

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ НА ВСЕЙ ПРЯМОЙ

Х. А. ХАЧАТРЯН И Э. А. ХАЧАТРЯН

*Институт математики, Национальная Академия Наук Армении
Ереванский Государственный Университет
E-mail: Khach_82@rambler.ru, emilya@yandex.ru*

Аннотация. В статье изучается вопрос разрешимости следующего интегро-дифференциального уравнения

$$-\frac{d\varphi}{dx} + A\varphi(x) = g(x) + B \int_R k(x-t)\lambda(t)\varphi(t)dt, \quad x \in R,$$

где искомое решение $\varphi(x)$ принадлежит классу абсолютно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций медленного роста. Здесь A и B – неотрицательные параметры, $0 \leq g \in L_1(\mathbb{R})$, $0 \leq k \in L_1(\mathbb{R})$, причем $\int_{\mathbb{R}} k(x)dx = 1$, $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ – измеримая на $\mathbb{R}$ функция.

Рассматриваемое уравнение решается путем сочетания специальной факторизации соответствующего интегро-дифференциального оператора с методами теории функций и теории интегральных уравнений типа свертки (и их обобщений).

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается следующее интегро-дифференциальное уравнение типа свертки

$$(1) \quad -\frac{d\varphi}{dx} + A\varphi(x) = g(x) + B \int_R k(x-t)\lambda(t)\varphi(t)dt, \quad x \in R,$$

где $A, B \geq 0$ – параметры, $0 \leq g \in L_1(\mathbb{R})$, $0 \leq k \in L_1(\mathbb{R})$, причем

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}} k(x)dx = 1,$$

$0 \leq \lambda(x) \leq 1$ – измеримая на $\mathbb{R}$ функция. Задача (1)-(2), кроме самостоятельного математического интереса, представляет известный интерес в физической кинетике (см. [1]-[3]). В частности, она возникает в кинетической теории металлов при изучении задачи распределения электрического поля в полубесконечной плазме (см. [2]-[3]). Уравнение (1)-(2) выводится из нелинейного стационарного уравнения Больцмана, с учетом члена в интеграле столкновения, учитывающего энергетическое взаимодействие (см. [2]-[3]). Изучению и решению задачи (1)-(2), в том частном случае, когда $A = 0$ и $\lambda(x) \equiv 1$, $k(x) = \int_1^{+\infty} e^{-|x|s} s^{-2} ds$, посвящен

ряд интересных работ (см. [2]-[6]). Эти работы в основном носят прикладной характер. В последнем случае задачу (1)-(2) принято называть "классической задачей Ландау".

В настоящей работе мы будем заниматься изучением и решением уравнения (1)-(2) в классе абсолютно непрерывных функций медленного роста, т.е. в классе

$$\mathfrak{M} = \{f \in AC(\mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0, \quad e^{-\varepsilon x} f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty\},$$

где $AC(\mathbb{R})$ – пространство абсолютно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций.

Основным ключом исследования задачи (1)-(2) является трехфакторное разложение соответствующего интегро-дифференциального оператора $D - AI + BK\Lambda$ (D – оператор дифференцирования, I – единичный оператор, K – интегральный оператор типа свертки, а Λ – оператор умножения на функцию $\lambda(x)$), в виде произведения одного дифференциального, одного вольтеррового и одного сверточного операторов. Оказывается, что указанная факторизация позволяет свести решение уравнения (1)-(2) к решению следующего интегрального уравнения:

$$(3) \quad f(x) = g_0(x) + \int_{\mathbb{R}} w(x-t)\lambda(t)f(t)dt,$$

где $0 \leq g_0, w \in W_1^1(\mathbb{R})$.

В вышеуказанных приложениях часто возникают интегро-дифференциальные уравнения вида (1)-(2) со специальными ядрами, а именно, ядрами, представляющими из себя суперпозицию экспонент, т.е. ядро $k(x)$ допускает следующее представление

$$(4) \quad k(x) = \int_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s),$$

где $\sigma(s)$ – монотонная, неубывающая функция на $[a, b]$ ($0 < a < b \leq +\infty$), причем

$$(5) \quad 2 \int_a^b \frac{d\sigma(s)}{s} = 1.$$

Последнее условие означает, что ядро $k(x)$ удовлетворяет соотношению (2).

Вторая часть настоящей работы посвящена аналитическому решению уравнения (1), (4), (5). В отличие от общего случая, здесь предлагается более простой способ решения уравнения (1), (4), (5).

В последней, третьей части рассматривается однородное уравнение (1)-(2) (т.е. при $g = 0$) в случае $A = B$. Здесь, накладывая некоторые дополнительные условия на функции k и λ , доказывается существование нетривиального решения в классе $\mathfrak{M}$.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

2.1. Некоторые классы интегральных операторов. Обозначим через Ω – класс интегральных операторов типа свертки: $K \in \Omega$, если

$$(Kf)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-t)f(t)dt, \quad k \in L_1(\mathbb{R}).$$

Оператор $K \in \Omega$ действует в каждом из пространств $L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, причем $\|K\|_{L_p} \leq \int_{\mathbb{R}} |k(x)| dx$, $p \geq 1$ (см. [7]). Введем следующие подалгебры $\Omega^\pm \subset \Omega$ верхних и нижних вольтерровых операторов: $V^\pm \in \Omega^\pm$, если

$$(6) \quad \begin{aligned} (V^+ f)(x) &= \int_{-\infty}^x \nu_+(x-t) f(t) dt, \\ (V^- f)(x) &= \int_x^{+\infty} \nu_-(t-x) f(t) dt \end{aligned}$$

при $\nu_\pm \in L_1(0, +\infty)$. Нетрудно проверить, что

$$\Omega = \Omega^+ \oplus \Omega^-.$$

Операторы $V^\pm \in \Omega^\pm$ обладают следующими свойствами (см. [7]-[8]):

$$(7) \quad V^- K \in \Omega, \quad K V^+ \in \Omega.$$

Введем также класс Ω^* следующих интегральных операторов $K^* \in \Omega^*$, если

$$(K^* f)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-t) \lambda(t) f(t) dt,$$

где $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ – измеримая функция, а $k \in L_1(\mathbb{R})$.

Следующая лемма является одним простым обобщением формулы (7).

Лемма 1. *Если $K^* \in \Omega^*$, $V^\pm \in \Omega^\pm$, то справедливы следующие простые возможности:*

- i) $V^- K^* \in \Omega^*$,
- ii) $K^* V^+ \in \Omega^*$ тогда и только тогда, когда существует такая вещественная функция $r(t)$, определенная на $\mathbb{R}$, для которой $\lambda(x+t) = \lambda(x)r(t)$, где $r(t)\nu_+(t) \in L_1(0, +\infty)$.

Доказательство: Пусть $f \in L_p(\mathbb{R})$ – произвольная функция. Имеем

$$(8) \quad (V^- K^* f)(x) = \int_x^{+\infty} \nu_-(t-x) \int_{-\infty}^{+\infty} k(t-y) \lambda(y) f(y) dy dt.$$

Изменяя порядок интегрирования в (8), получим

$$\begin{aligned} (V^- K^* f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \lambda(y) \int_x^{+\infty} \nu_-(t-x) k(t-y) dt dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-y) \lambda(y) f(y) dy, \end{aligned}$$

где

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \nu_-(t) k(x+t) dt.$$

Теперь перейдем к доказательству пункта ii). Совершая аналогичные рассуждения, получим

$$\begin{aligned} (K^*V^+f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)\lambda(t) \int_{-\infty}^t \nu_+(t-\tau)f(\tau)d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \int_{\tau}^{+\infty} k(x-t)\lambda(t)\nu_+(t-\tau)dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \int_0^{+\infty} k(x-\tau-z)\lambda(\tau+z)\nu_+(z)dz d\tau. \end{aligned}$$

Обозначим через $q(x, \tau)$ следующую функцию:

$$q(x, \tau) := \int_0^{+\infty} k(x-\tau-z)\lambda(\tau+z)\nu_+(z)dz.$$

Если $\lambda(x+z) = \lambda(x)r(z)$, где $r\nu_+ \in L_1(0, +\infty)$, то из теоремы Фубини (см. [9]) следует, что

$$q(x, \tau) = \lambda(\tau) \int_0^{+\infty} k(x-\tau-z)r(z)\nu_+(z)dz,$$

причем

$$\int_0^{+\infty} k(x-z)r(z)\nu_+(z)dz \in L_1(\mathbb{R}).$$

Обратное утверждение следует из представления функции q . Лемма доказана

2.2. Об интегральных операторах типа свертки. Рассмотрим следующее однородное интегральное уравнение:

$$(9) \quad B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)\lambda(t)B(t)dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

относительно искомой функции $B \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. Здесь

$$(10) \quad \begin{aligned} 0 \leq k \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} k(x)dx &= 1, \\ 0 \leq g \in L_1(\mathbb{R}), \quad 0 \leq \lambda(x) \leq 1 &\text{ на } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

В дальнейшем изложении настоящей статьи мы будем использовать следующий результат из [10].

Теорема [10] Пусть в уравнении (9)

$$1) \quad 0 \leq k \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} k(x)dx = 1 \text{ и существует}$$

$$\nu = \nu(k) := \int_{-\infty}^{+\infty} xk(x)dx \neq 0,$$

$$2) \quad 0 \leq \lambda(x) \leq 1 \text{ на } \mathbb{R} \text{ и } 1 - \lambda(x) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Тогда уравнение (9) имеет неотрицательное, ограниченное, нетривиальное решение $B(x)$, $B(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, причем

$$(11) \quad \int_0^x B(t)dt = O(x) \quad \text{as } x \rightarrow -\infty.$$

3. ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ

3.1. Постановка задачи. Уравнение (1) запишем в операторной форме

$$(12) \quad (D - AI + BK^*)\varphi + g = 0,$$

где $(Df)(x) = \frac{df}{dx}$, I – единичный оператор и $K^* \in \Omega^*$. Рассмотрим следующие возможности

$$1) A = 0 \quad \text{и} \quad 2) A > 0.$$

Пусть $A = 0$. Рассмотрим следующую задачу факторизации: для операторов D и $K^* \in \Omega^*$ и для каждого $\alpha > 0$ найти такие интегральные операторы $U \in \Omega^-$ и $P^* \in \Omega^*$, чтобы имела место факторизация:

$$(13) \quad D + BK^* = (D - \alpha I)(I - BP^* - U).$$

Пусть $A > 0$. Найти такие интегральные операторы $V \in \Omega^-$ и $H^* \in \Omega^*$, чтобы имела место факторизация:

$$(14) \quad D - AI + BK^* = (D - \alpha I)(I - V)(I - BH^*).$$

Факторизации (13) и (14) мы будем понимать как равенство интегральных операторов, действующих в пространстве $W_1^1(\mathbb{R})$, где $W_p^n(\mathbb{R})$ – это пространство Соболева функций f таких, что $f^{(k)} \in L_p(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

3.2. Основные факторизационные леммы. В этом пункте мы будем заниматься изучением задач (13) и (14). Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Если $A > 0$, то оператор $D - AI + BK^*$ допускает факторизацию вида (14), где ядра операторов $V \in \Omega^-$ и $H^* \in \Omega^*$ задаются соответственно по формулам

$$(15) \quad \nu(x) = (\alpha - A)e^{-\alpha x}\theta(x), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

$$(16) \quad h^*(x, t) = \lambda(t)h_0(x - t),$$

$$h_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-At}k(x+t)dt = \int_x^{+\infty} e^{-A(t-x)}k(t)dt \in W_1^1(\mathbb{R}).$$

Имеют место также следующие оценки

$$(17) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(x, t)dx = \frac{1}{A} \sup_{t \in \mathbb{R}} \lambda(t) \leq \frac{1}{A},$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial h^*(x, t)}{\partial x} \right| dx \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} \lambda(t).$$

Доказательство: Обозначим через Γ_α обратный оператор дифференциального оператора $\alpha I - D$ в пространстве $W_1^1(\mathbb{R})$. Легко можно убедиться, $\Gamma_\alpha \in \Omega^-$ и имеет следующий вид

$$(18) \quad (\Gamma_\alpha f)(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)} f(t) dt, \quad \alpha > 0.$$

Обозначим через P произведение операторов Γ_α и K^* . Из леммы 1 следует, что $P^* \in \Omega^*$, ядро которого задается посредством следующей формулы

$$(19) \quad p^*(x, t) = \lambda(t) \int_x^{+\infty} e^{-\alpha(z-x)} k(z-t) dz = \lambda(t) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\tau} k(\tau + x - t) d\tau.$$

Покажем, что функция $p^*(x, t)$ удовлетворяет следующим двум оценкам:

$$(20) \quad \begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} p^*(x, t) dx &= \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} \lambda(t)}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}, \\ \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} \right| dx &\leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} \lambda(t). \end{aligned}$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p^*(x, t) dx = \lambda(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-\alpha(z-x)} k(z-t) dz dx.$$

Изменяя порядок интегрирования с использованием теоремы Фубини, с учетом (2), получим

$$(21) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p^*(x, t) dx &= \lambda(t) \int_{-\infty}^{+\infty} k(z-t) \int_{-\infty}^z e^{-\alpha(z-x)} dx dz \\ &= \frac{\lambda(t)}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} k(z-t) dz = \frac{\lambda(t)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} = -\lambda(t) k(x-t) + \alpha p^*(x, t),$$

то с учетом (2) и (21) будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial p^*(x, t)}{\partial x} \right| dx \leq \lambda(t) \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t) dx + \lambda(t) \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} \lambda(t),$$

откуда проходим к оценкам (20).

Оператор $D - AI + BK^*$, с учетом (18) и (19), можно представить в следующем виде

$$(22) \quad \begin{aligned} D - AI + BK^* &= D - \alpha I + BK^* + (\alpha - A)I \\ &= (D - \alpha I) (I - BP^* - (\alpha - A)\Gamma_\alpha). \end{aligned}$$

Пусть $I + \Phi$ – резольвента оператора $I - (\alpha - A)\Gamma_\alpha$ в $W_1^1(\mathbb{R})$. Тогда простые вычисления показывают, что $\Phi \in \Omega^-$ и

$$(23) \quad (\Phi f)(x) = (\alpha - A) \int_x^{+\infty} e^{-A(t-x)} f(t) dt.$$

Снова используя лемму 1, заключаем, что $\Phi P^* \in \Omega^*$. Следовательно,

$$(24) \quad H^* \equiv P^* + \Phi P^* \in \Omega^*,$$

ядро которого имеет вид (16). Таким образом, из (22) и (23), (24) получим

$$D - AI + BK^* = (D - \alpha I)(I - V)(I - BH^*),$$

где $V = (\alpha - A)\Gamma_\alpha$. Итак, мы получаем факторизацию (14). Из оценок (20) легко убедиться, что оператор H^* действует в пространстве $W_1^1(\mathbb{R})$. Лемма доказана.

Аналогичными рассуждениями можно доказать следующую лемму.

Лемма 3. Если $A = 0$, то оператор $D + BK^*$ допускает факторизацию вида (13), где ядра операторов $U \in \Omega^-$ and $P^* \in \Omega^*$ задаются соответственно по формулам

$$(25) \quad u(x) = \alpha e^{-\alpha x} \theta(x),$$

$$p^*(x, t) = \lambda(t)p(x - t),$$

$$(26) \quad p(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} k(x + t) dt = \int_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)} k(t) dt \in W_1^1(\mathbb{R}).$$

3.3. Связь между первыми моментами ядер k и h . Как уже отмечалось, для разрешимости интегральных уравнений типа (9), (10) нужно, чтобы существовал первый момент соответствующего ядра, причем этот момент должен быть неположительным. Поскольку в нашем подходе решение уравнения (1)-(2) сводится к решению интегральных уравнений вида (9), (10) то нам существенным образом понадобится связь между первыми моментами соответствующих ядер. Следующая лемма устанавливает связь между $\nu(k)$ и $\nu(h)$.

Лемма 4. Если $A > 0$ и существует $\nu(k)$, то существует и $\nu(h)$, причем имеет место формула

$$(27) \quad \nu(h) = \frac{\nu(k)}{A} - \frac{1}{A^2}.$$

Доказательство: В силу теоремы Фубини имеем

$$\begin{aligned} \nu(h) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_0^{+\infty} e^{-At} k(x+t) dt dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-At} \int_{-\infty}^{+\infty} xk(x+t) dx dt. \end{aligned}$$

Обозначая через $\tau = x + t$, получим

$$\begin{aligned} \nu(h) &= \int_0^{+\infty} e^{-At} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau - t)k(\tau) d\tau dt \\ &= \frac{\nu(k)}{A} - \int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} te^{-At} dt = \frac{\nu(k)}{A} - \frac{1}{A^2}. \end{aligned}$$

Следствие 1. Если $\nu(k) \leq \frac{1}{A}$, то $\nu(h) \leq 0$.

4. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ (1)-(2) В СЛУЧАЕ $A > 0$

4.1. Уравнение (1)-(2) в случае $A > B$. В настоящем и последующем разделах мы будем заниматься вопросами существования абсолютно непрерывного решения уравнения (1) с помощью факторизационных лемм 2 и 3.

В этом пункте рассмотрим случай, когда параметр A больше, чем B . Имеет место

Теорема 1. *Предположим, что $0 \leq g \in L_1(\mathbb{R})$, $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ – измеримая функция на $\mathbb{R}$. Тогда, если $A > B$, то задача (1)-(2) в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R})$ имеет неотрицательное решение.*

Доказательство: Используя факторизацию (14), уравнение (1) можно записать в следующей форме

$$(28) \quad (D - \alpha I)(I - V)(I - BH^*)\varphi + g = 0.$$

Решение этого уравнения сводится к последовательному решению следующих трех связанных уравнений:

$$(29) \quad (D - \alpha I)\rho = -g,$$

$$(30) \quad (I - V)\psi = \rho,$$

$$(31) \quad (I - BH^*)\varphi = \psi.$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (29) в пространстве $W_1^1(\mathbb{R})$ имеет единственное решение вида

$$(32) \quad \rho(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)} g(t) dt \in W_1^1(\mathbb{R})$$

Уравнение (30) можно переписать в раскрытой форме

$$(33) \quad \psi(x) = \rho(x) + (\alpha - A) \int_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)} \psi(t) dt,$$

легко убедиться, что

$$\psi(x) = \rho(x) + (\alpha - A) \int_x^{+\infty} e^{-A(t-x)} \rho(t) dt,$$

где с учетом (32) получим

$$(34) \quad 0 \leq \psi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-A(t-x)} g(t) dt \in W_1^1(\mathbb{R}).$$

Теперь перейдем к рассмотрению интегрального уравнения (31). Уравнение запишем в интегральном виде

$$(35) \quad \varphi(x) = \psi(x) + B \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\lambda(t)\varphi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

Рассмотрим следующие итерации: $\varphi^{(0)} = 0$ и

$$(36) \quad \varphi^{(n+1)}(x) = \psi(x) + B \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\lambda(t)\varphi^{(n)}(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

По индукции легко можно убедиться, что 1) $\psi(x) \leq \varphi^{(n)} \in W_1^1(\mathbb{R})$, 2) $\varphi^{(n)} \uparrow$ по n . Тогда из оценки (17) с учетом 1), 2) получим, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n+1)}(x) dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx + \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} \lambda(t)}{A} B \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n)}(x) dx \\ (37) \quad &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx + q \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n+1)}(x) dx, \end{aligned}$$

где

$$0 \leq q \equiv \frac{1}{A} \sup_{t \in \mathbb{R}} \lambda(t) B \leq \frac{B}{A} < 1,$$

поскольку $A > B$ и $0 \leq \lambda(t) \leq 1$. Следовательно, из (37), (34), с учетом теоремы Фубини будем иметь

$$(38) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n+1)}(x) dx \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt}{A(1-q)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Итак, мы получили монотонно возрастающую (по n) последовательность функций $\varphi^{(n)}$, для которых справедливо неравенство (38). Следовательно, по теореме Б. Леви (см. [9]) получим, что последовательность функций $\varphi^{(n)}(x)$ сходится почти всюду в $\mathbb{R}$ к суммируемой функции $\varphi(x)$. Нетрудно убедиться, что $\varphi(x)$ является решением уравнения (35). Действительно, из (36) имеем

$$(39) \quad \varphi^{(n+1)}(x) \leq \psi(x) + B \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t) \lambda(t) \varphi(t) dt \in L_1(\mathbb{R}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$, получим

$$(40) \quad \varphi(x) \leq \psi(x) + B \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t) \lambda(t) \varphi(t) dt.$$

С другой стороны,

$$\psi(x) + B \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t) \lambda(t) \varphi^{(n)}(t) dt \leq \varphi(x),$$

откуда в силу теоремы Лебега (см. [9]) будем иметь

$$(41) \quad \psi(x) + B \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t) \lambda(t) \varphi(t) dt \leq \varphi(x).$$

Таким образом, из неравенств (40) и (41) следует, что $\varphi(x)$ является решением уравнения (35). Из (35) и (17) следует, что $\varphi \in W_1^1(\mathbb{R})$.

4.2. Уравнение (1)-(2) в случае $A = B$. Рассмотрим теперь уравнение (1) в случае, когда $A = B$. Используя факторизацию (14), как и при доказательстве теоремы 1), и последовательно решая уравнения, (29) и (30), приходим к уравнению:

$$(42) \quad \varphi(x) = \psi(x) + B \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t) \lambda(t) \varphi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через

$$w(x) := Bh(x).$$

Поскольку $A = B > 0$, то $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)dx = 1$. Наряду с уравнением (42) рассмотрим следующие уравнения

$$(43) \quad F(x) = \psi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} w(x-t)F(t)dt,$$

$$(44) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x-t)f(t)dt.$$

В работе [10] доказано, что если $\nu(w) > 0$, $0 \leq \psi \in L_1(\mathbb{R})$ и $\gamma = 1$, то уравнение (43) имеет положительное решение $F(x) \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, причем $\int_0^x F(t)dt = o(x)$ при $x \rightarrow -\infty$. Рассмотрим следующие итерации: $\varphi^{(0)} = 0$ и

$$(45) \quad \varphi^{(n+1)}(x) = \psi(x) + B \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\lambda(t)\varphi^{(n)}(t)dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Поскольку $\psi \geq 0$, то нетрудно убедиться, что $\psi \leq \varphi^{(n)} \uparrow$ по n и $\varphi^{(n)} \leq F$ почти всюду в $\mathbb{R}$. Отсюда следует, что предел $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(x)$ существует почти всюду в $\mathbb{R}$, причем $0 \leq \psi(x) \leq \varphi(x) \leq F(x)$. Аналогично доказательству теоремы 1, здесь проверяется, что полученная функция $\varphi \in AC(\mathbb{R})$ удовлетворяет уравнению (1). Итак, используя лемму 4, приходим к следующему результату.

Теорема 2. Пусть $0 \leq g \in L_1(\mathbb{R})$, $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ – измеримая функция на $\mathbb{R}$ и $\exists \nu(k) > \frac{1}{A}$. Тогда, если $A = B > 0$, то задача (1)-(2) в классе $\mathfrak{M}$ имеет положительное решение с асимптотикой $\int_0^x \varphi(t)dt = o(x)$, $x \rightarrow -\infty$.

4.3. Уравнение (1)-(2) в случае $A < B$.

Теорема 3. Пусть $0 < A < B$ и выполнены следующие условия:

- 1) $0 \leq g \in L_1(\mathbb{R})$,
- 2) $0 < \lambda(x) \leq 1$, $\lambda \in W_{\infty}^1(\mathbb{R})$ и $\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t+\tau)w(\tau)d\tau < 1$.

Тогда задача (1)-(2) имеет положительное решение в пространстве Соболева $W_{1,\lambda}^1(\mathbb{R})$ с весом $\lambda(x)$.

Доказательство: Используя факторизацию (14) и последовательно решая уравнения (29) и (30), мы приходим к следующему интегральному уравнению

$$(46) \quad \varphi(x) = \psi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} w(x-t)\lambda(t)\varphi(t)dt,$$

где

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)dx = B \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = \frac{B}{A} > 1.$$

Умножая обе части уравнения (46) на функцию $\lambda(x)$ и обозначая через $\rho(x) := \lambda(x)\varphi(x)$ и $q(x) := \lambda(x)\psi(x)$, приходим к следующему уравнению

$$(47) \quad \rho(x) = q(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{+\infty} w(x-t)\rho(t)dt.$$

Рассмотрим следующие итерации: $\rho^{(0)} = 0$ и

$$(48) \quad \rho^{(n+1)}(x) = q(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{+\infty} w(x-t)\rho^{(n)}(t)dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Легко убедиться, что $q(x) \leq \rho^{(n)} \uparrow$ по n , $\rho^{(n)}(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Следовательно, с учетом последнего, из (48) получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^{(n+1)}(x)dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} q(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x) \int_{-\infty}^{+\infty} w(x-t)\rho^{(n)}(t)dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} q(x)dx + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^{(n+1)}(x)dx, \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon = \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t+\tau)w(\tau)d\tau < 1,$$

откуда, в свою очередь, следует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho^{(n+1)}(x)dx \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)dx}{1 - \varepsilon}.$$

Таким образом, из теоремы Леви следует, что последовательность $\{\rho^{(n)}(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ почти всюду в $\mathbb{R}$ сходится к суммируемой функции ρ . Нетрудно проверить, что ρ является решением уравнения (47). Поскольку $0 < \lambda(x) \leq 1$ и $\lambda \in W_{\infty}^1(\mathbb{R})$, то $\varphi \in W_{1,\lambda}^1(\mathbb{R})$.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1)-(2) В СЛУЧАЕ $\mathbf{A} = 0$

Рассмотрим следующее уравнение

$$(49) \quad -\frac{d\varphi}{dx} = B \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)\lambda(t)\varphi(t)dt + g(x)$$

относительно искомой функции φ . В следующей теореме мы сформулируем некоторые достаточные условия, при которых это уравнение будет иметь положительные решения в пространстве $W_{1,\lambda}^1(\mathbb{R})$. Имеет место

Теорема 4. *Предположим, что $0 \leq g \in L_1(\mathbb{R})$,*

$$0 < \lambda(x) \leq 1, \quad \lambda \in W_1^1(\mathbb{R}), \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x+t)G_0(t)dt < 1,$$

и

$$G_0(x) \equiv \int_x^{+\infty} k(t)dt \in M(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R}).$$

Тогда уравнение (49) имеет положительное решение в пространстве $W_{1,\lambda}^1(\mathbb{R})$.

Доказательство: Используя факторизацию (13), уравнение (49) можно переписать в следующем виде

$$(D - \alpha I)(I - BP^* - U)\varphi + g = 0,$$

решение которого сводится к последовательному решению следующих уравнений

$$(50) \quad (D - \alpha I)F = -g,$$

$$(51) \quad (I - BP^* - U)\varphi = F.$$

Как уже отмечалось, уравнение (50) в $W_1^1(\mathbb{R})$ имеет единственное решение вида (32). Перейдем к рассмотрению уравнения (51). Имеем $(I - U)^{-1} = I + \Phi$, где

$$(\Phi f)(x) = \alpha \int_x^{+\infty} f(t)dt.$$

Из представления оператора Φ видно, что он переводит пространство $L_1(\mathbb{R})$ в пространство $M(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$, где $M(\mathbb{R})$ – пространство ограниченных функций на $\mathbb{R}$, а $C_0(\mathbb{R})$ – пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}$, стремящихся к нулю на $+\infty$. Оператор $I - BP^* - U$ представим в следующем виде

$$(52) \quad I - BP^* - U = (I - U)(I - G),$$

где $G = BP^* + B\Phi P^*$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$(Gf)(x) = B \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x - t)\lambda(t)dt,$$

где

$$G_0(x) = \int_x^{+\infty} k(t)dt \in M(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R}).$$

Используя факторизацию (52), решение уравнения сводится к решению следующих уравнений:

$$(53) \quad (I - U)\xi = F,$$

$$(54) \quad (I - G)\varphi = \xi.$$

Очевидно, что уравнение (53) имеет решение следующего вида

$$(55) \quad \xi(x) = F(x) + \alpha \int_x^{+\infty} F(t)dt,$$

где с учетом (32) получим

$$\xi(x) = \int_x^{+\infty} g(t)dt \in M(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R}).$$

Теперь перейдем к рассмотрению уравнения (54)

$$\varphi(x) = \xi(x) + B \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x - t)\lambda(t)\varphi(t)dt,$$

применим к нему следующий итерационный процесс: $\varphi^{(0)} = 0$ и

$$(56) \quad \varphi^{(n+1)}(x) = \xi(x) + B \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x - t)\lambda(t)\varphi^{(n)}(t)dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Нетрудно проверить, что $\xi(x) \leq \varphi^{(n)} \uparrow$ по n , $\varphi^{(n)} \in L_{1,\lambda}(\mathbb{R})$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда умножая обе части (56) на $\lambda(x)$ будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x) \varphi^{(n+1)}(x) dx \\ & \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x) \lambda(x) dx + B \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x) \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-t) \lambda(t) \varphi^{(n+1)}(t) dt dx \\ & \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x) \lambda(x) dx + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) \varphi^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x) \varphi^{(n+1)}(x) dx \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x) \lambda(x) dx}{1 - \mu}.$$

Следовательно, с учетом теоремы Б. Леви, получим, что последовательность функций $\varphi^{(n)}(x) \in L_{1,\lambda}(\mathbb{R})$ почти всюду в $\mathbb{R}$ имеет предел $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(x)$, причем $\varphi(x) \in L_{1,\lambda}(\mathbb{R})$ и является решением уравнения (51). Но поскольку $\xi, G_0 \in W_{1,\lambda}^1(\mathbb{R})$, то стало быть и $\varphi \in W_{1,\lambda}^1(\mathbb{R})$.

6. ПОСТРОЕНИЕ НЕТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ (1)-(2) В СЛУЧАЕ $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение в случае $A = B$:

$$(57) \quad -\frac{d\varphi}{dx} + A\varphi(x) = A \int_{\mathbb{R}} k(x-t) \lambda(t) \varphi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Используя факторизацию (14), это уравнение можно переписать в виде

$$(58) \quad (D - \alpha I)(I - V)(I - AH^*)\varphi = 0,$$

Решение уравнения (58) сводится к последовательному решению следующих уравнений

$$(59) \quad (D - \alpha I)F = 0,$$

$$(60) \quad (I - V)\psi = F,$$

$$(61) \quad (I - AH^*)\varphi = \psi.$$

Заметим, что уравнения (59) и (60) в пространстве $W_1^1(\mathbb{R})$ имеют только тривиальные решения. Итак, в случае $A = B$ мы приходим к следующему однородному уравнению относительно функции φ

$$(62) \quad \varphi(x) = A \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t) \lambda(t) \varphi(t) dt,$$

где $A \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 1$. Следовательно, используя теорему из [10] и лемму 4, приходим к следующему результату.

Теорема 5. Пусть в уравнении (57)

$$1) \ 0 \leq k \in L_1(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) dx = 1 \text{ и } \exists \nu(k) \neq \frac{1}{A},$$

2) $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ на $\mathbb{R}$ и $1 - \lambda(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

Тогда это уравнение в классе $\mathcal{M}$ имеет неотрицательное ограниченное решение $\varphi(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, причем

$$\int_0^x \varphi(t) dt = O(x) \quad \text{as } x \rightarrow -\infty.$$

7. ДРУГОЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ (1)-(2) В СЛУЧАЕ ВПОЛНЕ МОНОТОННЫХ ЯДЕР

7.1. Постановка задачи. Пусть ядро k уравнения (1) задается посредством следующей формулы

$$(63) \quad k(x) = \int_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s),$$

где $\sigma(s)$ – монотонно неубывающая функция на $[a, b]$, $0 < a < b \leq +\infty$, причем

$$(64) \quad 2 \int_a^b d\sigma(s) = 1.$$

Нетрудно убедиться, что

$$(65) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) dx = 2 \int_a^b d\sigma(s) = 1.$$

Предположим, что искомое решение уравнения удовлетворяет следующему граничному условию

$$(66) \quad \varphi(+\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

В случае, когда $A = 0$, $a = 1$, $b = +\infty$, $\lambda(t) \equiv 1$, и $d\sigma(s) = 1/s^2$ уравнение (1)-(2) исследовалось в работах [2]-[5]. Здесь мы попробуем некоторые методы работы [3] провести в случае задачи (1), (2), (63).

7.2. Сведение задачи (1), (2), (63) к интегральному уравнению. Интегрируя обе части уравнения (1) по x от τ до $+\infty$, с учетом (66) будем иметь

$$(67) \quad \varphi(\tau) = B \int_{-\infty}^{+\infty} T_0(\tau - t) \lambda(t) \varphi(t) dt - A \int_{\tau}^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau + \int_{\tau}^{+\infty} g(\tau) d\tau,$$

где

$$(68) \quad T_0(x) = B \int_x^{+\infty} k(z) dz, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

Нетрудно заметить, что $T_0 \notin L_1(\mathbb{R})$. Рассмотрим следующую функцию $T_\eta(x) = e^{\eta x} T_0(x) > 0$. Из представления (68) с учетом (63), следует, что если $0 < \eta < a$, то

$$(69) \quad T_\eta(x) = \begin{cases} B \int_a^b e^{-(s-\eta)x} \frac{d\sigma(s)}{s}, & \text{если } x \geq 0 \\ B e^{\eta x} - B \int_a^b e^{(s+\eta)x} \frac{d\sigma(s)}{s}, & \text{если } x < 0 \end{cases} \in L_1(-\infty, +\infty).$$

Умножая обе части уравнения (67) на функцию $e^{\eta x}$, приходим к следующему уравнению

$$(70) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_{\eta}(x-t)\lambda(t)f(t)dt - A \int_x^{+\infty} e^{-\eta(t-x)}f(t)dt + e^{\eta x} \int_x^{+\infty} g(t)dt,$$

относительно функции $f(x) = e^{\eta x}\varphi(x)$. Нормируем функцию T_{η} : $\int_{-\infty}^{+\infty} T_{\eta}(x)dx = 1$. После простых выкладок из (69) получим следующее характеристическое уравнение относительно η :

$$(71) \quad \frac{2B}{\eta} \int_a^b \frac{s}{s^2 - \eta^2} d\sigma(s) = 1.$$

7.3. Характеристическое уравнение (71). Рассмотрим функцию

$$B = B(\eta) = \frac{\eta}{\int_a^b \frac{2s}{s^2 - \eta^2} d\sigma(s)}, \quad \eta \in (0, a).$$

Нетрудно убедиться, что она непрерывна на $(0, a)$, $0 < B(\eta)$, причем $B(+0) = 0$. Функция $B(\eta)$ строго возрастает на $(0, \eta_0]$ и строго убывает на $[\eta_0, p)$, где точка максимума η_0 определяется из следующего уравнения

$$(72) \quad \int_a^b \frac{s(s^2 - 3\eta^2)}{(s^2 - \eta^2)^2} d\sigma(s) = 0.$$

Тогда на $(0, \eta_0]$ и $[\eta_0, a)$ существуют обратные к $B(\eta)$ функции, которые обозначим через $\eta_1(B)$ и $\eta_2(B)$ соответственно.

Вычислим значение первого момента ядра T_{η} , получим

$$(73) \quad \nu = \nu(T_{\eta}) = \frac{\mu}{\eta^2} \int_a^b \frac{s(3\eta^2 - s^2)}{(s^2 - \eta^2)^2} d\sigma(s).$$

Используя (71) и (72), из (73) приходим к следующей лемме:

Лемма 5. Пусть выполнено условие (69). Тогда функция f удовлетворяет уравнению (70), где T_{η} удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{+\infty} T_{\eta}(x)dx = 1$, причем справедливы следующие утверждения:

- а) если $\nu(T_{\eta}) < 0$, то $\eta = \eta_1(B)$ $B < B(\eta_0)$,
- б) если $\nu(T_{\eta}) > 0$, то $\eta = \eta_2(B)$ $B < B(\eta_0)$,
- с) если $\nu(T_{\eta}) = 0$, то $\eta = \eta_0$ $B = B(\eta_0)$.

7.4. **Решение уравнения (70).** Уравнение (70) перепишем в операторной форме:

$$(74) \quad (I - T_\eta^* + L_\eta) f = g_\eta,$$

где

$$(75) \quad \begin{aligned} (T_\eta^* f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} T_\eta(x-t) \lambda(t) f(t) dt, \\ (L_\eta f)(x) &= A \int_x^{+\infty} e^{-\eta(t-x)} f(t) dt \end{aligned}$$

а

$$(76) \quad g_\eta(x) = e^{\eta x} \int_x^{+\infty} g(t) dt.$$

Рассмотрим следующую задачу факторизации: для операторов $T_\eta^* \in \Omega^*$ и $L_\eta \in \Omega^-$ найти такой оператор $Q_\eta^* \in \Omega^*$, чтобы имело место равенство

$$(77) \quad I - T_\eta^* + L_\eta = (I + L_\eta) (I - Q_\eta^*)$$

как равенство операторов, действующих в $W_1^1(\mathbb{R})$.

Используя лемму 1 и соотношения (69) и (75), легко можно доказать следующую лемму.

Лемма 6. *Имеет место факторизация (77) как равенство операторов, действующих в $W_1^1(\mathbb{R})$, где ядро оператора Q_η^* имеет вид*

$$(78) \quad q_\eta^*(x, t) = \lambda(t) \left(T_\eta(x) - A \int_0^{+\infty} e^{-(\eta+A)z} T_\eta(x+z) dz \right).$$

Теперь используя факторизацию (77) перейдем к решению уравнения (74). Используя (77), уравнение запишем в следующей форме $(I + L_\eta) (I - Q_\eta^*) f = g_\eta$, решение которого сводится к последовательному решению следующих уравнений:

$$(79) \quad (I + L_\eta) \zeta = g_\eta,$$

$$(80) \quad (I - Q_\eta^*) f = \zeta.$$

Предположим, что $g_\eta \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда решение уравнения

$$(81) \quad \zeta(x) = g_\eta(x) - A \int_x^{+\infty} e^{-(\eta+A)(t-x)} g_\eta(t) dt \in L_1(\mathbb{R}).$$

Перейдем к решению уравнения (80). Не вдаваясь в подробности, предполагая, что $q_\eta^* \geq 0$ и используя тот факт, что тогда

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} q_\eta^*(x, t) dx \leq 1 - \frac{A}{\eta + A},$$

можно получить аналогичные теоремам 1, 2, 3, 4, 5 результаты.

Авторы выражают благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за ценные замечания.

Abstract. The paper considers the solvability of the integro-differential equation

$$-\frac{d\varphi}{dx} + A\varphi(x) = g(x) + B \int_R k(x-t)\lambda(t)\varphi(t)dt, \quad x \in R,$$

where the desired solution $\varphi(x)$ is searched in the class of functions which are absolutely continuous and of slow growth on $\mathbb{R}$. It is assumed that A and B are some nonnegative parameters, $0 \leq g \in L_1(\mathbb{R})$, $0 \leq k \in L_1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} k(x)dx = 1$ and $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ is a measurable function in $\mathbb{R}$. The considered equation is solved by combination of a special factorization of the corresponding integro-differential operator with some methods of function theory and generalized methods of the theory of convolution type integral equations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. М. Лифшиц, Л. М. Питаевский, *Физическая кинетика* (Наука, Москва, 1979).
- [2] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, "Точное решение задачи о прохождении тока через границу раздела кристаллитов в металле", *ФТТ* **43** (10), 1744-1750 (2001).
- [3] Х. А. Хачатрян, "Интегро-дифференциальные уравнения физической кинетики", *Изв. НАН Армении, Математика* **39** (3), 72-80 (2004).
- [4] A. Kh. Khachatryan and Kh. A. Khachatryan, "On Solvability of Some Integral-Differential Equation with Sum-Difference Kernels", *Int. J. of Pure and Appl. Math. Sci. (India)* **2** (1), 1-13 (2005).
- [5] A. Kh. Khachatryan and Kh. A. Khachatryan, "On Structure of Solution of One Integral-Differential Equation with Completely Monotonic Kernel", in *International Conference "Harmonic Analysis and Approximations"* (2005).
- [6] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, "Электронная плазма в полубесконечном металле при наличии переменного электрического поля", *Журнал выч. и мат. физики* **41** (8), 1229-1241 (2001).
- [7] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", *Итоги науки и техники, Мат. анализ* **22** (1984).

- [8] Н. В. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки", Дифф. уравнения **26** (8), 1442-1452 (1990).
- [9] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, Москва, 1981).
- [10] Л. Г. Арабаджян, "Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде", Дифф. уравнения **23** (9), 1618-1622 (1987).

Поступила 18 ноября 2006