

ТОЖДЕСТВА ХАРДИ-СТЕЙНА И НЕРАВЕНСТВА ЛИТТЛВУДА-ПЭЛИ В ПОЛИКРУГЕ

К. Л. АВЕТИСЯН И Р. Ф. ШАМОЯН

*Ереванский Государственный Университет
Брянский Педагогический Университет, Россия
E-mail: avetkaren@ysu.am, rshamoyan@mail.ru*

Аннотация. Статья обобщает известное неравенство Литтлвуда-Пэли и тождество Харди-Стейна. В качестве приложения получены неравенства площадей и представления квазинорм пространств Бергмана A_ω^p в полидиске.

1. Классическое неравенство Литтлвуда-Пэли (см. [1]) гласит, что для любой голоморфной в единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ функции $f(z)$ из класса Харди $H^p(\mathbb{D})$, $2 \leq p < \infty$ имеет место неравенство:

$$(1) \quad \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1 - |z|)^{p-1} dm_2(z) \leq C_p \|f\|_{H^p}^p,$$

где m_2 – мера Лебега на $\mathbb{D}$. Известны многочисленные и разнообразные обобщения неравенства (1), см. [2]-[13]. Следующее обобщение принадлежит Люкингу [4].

Теорема А. *Если $0 < p, s < \infty$, то неравенство*

$$(2) \quad \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^{p-s} |f'(z)|^s (1 - |z|)^{s-1} dm_2(z) \leq C(p, s) \|f\|_{H^p}^p$$

выполняется для всех $f \in H^p(\mathbb{D})$ тогда и только тогда, когда $2 \leq s < p + 2$.

Как видим, случай $0 < s < 2$ Люкингом не рассмотрен. Поэтому мы заинтересованы в получении аналогов (2) для $0 < s < 2$, причем в контексте единичного поликруга комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Заметим, что Люкинг в своем доказательстве (2) существенно использовал некоторые методы (такие, как распределение нулей, произведение Бляшке), которые нельзя непосредственно распределить на многомерный случай поликруга.

2. Пусть $\mathbb{D}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, 1 \leq j \leq n\}$ – единичный поликруг и $\mathbb{T}^n = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n : |\xi_j| = 1, 1 \leq j \leq n\}$ – n -мерный тор, остов поликруга $\mathbb{D}^n$. Обозначим через $H(\mathbb{D}^n)$ множество всех голоморфных функций в $\mathbb{D}^n$. Если $f(z) = f(r\xi)$ – измеримая функция в $\mathbb{D}^n$, то обозначим интегральные средние через

$$M_p(f, r) = \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(r\xi)|^p dm_n(\xi) \right]^{1/p}, \quad r = (r_1, \dots, r_n) \in I^n,$$

где $0 < p < \infty$, $I^n = (0, 1)^n$, а m_n – мера Лебега на $\mathbb{T}^n$. Множество голоморфных в $\mathbb{D}^n$ функций, для которых

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{r \in I^n} M_p(f, r) < +\infty$$

есть обычное пространство Харди H^p .

Для некоторой радиальной весовой функции $\omega(r) = \prod_{j=1}^n \omega_j(r_j)$, через L_ω^p ($0 < p < \infty$) обозначим пространство тех функций $f(z)$, измеримых в $\mathbb{D}^n$, для которых следующая (квази-)норма конечна:

$$\|f\|_{L_\omega^p} = \left(C_\omega \int_{\mathbb{D}^n} |f(z)|^p \prod_{j=1}^n \omega_j(|z_j|) dm_{2n}(z) \right)^{1/p},$$

где $dm_{2n}(z) = r dr dm_n(\xi)$ – мера Лебега на $\mathbb{D}^n$, нормирующая постоянная C_ω выбирается так, чтобы $\|1\|_{L_\omega^p} = 1$. Голоморфное подпространство L_ω^p обозначим через $A_\omega^p = H(\mathbb{D}^n) \cap L_\omega^p$. В случае, если $\omega_j(r_j) = (1 - r_j)^{\alpha_j}$ ($\alpha_j > -1$, $1 \leq j \leq n$), то пространства L_ω^p и A_ω^p будем обозначать через L_α^p и A_α^p соответственно.

Ниже мы будем пользоваться общепринятыми обозначениями в $\mathbb{C}^n$:

$$r\zeta = (r_1\zeta_1, \dots, r_n\zeta_n), \quad dr = dr_1 \cdots dr_n,$$

$$(1 - |\zeta|)^\alpha = \prod_{j=1}^n (1 - |\zeta_j|)^{\alpha_j}, \quad \zeta^\alpha = \prod_{j=1}^n \zeta_j^{\alpha_j},$$

$$\alpha q + 1 = (\alpha_1 q + 1, \dots, \alpha_n q + 1)$$

для $\zeta \in \mathbb{C}^n$, $r \in I^n$, $q \in \mathbb{R}$ и мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Через $\mathbb{Z}_+^n$ обозначим множество всех мультииндексов $k = (k_1, \dots, k_n)$ с неотрицательными целыми координатами $k_j \in \mathbb{Z}_+$. Для выражений $A, B > 0$, будем писать $A \lesssim B$, если найдется постоянная $c > 0$, не зависящая от переменных величин такая, что $A \leq cB$. Значок $A \asymp B$ означает, что $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$. Для p , $1 \leq p \leq \infty$, его сопряженный индекс обозначим через $p' = p/(p-1)$.

Для каждой функции $f \in H(\mathbb{D}^n)$, представленной в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} a_k r^k \xi^k, \quad z = r\xi, \quad r \in I^n, \quad \xi \in \mathbb{T}^n,$$

определим оператор радиального дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\mathcal{D}^\alpha f(z) \equiv \mathcal{D}_r^\alpha f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \prod_{j=1}^n (1 + k_j)^{\alpha_j} a_k r^k \xi^k.$$

Из определения ясно, что справедливо разложение $\mathcal{D}_r^\alpha f(z) = \mathcal{D}_{r_1}^{\alpha_1} \mathcal{D}_{r_2}^{\alpha_2} \dots \mathcal{D}_{r_n}^{\alpha_n} f$, где $\mathcal{D}_{r_j}^{\alpha_j}$ обозначает тот же оператор, действующий лишь по переменной r_j .

3. Перейдем к основным теоремам статьи, результаты которых являются новыми и при $n = 1$. В первой теореме мы получаем семейство неравенств, которые являются аналогами и обобщениями неравенств типа Литтлвуда-Пэли, доказанные Ямашитой [2] и Люкингом [4] в единичном круге.

Теорема 1. Если $0 < \alpha < s < 2$ и $s < p$, то для любого $\lambda > (p - s)/\alpha$

$$(3) \quad \int_{\mathbb{D}^n} |f(z)|^{p-s} |\mathcal{D}^1 f(z)|^s (1 - |z|)^{s-1} dm_{2n}(z) \lesssim \|f\|_{H^\lambda}^{p-s} \|\mathcal{D}^{\alpha/s} f\|_{H^s}^s.$$

Замечание 1. Взяв $p = 2$ в (3), и формально перейдя к пределу при $s \rightarrow 2-$ и $\alpha \rightarrow +0$, получим классическое неравенство Литтлвуда-Пэли (1) в поликруге для $p = 2$.

Не ограничивая общности, для упрощения записи в доказательствах можно считать, что $n = 2$.

Доказательство теоремы 1: Начнем с дополнительных обозначений и утверждений. Для фиксированного $\delta > 1$ пусть

$$\Gamma_\delta(\xi) = \{z \in \mathbb{D} : |1 - \bar{\xi}z| \leq \delta(1 - |z|)\}$$

– допустимая область с вершиной $\xi \in \mathbb{T}$. Для любой дуги $I \subset \mathbb{T}$ длины $|I|$ определим квадрат Карлесона $\square I = \{z \in \mathbb{D} : \frac{z}{|z|} \in I, 1 - |z| \leq \frac{1}{2\pi}|I|\}$ над I . Следуя [14], рассмотрим функции

$$(4) \quad \begin{aligned} A_p(f)(\xi) &= \left(\int_{\Gamma_\delta(\xi)} \frac{|f(z)|^p}{(1 - |z|)^2} dm_2(z) \right)^{1/p}, \quad p < \infty, \\ C_p(f)(\xi) &= \sup_{I \supset \xi} \left(\frac{1}{|I|} \int_{\square I} \frac{|f(z)|^p}{1 - |z|} dm_2(z) \right)^{1/p}, \quad p < \infty, \quad \xi \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Для любых измеримых в $\mathbb{D}$ функций $f(z)$ и $g(z)$ имеет место неравенство

$$(5) \quad \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z)||g(z)|}{1 - |z|} dm_2(z) \lesssim \int_{\mathbb{T}} A_p(f)(\xi) C_{p'}(g)(\xi) dm(\xi), \quad 1 < p < \infty,$$

где $dm(\xi) = dm_1(\xi)$ – мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$ (доказательство см. в [14], [7]). Для $0 < q < \infty$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и измеримой в $\mathbb{D}$ функции $f(z)$ имеет место соотношение

$$(6) \quad \left\| C_q(|f(z)|(1 - |z|)^\alpha) \right\|_{L^\infty}^q \asymp \sup_{w \in \mathbb{D}} (1 - |w|)^\beta \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z)|^q (1 - |z|)^{\alpha q - 1}}{|1 - \bar{w}z|^{\beta+1}} dm_2(z).$$

(доказательство см. в [7]) Определим вариант интеграла площадей Лузина:

$$S(f)(\xi) = \left(\int_{\Gamma_\delta(\xi)} |\mathcal{D}^1 f(z)|^2 dm_2(z) \right)^{1/2}, \quad \xi \in \mathbb{T}, \quad \delta > 1,$$

и вспомним известное неравенство Лузина (см., например, [1])

$$(7) \quad \|S(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} \asymp \|f\|_{H^p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Через L обозначим интеграл в левой части (3) и запишем

$$(8) \quad L = \int_{\mathbb{D}} (1 - |z_2|)^{s-1} \left[\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^{p-s} |\mathcal{D}^1 f(z)|^s (1 - |z_1|)^{s-1} dm_2(z_1) \right] dm_2(z_2).$$

Внутренний интеграл в (8) обозначим через J . Выбрав произвольное α , $0 < \alpha < s$, оценим J , используя (5):

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{\mathbb{D}} |\mathcal{D}^1 f(z)|^s (1 - |z_1|)^{s-\alpha} \cdot |f(z)|^{p-s} (1 - |z_1|)^\alpha \frac{dm_2(z_1)}{1 - |z_1|} \\
 &\lesssim \int_{\mathbb{T}} A_{2/s} \left(|\mathcal{D}^1 f(z)|^s (1 - |z_1|)^{s-\alpha} \right) (\xi_1) \\
 &\quad \times C_{(2/s)'} \left(|f(z)|^{p-s} (1 - |z_1|)^\alpha \right) (\xi_1) dm(\xi_1) \\
 &\leq \left\| C_{(2/s)'} \left(|f(z)|^{p-s} (1 - |z_1|)^\alpha \right) \right\|_{L^\infty} \\
 (9) \quad &\quad \times \int_{\mathbb{T}} A_{2/s} \left(|\mathcal{D}^1 f(z)|^s (1 - |z_1|)^{s-\alpha} \right) (\xi_1) dm(\xi_1).
 \end{aligned}$$

Отдельно оценим последний интеграл

$$J_1 = \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\Gamma_\delta(\xi_1)} |\mathcal{D}^1 f(z)|^2 (1 - |z_1|)^{-2\alpha/s} dm_2(z_1) \right]^{s/2} dm(\xi_1).$$

Согласно (7) и правилу дробного дифференцирования [6] (стр. 179 и 186) получим

$$(10) \quad J_1 \lesssim \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\Gamma_\delta(\xi_1)} |\mathcal{D}_{r_1}^{\alpha/s} \mathcal{D}^1 f(z)|^2 dm_2(z_1) \right]^{s/2} dm(\xi_1) \lesssim \|\mathcal{D}_{r_2}^1 \mathcal{D}_{r_1}^{\alpha/s} f\|_{H_{z_1}^s}^s,$$

где $H_{z_1}^s$ означает класс Харди по переменной z_1 . Совмещая неравенства (8) - (10) и применяя лемму Фату и (5), заключаем, что

$$\begin{aligned}
 L &\lesssim \liminf_{r_1 \rightarrow 1} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{D}} (1 - |z_2|)^{s-1} \left\| C_{(2/s)'} \left(|f(z)|^{p-s} (1 - |z_1|)^\alpha \right) \right\| \\
 &\quad \times |\mathcal{D}_{r_2}^1 \mathcal{D}_{r_1}^{\alpha/s} f|^s dm(\xi_1) dm_2(z_2) \\
 &\lesssim \left\| C_{(2/s)'} \left(\left\| C_{(2/s)'} \left(|f(z)|^{p-s} (1 - |z_1|)^\alpha \right) \right\|_{L^\infty} (1 - |z_2|)^\alpha \right) (\xi_2) \right\|_{L^\infty} \\
 &\quad \times \liminf_{r_1 \rightarrow 1} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} A_{2/s} \left(|\mathcal{D}_{r_2}^1 \mathcal{D}_{r_1}^{\alpha/s} f|^s (1 - |z_2|)^{s-\alpha} \right) (\xi_2) dm(\xi_2) dm(\xi_1) \equiv J_2 J_3.
 \end{aligned}$$

Оценим J_2 и J_3 по отдельности. Вновь применяя правило дробного дифференцирования, лемму Фату и (7), а также используя $\mathcal{D}_r^{\gamma_1} \mathcal{D}_r^{\gamma_2} = \mathcal{D}_r^{\gamma_2} \mathcal{D}_r^{\gamma_1}$, получаем

$$\begin{aligned}
 J_3 &= \liminf_{r_1 \rightarrow 1} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\Gamma_\delta(\xi_2)} |\mathcal{D}_{r_2}^1 \mathcal{D}_{r_1}^{\alpha/s} f|^2 (1 - |z_2|)^{-2\alpha/s} dm_2(z_2) \right]^{s/2} dm(\xi_2) dm(\xi_1) \\
 &\lesssim \liminf_{r_1 \rightarrow 1} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\Gamma_\delta(\xi_2)} |\mathcal{D}_{r_2}^{\alpha/s} \mathcal{D}_{r_2}^1 \mathcal{D}_{r_1}^{\alpha/s} f|^2 dm_2(z_2) \right]^{s/2} dm(\xi_2) dm(\xi_1) \\
 &\lesssim \liminf_{r_1 \rightarrow 1} \int_{\mathbb{T}} \|\mathcal{D}^{\alpha/s} f\|_{H_{z_2}^s}^s dm(\xi_1) = \|\mathcal{D}^{\alpha/s} f\|_{H^s}^s.
 \end{aligned}$$

Теперь оценим J_2 , выбирая $\beta > 0$ достаточно большим. Внутренняя норма в J_2 оценивается по (6):

$$\begin{aligned} & \left\| C_{2/(2-s)} \left(|f(z)|^{p-s} (1 - |z_1|)^\alpha \right) \right\|_{L^\infty}^{2/(2-s)} \lesssim \\ & \lesssim \sup_{w \in \mathbb{D}} (1 - |w|)^\beta \int_{\mathbb{D}} |f(z_1, z_2)|^{2(p-s)/(2-s)} \frac{(1 - |z_1|)^{2\alpha/(2-s)-1}}{|1 - \bar{w}z_1|^{\beta+1}} dm_2(z_1) \\ & \leq \|f\|_{H_{z_1}^\lambda}^{2(p-s)/(2-s)} \sup_{w \in \mathbb{D}} (1 - |w|)^\beta \\ & \quad \times \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z_1|)^{2\alpha/(2-s)-(2/\lambda)(p-s)/(2-s)-1}}{|1 - \bar{w}z_1|^{\beta+1}} dm_2(z_1) \lesssim \|f\|_{H_{z_1}^\lambda}^{2(p-s)/(2-s)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_2 & \lesssim \left\| C_{2/(2-s)} \left(\|f\|_{H_{z_1}^\lambda}^{p-s} (1 - |z_2|)^\alpha \right) (\xi_2) \right\|_{L^\infty} \\ & \lesssim \left[\sup_{w \in \mathbb{D}} (1 - |w|)^\beta \int_{\mathbb{D}} \|f(z_1, z_2)\|_{H_{z_1}^\lambda}^{2(p-s)/(2-s)} \right. \\ & \quad \left. \times \frac{(1 - |z_2|)^{2\alpha/(2-s)-1}}{|1 - \bar{w}z_2|^{\beta+1}} dm_2(z_2) \right]^{(2-s)/2} \\ & \lesssim \|f\|_{H^\lambda(\mathbb{D}^2)}^{p-s} \left[\sup_{w \in \mathbb{D}} (1 - |w|)^\beta \right. \\ & \quad \left. \times \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z_2|)^{2\alpha/(2-s)-(2/\lambda)(p-s)/(2-s)-1}}{|1 - \bar{w}z_2|^{\beta+1}} dm_2(z_2) \right]^{(2-s)/2} \lesssim \\ & \lesssim \|f\|_{H^\lambda}^{p-s}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\lambda > (p-s)/\alpha$ имеем $L \lesssim \|f\|_{H^\lambda}^{p-s} \|\mathcal{D}^{\alpha/s} f\|_{H^s}^s$, что завершает доказательство.

4. В следующей теореме мы устанавливаем весовые аналоги известного тождества Харди-Стейна (см., например, [15]) и сопутствующие неравенства типа Литтлвуда-Пэли.

Теорема 2. Пусть $f(z) \in H(\mathbb{D}^n)$, $0 < p < \infty$.

а) Если функции $\omega_j(r_j) \in C^1[0, 1)$, $j = 1, \dots, n$ таковы, что

$$(11) \quad \omega_j(r_j) \frac{\partial}{\partial r_j} M_p^p(f, r) = o(1) \quad \text{при} \quad r_j \rightarrow 1 -.$$

то имеет место тождество:

$$(12) \quad \int_{\mathbb{D}^n} \prod_{j=1}^n \omega_j(r_j) \cdot f^\#(z) dm_{2n}(z) = (-1)^n \int_{\mathbb{D}^n} \prod_{j=1}^n \omega'_j(r_j) \frac{\partial^n}{\partial r_1 \dots \partial r_n} |f(z)|^p dm_{2n}(z),$$

где $f^\#(z) = \Delta_{z_1} \Delta_{z_2} \dots \Delta_{z_n} |f(z)|^p$ и Δ_{z_j} — обычный лапласиан по переменной z_j . Для стандартных весовых функций $\omega_j(r_j) = (1 - r_j)^{\alpha_j}$ ($\alpha_j > 0$) предположение (11) можно опустить.

b) Для $n = 1$, получаем уточнение (12), т.е. имеет место тождество

$$(13) \quad \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|)^\alpha f^\#(z) dm_2(z) = \alpha \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial r} |f(z)|^p dm_2(z),$$

где $p > 0$, $\alpha > 0$, если существует один из интегралов в (13). Здесь

$$(14) \quad f^\#(z) = \Delta |f(z)|^p = p^2 |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2.$$

с) Интегралы

$$A(f; p, \alpha) = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2 (1 - |z|)^\alpha dm_2(z),$$

$$B(f; p, \alpha) = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^{p-1} |f'(z)| (1 - |z|)^{\alpha-1} dm_2(z)$$

эквивалентны в том смысле, что: если $p > 0$ и $\alpha > 0$, то

$$(15) \quad A(f; p, \alpha) \leq \frac{\alpha}{p} B(f; p, \alpha),$$

где постоянная α/p — наилучшая, и если $p > 0$ и $\alpha > 1$, то найдется постоянная $C_{\alpha,p} > 0$ такая, что

$$(16) \quad B(f; p, \alpha) \leq C_{\alpha,p} A(f; p, \alpha).$$

Замечание 2. Неравенства (15) и (16) для $p = 2$ доказаны в [10]. Их аналоги для целых p ($p \geq 2$) и единичного круга $\mathbb{D}$ и шара из $\mathbb{C}^n$ доказаны в [11], [12] другим способом.

Нам требуется обобщение известного тождества Харди-Стейна (см., например, [15]) на поликруг.

Лемма 1. Пусть $f(z) \in H(\mathbb{D}^n)$, $0 < p < \infty$, тогда для любого $r = (r_1, \dots, r_n) \in I^n$

$$(17) \quad \prod_{j=1}^n r_j \frac{\partial^n}{\partial r_1 \dots \partial r_n} M_p^p(f, r) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|z_1| < r_1} \dots \int_{|z_n| < r_n} f^\#(z) dm_{2n}(z).$$

Доказательство получаем повторным применением формулы Грина.

Замечание Ввиду (14) тождество (17) для $n = 1$ совпадает с известным тождеством Харди-Стейна [15].

Доказательство теоремы 2: Лемма 1 позволяет установить другое тождество

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & r_1 r_2 \int_{\mathbb{T}^2} \Delta_{z_1} \Delta_{z_2} |f(z_1, z_2)|^p dm(\xi_1) dm(\xi_2) = \\
 & = \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} \int_0^{r_1} \int_0^{r_2} \int_{\mathbb{T}^2} \Delta_{z_1} \Delta_{z_2} |f(z_1, z_2)|^p \rho_1 \rho_2 dm(\xi_1) dm(\xi_2) d\rho_1 d\rho_2 = \\
 & = (2\pi)^2 \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} \left[r_1 r_2 \frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2} M_p^p(f, r_1, r_2) \right].
 \end{aligned}$$

Вначале докажем тождество (13). Преобразуем левый интеграл в (13), интегрируя по частям и используя тождество (18):

$$\begin{aligned}
 (19) \quad & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|)^\alpha f^\#(z) dm_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1 - r)^\alpha \left[\int_{-\pi}^\pi \Delta |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right] r dr = \\
 & = \int_0^1 (1 - r)^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} M_p^p(f, r) \right) \right] dr = \\
 & = \lim_{r \rightarrow 1-} (1 - r)^\alpha r \frac{\partial}{\partial r} M_p^p(f, r) + \alpha \int_0^1 (1 - r)^{\alpha-1} r \frac{\partial}{\partial r} M_p^p(f, r) dr.
 \end{aligned}$$

Если правый интеграл в (13) или (19) существует, то предел (19) равен нулю. Действительно, в силу тождества Харди-Стейна функция $r \frac{\partial}{\partial r} M_p^p(f, r)$ возрастает по $r \in (0, 1)$. Поэтому для любого $\rho \in (0, 1)$

$$\int_\rho^{(1+\rho)/2} (1 - r)^{\alpha-1} r \frac{\partial}{\partial r} M_p^p(f, r) dr \geq C_\alpha \rho (1 - \rho)^\alpha \frac{\partial}{\partial \rho} M_p^p(f, \rho).$$

По критерию Коши $\lim_{\rho \rightarrow 1-} (1 - \rho)^\alpha \frac{\partial}{\partial \rho} M_p^p(f, \rho) = 0$. Из (19) вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|)^\alpha f^\#(z) dm_2(z) = \alpha \int_0^1 (1 - r)^{\alpha-1} r \frac{\partial}{\partial r} M_p^p(f, r) dr.$$

Часть b) доказана.

Переходя к доказательству неравенства (15), заметим, что пример $f(z) = z$ показывает точность постоянной α/p . Далее, тождество (13) можно переписать в виде

$$A(f; p, \alpha) = \frac{\alpha}{p} \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi |f(re^{i\theta})|^{p-1} \left(\frac{\partial}{\partial r} |f(re^{i\theta})| \right) (1 - r)^{\alpha-1} r dr d\theta,$$

Поскольку $||f(re^{i\theta})| - |f(\rho e^{i\theta})|| \leq |f(re^{i\theta}) - f(\rho e^{i\theta})|$, то $|\frac{\partial}{\partial r} |f(re^{i\theta})|| \leq |f'(re^{i\theta})|$.

Теперь перейдем к доказательству неравенства (16). По неравенству Коши-Шварца

$$B(f; p, \alpha) \leq \sqrt{A(f; p, \alpha)} \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|)^{\alpha-2} dm_2(z) \right)^{1/2}.$$

Поэтому нам остается только проверить неравенство

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|)^{\alpha-2} dm_2(z) \lesssim A(f; p, \alpha), \quad p > 0, \quad \alpha > 1.$$

С этой целью проинтегрируем по частям

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2\pi\alpha} A(f; p, \alpha) &= \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r \frac{\partial}{\partial r} M_p^p(f, r) dr \\ &= \lim_{r \rightarrow 1-} (1-r)^{\alpha-1} r M_p^p(f, r) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p (1-r)^{\alpha-2} (\alpha r - 1) dr d\theta. \end{aligned}$$

Это неравенство показывает, что если $A(f; p, \alpha)$ существует, то $f(z) \in A_{\alpha-2}^p(\mathbb{D})$. Следовательно, $\lim_{r \rightarrow 1-} (1-r)^{\alpha-1} M_p^p(f, r) = 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} A(f; p, \alpha) &= \frac{\alpha}{p^2} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p (1-r)^{\alpha-2} (\alpha r - 1) dr d\theta \geq \\ &\geq \frac{\alpha(\alpha-1)}{2p^2} \int_{(\alpha+1)/(2\alpha)}^1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p (1-r)^{\alpha-2} dr d\theta \geq \\ &\geq C(\alpha, p) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1-|z|)^{\alpha-2} dm_2(z), \end{aligned}$$

что приводит к требуемому результату. Часть с) доказана. Часть а) доказывается аналогичным образом, используя (18).

5. В последней теореме дается характеристика весовых пространств A_{ω}^p с общими весами в бикруге и представление (квази-)норм в A_{ω}^p через интегралы типа Люкинга (2).

Теорема 3. Пусть $0 < p < \infty$, $f(z) \in H(\mathbb{D}^2)$, $\omega_j(r_j) \in L^1(0, 1)$, $\omega_j(r_j) > 0$, $j = 1, 2$. Тогда имеют место следующие представления:

$$\begin{aligned} \|f\|_{A_{\omega}^p(\mathbb{D}^2)}^p &\asymp |f(0, 0)|^p + \int_{\mathbb{D}^2} \left(\Delta_{z_1} \Delta_{z_2} |f(z_1, z_2)|^p + \Delta_{z_1} |f(z_1, 0)|^p + \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{z_2} |f(0, z_2)|^p \right) \prod_{j=1}^2 h_{\omega_j}(|z_j|) dm_4(z), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{A_{\omega}^p(\mathbb{D}^2)}^p + |f(0, 0)|^p &= \|f(\cdot, 0)\|_{A_{\omega_1}^p}^p + \|f(0, \cdot)\|_{A_{\omega_2}^p}^p + \\ &\quad + C_{\omega} \int_{\mathbb{D}^2} f^{\#}(z_1, z_2) \prod_{j=1}^2 h_{\omega_j}(|z_j|) dm_4(z), \end{aligned} \quad (21)$$

где $A_{\omega_j}^p$ – одномерные пространства по переменным z_j и h_{ω_j} – весовые функции

$$h_{\omega_j}(|z_j|) = \int_{|z_j|}^1 \left(\int_{\rho_j}^1 \omega_j(x) x dx \right) \frac{d\rho_j}{\rho_j}.$$

В частности, $f \in A_{\alpha}^p(\mathbb{D}^2)$ тогда и только тогда, когда $f^{\#} \in L_{\alpha+2}^1(\mathbb{D}^2)$ ($\alpha_j > -1$).

Замечание При $n = 1$ и $\omega(r) = (1-r)^{\alpha}$ ($\alpha > -1$) ввиду (14) соотношение (20) в предельном случае при $\alpha \rightarrow -1$ совпадает с характеристикой Ямашиты [2] классов Харди $H^p(\mathbb{D})$. Аналоги (20) и (21) для шара из $\mathbb{C}^n$ можно найти в [3], [5] и [8].

Доказательство теоремы 3: Проинтегрированное тождество Харди-Стейна (см. лемму 1)

$$M_p^p(f, r_1, r_2) + |f(0, 0)|^p = M_p^p(f, 0, r_2) + M_p^p(f, r_1, 0) + \\ + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{r_1} \int_0^{r_2} \left(\int_{|z_1| < \rho_1} \int_{|z_2| < \rho_2} f^\#(z_1, z_2) dm_4(z) \right) \frac{d\rho_1 d\rho_2}{\rho_1 \rho_2}$$

можно вновь проинтегрировать по мере $(2\pi)^2 C_{\omega_1} C_{\omega_2} \omega_1(r_1) \omega_2(r_2) r_1 r_2 dr_1 dr_2$. Таким образом,

$$\|f\|_{A_\omega^p}^p + |f(0, 0)|^p \equiv J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$J_1 = \|f(z_1, 0)\|_{A_{\omega_1}^p(\mathbb{D})}^p \\ = |f(0, 0)|^p + 2\pi C_{\omega_1} \int_0^1 M_1 \left(\Delta_{z_1} |f(z_1, 0)|^p, r_1 \right) h_{\omega_1}(r_1) r_1 dr_1, \\ J_2 = \|f(0, z_2)\|_{A_{\omega_2}^p(\mathbb{D})}^p \\ = |f(0, 0)|^p + 2\pi C_{\omega_2} \int_0^1 M_1 \left(\Delta_{z_2} |f(0, z_2)|^p, r_2 \right) h_{\omega_2}(r_2) r_2 dr_2, \\ J_3 = C_{\omega_1} C_{\omega_2} \int_{I^2} \left[\int_0^{r_1} \int_0^{r_2} \left(\int_{|z_1| < \rho_1} \int_{|z_2| < \rho_2} f^\#(z_1, z_2) dm_4(z) \right) \frac{d\rho_1 d\rho_2}{\rho_1 \rho_2} \right] \\ \times \omega(r) r dr \\ = (2\pi)^2 C_{\omega_1} C_{\omega_2} \int_0^1 \int_0^1 M_1(f^\#(z_1, z_2), r_1, r_2) h_{\omega_1}(r_1) h_{\omega_2}(r_2) r_1 r_2 dr_1 dr_2.$$

Это завершает доказательство теоремы.

Abstract. The paper generalizes the well-known Littlewood-Paley inequality and Hardy-Stein identity. As an application, some area inequalities and quasinorm representations in the space A_ω^p over the polydisc are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды* (Мир, Москва, 1965).
- [2] Sh. Yamashita, "Criteria for Functions to be of Hardy Class H^p ", Proc. Amer. Math. Soc. **75**, 69-72 (1979).
- [3] F. Beatrous, J. Burbea, "Characterizations of Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball", Kodai Math. J. **8**, 36-51 (1985).
- [4] D. H. Luecking, "A New Proof of an Inequality of Littlewood and Paley", Proc. Amer. Math. Soc. **103**, 887-893 (1988).
- [5] M. Stoll, "A Characterization of Hardy Spaces on the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$ ", J. London Math. Soc. (2) **48**, 126-136 (1993).
- [6] J. M. Ortega, J. Fàbrega, "Holomorphic Triebel-Lizorkin Spaces", J. Funct. Anal. **151**, 177-212 (1997).
- [7] J. M. Ortega, J. Fàbrega, "Hardy's Inequality and Embeddings in Holomorphic Triebel-Lizorkin Spaces", Illinois J. Math. **43**, 733-751 (1999).
- [8] M. Nowak, "Bloch Space on the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$ ", Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **23**, 461-473 (1998).

- [9] M. Pavlović, "A Littlewood-Paley Theorem for Subharmonic Functions", Publ. Inst. Math. (Belgrade) **68** (82), 77-82 (2000).
- [10] K. J. Wirths, J. Xiao, "An Image-Area Inequality for Some Planar Holomorphic Maps", Result. Math. **38**, 172-179 (2000).
- [11] S. Stević, "On an Area Inequality and Weighted Integrals of Analytic Functions", Result. Math. **41**, 386-393 (2002).
- [12] S. Stević, "Weighted Integrals of Holomorphic Functions in $\mathbb{C}^n$ ", Complex Variables Theory Appl. **47**, 821-838 (2002).
- [13] К. Л. Аветисян, "Неравенства типа Литтлвуда-Пэли для n -гармонических функций в поликруге", Мат. заметки **75** (4), 483-492 (2004).
- [14] R. R. Coifman, Y. Meyer, E. M. Stein, "Some New Functional Spaces and Their Applications to Harmonic Analysis", J. Funct. Anal. **62**, 304-335 (1985).
- [15] У. Хейман, *Многолистные функции* (ИЛ, Москва, 1960).

Получено 14 ноября 2006