \subset \pi$ и π получаются из $\tilde{\pi}$ добавлением одной точки $\tau \neq 0, 1$. Тогда существует единственная функция $\varphi \in \mathcal{S}_\pi$ такая, что $\varphi \perp \mathcal{S}_{\tilde{\pi}}$ (в L^2), $\|\varphi\|_2 = 1$ и $\varphi(\tau) > 0$. Функция φ называется функцией Франклина относительно пары разбиений $(\pi, \tilde{\pi})$.

Пусть $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ – квази-двоичная последовательность разбиений отрезка $[0, 1]$. Под этим мы подразумеваем, что $\mathcal{P}_0 = \{0, 1\}$ и

$$\mathcal{P}_j = \{t_{j,i} : 0 \leq i \leq 2^j\}, \quad \mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_{j+1} \quad \text{for } j \geq 0,$$

$0 = t_{j,0} < \dots < t_{j,2^j} = 1$, $t_{j+1,2k} = t_{j,k}$ для всех $j \geq 0$, $k = 0, \dots, 2^j$, т.е. $\mathcal{P}_{j+1}$ получается из $\mathcal{P}_j$ добавлением по одной точке в интервалах $(t_{j,k-1}, t_{j,k})$, $k = 1, \dots, 2^j$. Положим $\pi_1 = \mathcal{P}_0$, а для $n = 2^j + k$, $n \geq 2$, $1 \leq k \leq 2^j$

$$\pi_n = \mathcal{P}_j \cup \{t_{j+1,2l-1} : 1 \leq l \leq k\}.$$

Системой Франклина $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$, соответствующей паре разбиений $\{\mathcal{P}_j, j \geq 0\}$, называется семейство функций

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1), \quad x \in [0; 1],$$

а при $n \geq 2$ системой Франклина, соответствующей паре разбиений (π_n, π_{n-1}) является функция $f_n(x)$. Когда $\mathcal{P}_j = \{i/2^j : 0 \leq i \leq 2^j\}$ система $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ совпадает с классической системой Франклина.

Для $j \geq 0$ и $1 \leq k \leq 2^j$ мы полагаем $I_{j,k} = [t_{j,k-1}, t_{j,k}]$ и $I_{j,k}^\circ = (t_{j,k-1}, t_{j,k})$ – внутренность отрезка $I_{j,k}$. Кроме того, обозначим

$$\mathcal{I}_j = \{I_{j,k} : 1 \leq k \leq 2^j\} \quad \text{и} \quad \mathcal{I} = \bigcup_{j \geq 0} \mathcal{I}_j.$$

Элементы семейства $\mathcal{I}_j$ называются интервалами ранга (порядка) j . Когда из $\mathcal{P}_j$ переходим к $\mathcal{P}_{j+1}$, отрезок $I_{j,k}$ ранга j разбивается на два отрезка ранга $j+1$, т.е.

$$I_{j,k} = I_{j+1,2k-1} \cup I_{j+1,2k}.$$

Определение 1. Квази-двоичная последовательность $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$ называется слабо регулярной, если существует такая постоянная γ , что для всех $j \geq 1$ и

$k = 1, \dots, 2^{j-1}$ выполняется

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\lambda_{j,2k-1}}{\lambda_{j,2k}} \leq \gamma, \quad \text{где} \quad \lambda_{j,k} = |I_{j,k}| = t_{j,k} - t_{j,k-1}.$$

Для $n = 2^j + k$, $n \geq 2$ и $1 \leq k \leq 2^j$ положим

$$\begin{aligned} t_n &= t_{j+1,2k-1}, \quad \{n\} = [t_{j,k-1}; t_{j,k}] = [t_{j+1,2k-2}; t_{j+1,2k}], \\ \{n_-\} &= [t_{j+1,2k-3}; t_{j+1,2k-1}], \quad \{n_+\} = [t_{j+1,2k-1}; t_{j+1,2k+1}], \end{aligned}$$

где полагается $t_{j,-1} = 0$, $t_{j,2^j+1} = 1$ и $\{0\} = \{1\} = [0; 1]$.

В работе [8] доказано, что существует постоянная c_γ , зависящая только от γ , такая, что

$$(2.1) \quad \frac{1}{c_\gamma} |\{n\}|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \leq \|f_n\|_p \leq c_\gamma |\{n\}|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

(см. формулу (2.23) из [8]). Обозначим $\mu = \min\{|\{n_-\}|, |\{n\}|, |\{n_+\}|\}$. Пусть $I_* = [t_{j+1,i_*}; t_{j+1,i_*+2}]$ — один из интервалов $\{n_-\}, \{n\}, \{n_+\}$, для которого $\mu = |I_*|$ и пусть I_{*l} и I_{*r} соответственно левая и правая половины I_* . Обозначим через J_n один из интервалов I_{*l} и I_{*r} , для которого $|J_n| = \max(|I_{*l}|, |I_{*r}|)$ (J_n — “канонический” интервал, введенный в работе [7]).

Через $d_n(x)$ обозначается количество точек из π_n , которые находятся между x и J_n , учитывая концы отрезка J_n . Ясно, что $d_n(x) = 0$, когда $x \in J_n$. Аналогично, для интервала $V \subset [0, 1]$ через $d_n(V)$ обозначим количество узлов из π_n , которые находятся между V и J_n , учитывая концы отрезков V и J_n . Очевидно, что $d_n(V) = 0$ когда $J_n \cap V \neq \emptyset$.

Известно, что (см. [7])

$$(2.2) \quad |f_n(x)| \leq C_\gamma \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \frac{|J_n|^{\frac{1}{2}}}{|J_n| + \text{dist}(J_n, x)},$$

где C — абсолютная постоянная, а $\text{dist}(J_n, x)$ — расстояние между x и J_n . Нетрудно видеть, что при квази-двоичном и слабо регулярном разбиении имеют место

$$|J_n| \sim_\gamma |\{n\}| \quad \text{и} \quad |J_n| + \text{dist}(J_n, x) \sim_\gamma |\{n\}| + \text{dist}(\{n\}, x).$$

Поэтому из (2.2) следует

$$(2.3) \quad |f_n(x)| \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \frac{|\{n\}|^{1/2}}{|\{n\}| + \text{dist}(\{n\}, x)}.$$

Верны следующие теоремы..

Теорема 3. Для любой п.в. конечной измеримой функции $f(x)$ существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ по системе Франклина, который п.в. абсолютно сходится к $f(x)$.

Теорема 4. Для любой п.в. конечной измеримой функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g(x)$ такая, что

- 1) $\mu\{x \in [0, 1] : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$,
- 2) ряд Фурье-Франклина функции $g(x)$ абсолютно равномерно сходится.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. Пусть $[a, b] \subset [0, 1]$, $a, b \in \mathcal{P}_j$ для некоторого j , $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, $\delta > 0$, $\eta > 0$ и N – натуральное число. Тогда существует полином $\sum_{n=N+1}^M a_n f_n(x)$ такой, что

- 1) $\sum_{n=N+1}^M a_n f_n(x) = 0$, когда $x \notin [a, b]$,
- 2) $\sum_{n=N+1}^M |a_n f_n(x)| < \eta$, когда $x \notin [a - \delta, b + \delta]$,
- 3) $\sum_{n=N+1}^M |a_n f_n(x)| < C_\gamma \varepsilon^{-2}$,
- 4) $\int_0^1 \sum_{n=N+1}^M |a_n f_n(x)| dx < \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2} (b - a)$,
- 5) $\sum_{n=N+1}^M a_n f_n(x) = 1$, когда $x \in A$, $A \subset [a, b]$, $\mu(A) > (1 - \varepsilon)(b - a)$.

Доказательство: Пусть $a, b \in \mathcal{P}_k$, где выбор числа $k > j$ произведем позднее. Через x_k^i в порядке возрастания обозначим те узлы из $\mathcal{P}_k$, которые принадлежат $[a; b]$, т.е. $x_k^i \in \mathcal{P}_k \cap [a; b]$ и $x_k^i < x_k^{i+1}$. Для каждого $I_k^i = [x_k^i, x_k^{i+1}]$ построим функцию $\varphi_i(x)$ следующим образом: для фиксированного i через k_1 обозначим наименьшее натуральное число, при котором существует $t_1^i > 0$ такое, что $t_1^i < \varepsilon |I_k^i|$ и $x_k^i + t_1^i \in \mathcal{P}_{k_1}$. Такое число k_1 существует, так как $\cup_k \mathcal{P}_k$ всюду плотно в $[0; 1]$. Учтывая слабую регулярность разбиения $\{\mathcal{P}_j : j \geq 0\}$, получим

$$(3.1) \quad t_1^i \sim_\gamma \varepsilon |I_k^i|.$$

Так как разбиение слабо регулярное, то

$$(3.2) \quad \frac{t_1^i}{|I_k^i|} > \left(\frac{1}{1 + \gamma} \right)^{k_1 - k}.$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что

$$(3.3) \quad k_1 - k < C_\gamma \frac{1}{\varepsilon}.$$

Поскольку $x_k^i, x_k^i + t_1^i \in \mathcal{P}_{k_1}$, то существуют три узла из $\mathcal{P}_{k_1+2}$, которые принадлежат $(x_k^i; x_k^i + t_1^i)$. Два из них обозначим через $q_{1,1}$ и $q_{1,2}$, т.е. $q_{1,1} < q_{1,2}$, $q_{1,1}, q_{1,2} \in \mathcal{P}_{k_1+2}$ и $q_{1,1}, q_{1,2} \in (x_k^i; x_k^i + t_1^i)$.

Аналогично, найдем числа $t_2^i, q_{2,1}, q_{2,2}$ и k_2 такие, что

$$t_2^i \sim_\gamma \varepsilon |I_k^i|, \quad x_k^{i+1} - t_2^i \in \mathcal{P}_{k_2}, \quad k_2 - k < C_\gamma \frac{1}{\varepsilon},$$

$$q_{2,1}, q_{2,2} \in \mathcal{P}_{k_2+2}, \quad x_k^{i+1} - t_2^i < q_{2,1} < q_{2,2} < x_k^{i+1}.$$

Определим непрерывные функции $\varphi_i(x)$ следующим образом

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{когда } x \notin [x_k^i, x_k^{i+1}], \\ 1, & \text{когда } x \in [x_k^i + t_1^i, x_k^{i+1} - t_2^i], \\ 0, & \text{когда } x = q_{1,2} \text{ and } x = q_{2,1}, \\ -c_1, & x = q_{1,1}, \\ -c_2, & x = q_{2,2}, \\ \text{линейная на остальных отрезках,} \end{cases}$$

где числа c_1 и c_2 выбраны так, чтобы

$$(3.4) \quad \int_{I_k^i} \varphi_i(x) dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_{I_k^i} x \varphi_i(x) dx = 0.$$

Убедимся, что такой выбор существует и оценим c_1 и c_2 . С этой целью введем непрерывные функции

$$N_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда } x \notin [x_k^i, q_{1,2}], \\ 1, & \text{когда } x = q_{1,1}, \\ \text{линейная на остальных отрезках} & [x_k^i; q_{1,1}], [q_{1,1}; q_{1,2}], \end{cases}$$

и

$$N_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда } x \notin [q_{2,1}; x_k^{i+1}], \\ 1, & \text{когда } x = q_{2,2}, \\ \text{линейная на остальных отрезках} & [q_{2,1}; q_{2,2}], [q_{2,2}; x_k^{i+1}]. \end{cases}$$

Соотношения (3.4) равносильны соотношениям

$$(3.5) \quad \int_{I_k^i} \varphi_i(x) dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_{I_k^i} \left(x - \frac{x_k^i + x_k^{i+1}}{2} \right) \varphi_i(x) dx = 0.$$

Поскольку

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(x) \chi_{[q_{1,2}; q_{2,1}]}(x) - c_1 N_1(x) - c_2 N_2(x),$$

то соотношения (3.5) равносильны соотношениям

$$(3.6) \quad \begin{cases} c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 = \alpha, \\ c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 = \beta, \end{cases}$$

где

$$\alpha = \int_{q_{1,2}}^{q_{2,1}} \varphi_i(x) dx, \quad \beta = \int_{q_{1,2}}^{q_{2,1}} \left(x - \frac{x_k^i + x_k^{i+1}}{2} \right) \varphi_i(x) dx, \\ \alpha_j = \int_0^1 N_j(x) dx, \quad \beta_j = \int_0^1 \left(x - \frac{x_k^i + x_k^{i+1}}{2} \right) N_j(x) dx, \quad j = 1, 2.$$

Заметим, что

$$(3.7) \quad \alpha \sim_\gamma |I_k^i|, \quad \alpha_1 \sim_\gamma \alpha_2 \sim_\gamma \varepsilon |I_k^i|,$$

$$(3.8) \quad |\beta| \sim_\gamma |I_k^i|^2, \quad -\beta_1 \sim_\gamma \beta_2 \sim_\gamma \varepsilon |I_k^i|^2.$$

Из (3.6) следует

$$(3.9) \quad c_1 = \frac{\alpha \beta_2 - \alpha_2 \beta}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \quad \text{and} \quad c_2 = \frac{\alpha_1 \beta - \alpha \beta_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}.$$

Из (3.7)-(3.9) получим

$$(3.10) \quad |c_1| < \frac{C_{1,\gamma}}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad |c_2| < \frac{C_{2,\gamma}}{\varepsilon}.$$

Положим $\varphi(x) = \sum_i \varphi_i(x)$. Поскольку функции системы Франклина $f_n(x)$ линейны на I_k^i , когда $n \leq 2^k$, то из (3.4) получим

$$(3.11) \quad \int_0^1 \varphi(x) f_n(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2^k.$$

Пусть $\sum_1^\infty a_n f_n(x)$ – ряд Фурье-Франклина функции $\varphi(x)$. Тогда из (3.11) и того, что функция $\varphi(x)$ – кусочно-линейная с узлами из $\{\mathcal{P}_m : m \geq 0\}$, имеем

$$\varphi(x) = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+q}+1} a_n f_n(x),$$

где q – некоторое натуральное число, удовлетворяющее неравенству (см. (3.3))

$$(3.12) \quad q < \frac{C_\gamma}{\varepsilon}.$$

При достаточно больших k условия 1) и 5) выполняются. Докажем 3). Из (3.10) получим

$$(3.13) \quad |a_n| = \left| \int_a^b \varphi(x) f_n(x) dx \right| \leq \|\varphi\|_\infty \|f_n\|_1 \leq \frac{C_\gamma}{\varepsilon} |\{n\}|^{1/2}.$$

Из (3.13) и (2.3), (3.10)

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}+q} |a_n f_n(x)| &= \sum_{m=k}^{k+q} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} |a_n f_n(x)| \\ &\leq \frac{C_\gamma}{\varepsilon} \sum_{m=k}^{k+q} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)} \frac{|\{n\}|}{|\{n\}| + \text{dist}(\{n\}, x)} \leq \frac{C_\gamma}{\varepsilon} \sum_{m=k}^{k+q} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i \leq \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Теперь докажем 2). Поскольку $\|\varphi\|_1 \sim_\gamma (b-a)$, из (2.3) получим

$$(3.15) \quad \begin{aligned} |a_n| &= \left| \int_a^b \varphi(x) f_n(x) dx \right| \leq \|\varphi\|_1 \sup_{a \leq t \leq b} |f_n(t)| \\ &\leq C_\gamma \|\varphi\|_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(a;b)} \frac{|\{n\}|^{1/2}}{|\{n\}| + \text{dist}(\{n\}, (a, b))}. \end{aligned}$$

Пусть $x \notin [a-\delta; b+\delta]$. Тогда из (2.3) и (3.15) следует

$$\begin{aligned} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+q}+1} |a_n f_n(x)| &= \sum_{m=k}^{k+q} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} |a_n f_n(x)| \\ &\leq C_\gamma \sum_{m=k}^{k+q} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)+d_n(a,b)} \frac{|\{n\}|}{(|\{n\}| + \text{dist}(\{n\}, x))(|\{n\}| + \text{dist}(\{n\}, (a, b)))}. \end{aligned}$$

Поскольку $\text{dist}(\{n\}, x) + \text{dist}(\{n\}, (a, b)) > \delta$, то

$$\frac{|\{n\}|}{(|\{n\}| + \text{dist}(\{n\}, x))(|\{n\}| + \text{dist}(\{n\}, (a, b)))} < \frac{1}{\delta},$$

и поэтому

$$(3.16) \quad \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+q}+1} |a_n f_n(x)| \leq C_\gamma \sum_{m=k}^{k+q} \sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)+d_n(a,b)} \frac{1}{\delta}.$$

Если обозначим через l_m минимальное число узлов из $\mathcal{P}_m$ в интервалах $[a - \delta, a]$ и $[b, b + \delta]$, то легко увидеть, что

$$\sum_{n=2^m+1}^{2^{m+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{d_n(x)+d_n(a,b)} \leq 2 \sum_{i=l_m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = 6 \left(\frac{2}{3}\right)^{l_m}.$$

Следовательно, (см. (3.16), (3.12)),

$$(3.17) \quad \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+q}+1} |a_n f_n(x)| < \frac{C_\gamma}{\varepsilon \delta} \left(\frac{2}{3}\right)^{l_k} \quad \text{когда} \quad x \notin [a - \delta, b + \delta].$$

При достаточно большом k правая часть (3.17) будет меньше η . Поскольку в 2) δ и η – произвольные, то, согласовав их выбор с ε , из 2) и 3) получим 4). Лемма доказана.

Из леммы 1 без применения 4) немедленно следует

Лемма 2. Пусть $\varphi(x)$ – ступенчатая функция и ε – любое положительное число. Тогда для любого натурального N существует полином $\sum_{n=N+1}^M a_n f_n(x)$ такой, что

- 1) $\sum_{n=N+1}^M a_n f_n(x) = \varphi(x)$, когда $x \in A$, где $A \subset [0, 1]$ and $\mu(A) > 1 - \varepsilon$,
- 2) $\sum_{n=N+1}^M |a_n f_n(x)| < C_\gamma \|\varphi\|_\infty \varepsilon^{-2}$.

С применением леммы 1 доказывается следующая.

Лемма 3. Пусть $f(x)$ – п.в. конечная измеримая функция и $A \subseteq [0, 1]$ – любое измеримое множество. Тогда для любых положительных чисел ε, δ и для любого натурального числа N существуют измеримые множества B, D и полином

$$P(x) = \sum_{n=N+1}^M a_n f_n(x) \text{ такие, что } B \subset A \subset D \text{ и}$$

- 1) $|P(x) - f(x)| < \delta$, когда $x \in B$ и $\mu(B) > (1 - \varepsilon)\mu(A)$,
- 2) $\int_0^1 \sum_{n=N+1}^M |a_n f_n(x)| dx < \frac{C_\gamma}{\varepsilon^2} \int_B |f(x)| dx$,
- 3) $\sum_{n=N+1}^M |a_n f_n(x)| < \delta$ когда $x \in D^c$ и $\mu(D \setminus A) < \varepsilon \mu(A)$.

Доказательство: Поскольку для любой п.в. конечной измеримой функции $f(x)$ существует измеримая ограниченная функция $g(x)$ такая, что

$$\mu\{x \in [0; 1] : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon,$$

то без ограничения общности можем считать, что функция $f(x)$ ограничена и неотрицательна, т.е. $0 \leq f(x) < M$. Выберем числа $\{\alpha_i\}_{i=0}^p$ такие, что

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p = M \quad \text{и} \quad \alpha_i - \alpha_{i-1} < \delta.$$

Положим $G_i = \{x \in (0, 1) : \alpha_{i-1} \leq f(x) < \alpha_i\}$. Множества R_i , $i = 1, 2, \dots, p$, выберем так, чтобы они являлись объединением квази-двоичных интервалов I_m таких, что $R_i = \cup_{m=v_{i-1}}^{v_i-1} I_m$, $v_i < v_{i+1}$, $I_m \cap I_{m'} = \emptyset$, $m \neq m'$ и

$$\mu(R_i \cap G_i) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \mu(G_i).$$

В силу леммы 1 существуют полиномы $P_m(x) = \sum_{n=N_m+1}^{N_{m+1}} a_n f_n(x)$ и множества E_m , $v_{i-1} \leq m < v_i$ такие, что

$$P_m(x) = \alpha_{i-1}, \quad \text{когда} \quad x \in E_m \subset I_m, \quad \mu(E_m) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \mu(I_m),$$

$$\int_0^1 \sum_{n=N_m+1}^{N_{m+1}} |a_n f_n(x)| dx < C_\gamma \alpha_{i-1} \frac{\mu(I_m)}{\varepsilon^2},$$

$$\sum_{n=N_m+1}^{N_{m+1}} |a_n f_n(x)| < \eta_m \quad \text{когда} \quad x \notin [a_m - \delta_m, b_m + \delta_m],$$

где $[a_m; b_m] = I_m$, η_m и δ_m — некоторые положительные числа.

Нетрудно убедиться, что при подходящем выборе чисел η_m and δ_m полином $\sum_{m=1}^{v_p} P_m(x)$ удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

4.1. Доказательство теоремы 3. Эта теорема доказывается аналогично теореме 1 из [4]. Пусть $\varepsilon_k = 2^{-k}$, $\delta_k = \varepsilon_{k+1}^3$, $k = 1, 2, \dots$. В силу леммы 3 можем найти

множество $B_1 \subset [0, 1]$ и полином $P_1(x) = \sum_{n=1}^{N_1} a_n f_n(x)$ такие, что

$$|f(x) - P_1(x)| < \delta_1, \quad x \in B_1, \quad \mu(B_1) > 1 - \varepsilon_1$$

и

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{N_1} |a_n f_n(x)| dx < \frac{c_\gamma}{\varepsilon_1^2} \int_{B_1} |f(x)| dx.$$

Опять применив лемму 3, можем найти множество $E_2 \subset B_1$ и полином $P_2'(x) =$

$\sum_{n=N_1+1}^{M_1} a_n f_n(x)$ такие, что

$$(4.1) \quad \mu(E_2) > (1 - \varepsilon_2) \mu(B_1),$$

$$(4.2) \quad |P_2'(x) - (f(x) - P_1(x))| < \delta_2, \quad x \in E_2,$$

$$(4.3) \quad \int_0^1 \sum_{n=N_1+1}^{M_1} |a_n f_n(x)| dx < \frac{C_\gamma}{\varepsilon_2^2} \int_{E_2} |f(x) - P_1(x)| dx < \frac{C_\gamma}{\varepsilon_2^2} \delta_1 = C_\gamma \varepsilon_2.$$

Пусть $F_2 \supset B_1$ такое множество, что $\mu(F_2) > 1 - \varepsilon_2$. Опять в силу леммы 3 найдем полином $P_2''(x) = \sum_{n=M_1+1}^{N_2} a_n f_n(x)$ и множества G_2 и R_2 такие, что

$$(4.4) \quad G_2 \subset F_2 \setminus E_2 \subset R_2, \quad \mu((F_2 \setminus E_2) \setminus G_2) < \varepsilon_2,$$

$$(4.5) \quad |P_2''(x) - (f(x) - P_1(x) - P_2'(x))| < \delta_2, \quad x \in G_2$$

$$(4.6) \quad \sum_{n=M_1+1}^{N_2} |a_n f_n(x)| < \delta_2, \quad x \in R_2^c \quad \text{и} \quad \mu(R_2 \setminus (F_2 \setminus E_2)) < \varepsilon_2.$$

Если обозначим $A_2 = E_2 \cap R_2^c$, то из (4.3) и (4.6) следует, что

$$\int_{A_2} \left(\sum_{n=N_1+1}^{M_1} |a_n f_n(x)| + \sum_{n=M_1+1}^{N_2} |a_n f_n(x)| \right) dx < 2C_\gamma \varepsilon_2$$

и $\mu(A_2) > 1 - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2$ (см. (4.1), (4.4), (4.6)). Положим

$$P_2(x) = P_2'(x) + P_2''(x) = \sum_{n=N_1+1}^{N_2} a_n f_n(x).$$

Из (4.2), (4.4), (4.5) и (4.6) следует, что существует множество $B_2 \subset F_2$ такое, что $|f(x) - P_1(x) - P_2(x)| < 2\delta_2$ когда $x \in B_2$, причем $\mu(F_2 \setminus B_2) < \varepsilon_2$. Следовательно, $\mu(B_2) > 1 - 2\varepsilon_2$. Если продолжим этот процесс, то получим множества B_m , A_m и полиномы $P_m(x) = \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_m} a_n f_n(x)$, такие, что

$$(4.7) \quad \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N_m} P_n(x) \right| < 2\delta_m, \quad x \in B_m, \quad \mu(B_m) > 1 - 2\varepsilon_m,$$

$$\int_{A_m} \sum_{n=N_{m-1}+1}^{N_{m+1}} |a_n f_n(x)| dx < 2C_\gamma \varepsilon_m, \quad \mu(A_m) > 1 - \varepsilon_{m-1} - 2\varepsilon_m.$$

Откуда,

$$\int_{\bigcap_{n \geq m} A_n} \sum_{n=N_m+1}^{\infty} |a_n f_n(x)| dx < 2C_\gamma \sum_{n \geq m} \varepsilon_n < +\infty$$

и

$$\mu \left(\bigcap_{n \geq m} A_n \right) > 1 - 2\varepsilon_{m-1} - 4\varepsilon_m.$$

Откуда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ п.в. абсолютно сходится на $[0, 1]$. Кроме того, из (4.7) следует, что сходится к $f(x)$ п.в.

4.2. Доказательство теоремы 4: По теореме Лузина, без ограничения общности, функцию f можно считать непрерывной. Пусть $\varepsilon_k = 2^{-k}\varepsilon$, $k = 1, 2, \dots$ и $\delta_k = \varepsilon_{k+1}^3$. Существуют ступенчатые функции $\varphi_k(x)$ такие, что

$$(4.8) \quad \|\varphi_k - f\|_\infty < \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим $\psi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, где $\varphi_0 = 0$. Из (4.8) имеем $\|\psi_k\|_\infty < 2\delta_{k-1}$ для $k \geq 2$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = f(x),$$

где сходимость равномерна. По лемме 2 существуют полиномы, которые обладают следующими свойствами

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_k}^{M_k} |a_n f_n(x)| &< C_\gamma \frac{\|\psi_k\|_\infty}{\varepsilon^2} < 2C_\gamma \varepsilon_k, \\ N_1 &< M_1 < N_2 < \dots < M_k < N_{k+1} < \dots, \\ \sum_{n=N_k}^{M_k} a_n f_n(x) &= \psi_k(x) \quad \text{когда} \quad x \in A_k \quad \text{и} \quad \mu(A_k) > 1 - \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Положив $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_k}^{M_k} a_n f_n(x)$, легко убедиться, что $g(x)$ – требуемая функция. Теорема доказана..

Abstract. It is proved that every almost everywhere finite measurable function is representable by an absolute convergent series in the Franklin systems generated by quasi-dyadic, weakly regular partitions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Г. Арутюнян “О рядах по системе Хаара,” ДАН Арм. ССР **42** (3), 134-140 (1966).
- [2] Р. С. Давтян, “О представлении функций ортогональными рядами, обладающими мартингальными свойствами,” Мат. заметки, **19**, 673-680 (1976).
- [3] G. G. Gevorkyan, “Representation of Measurable Functions by Martingales,” Analysis Math. **8**, 239-256 (1982).
- [4] G. G. Gevorkyan, “Representation of Measurable Functions by Absolutely Convergent Series of Translates and Dilates of One Function,” East J. Approx. **2** (4), 439-458 (1996).
- [5] Г. Г. Геворкян, “О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина,” ДАН Арм. ССР **83** (1), 15-18 (1986).
- [6] Z. Ciesielski and A. Kamont, “Projections Onto Piecewise Linear Functions”, Funct. Approx. Comment. Math. **25**, 129-143 (1997).
- [7] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “Unconditionality of General Franklin System in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$,” Studia Math. **164**, 161-204 (2004).
- [8] G. G. Gevorkyan and A. Kamont, “On general Franklin Systems”, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), **374**, 1-59 (1998).

Поступила 5 февраля 2007