

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ОБЩИМ ТЕОРЕМАМ О КОММУТАТОРАХ

М. И. КАРАХАНИЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: karakhanyan@yahoo.com

Аннотация. В работе доказываются некоторые общие теоремы о коммутаторах. Они связаны с классической теоремой Фуглде-Путнама, которая имеет важное значение в спектральной теории несамосопряженных операторов.

Известная теорема Фуглде-Путнама устанавливает, что если пара нормальных операторов $N \in BL(\mathbb{H})$ и $M \in BL(\mathbb{K})$, действующих соответственно в комплексных гильбертовых пространствах $\mathbb{H}$ и $\mathbb{K}$ такова, что $MT = TN$ для некоторого $T \in BL(\mathbb{H}, \mathbb{K})$, то $M^*T = TN^*$. У этой теоремы, имеющей давнюю историю и восходящей к фон Нейману, имеются многочисленные обобщения (см. [1]-[8]).

В ином ключе эта теорема обобщалась в работах [9]-[15]. В работе [9] показано, что если a, b, x – элементы комплексной банаховой алгебры с единицей, причем $[a, b] = ab - ba = 0$, и $\|\exp(ita)\| = o(|t|^{\frac{1}{2}})$, $\|\exp(itb)\| = o(|t|^{\frac{1}{2}})$ для вещественных t при $|t| \rightarrow \infty$ и $[a + ib, x] = 0$, то $[a - ib, x] = 0$. В дальнейшем Е. А. Горин [12] показал, что в последней теореме нельзя заменить $o(|t|^{\frac{1}{2}})$ на $O(|t|^{\frac{1}{2}})$, однако центральное место в ней занимает ослабление условия $[a, b] = 0$.

В настоящей работе продолжается исследование именно в этом контексте, что позволяет с более общих позиций взглянуть на результаты работ (см. [16], [17]).

1. Пусть A – банахова алгебра с единицей $\mathbb{K}$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. (Предполагается, что $\|\mathbb{K}\| = 1$ и $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ для всех $x, y \in A$). $\mathbb{C}$ -линейный функционал $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ называется “состоянием”, если $\|\varphi\| = \varphi(\mathbb{K}) = 1$. Множество $St(A)$ всех состояний составляет $\sigma(A^*, A)$ – компактное, выпуклое подмножество сопряженного пространства A^* . В отличие от множества комплексных гомоморфизмов, которое в случае некоммутативной алгебры может оказаться пустым, множество состояний весьма обильно. Например, в алгебре $A = C(X)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на метрическом компакте X , комплексным гомоморфизмам $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$ отвечают точечные меры, а состояниям – произвольные вероятностные борелевские меры.

Напомним (см. [15]), что элемент $h \in A$ называется эрмитовым, если $\varphi(h) \in \mathbb{R}$ для всякого φ из $St(A)$. Множество всех эрмитовых элементов алгебры A обозначается через $H(A)$, что есть замкнутое $\mathbb{R}$ -линейное подпространство в алгебре A . Элемент $a \in A$ называется эрмитов разложимым, если он допускает представление $a = h + ik$, где $h, k \in H(A)$. Такое представление, если оно существует,

единственно. Совокупность всех эрмитов разложимых элементов алгебры A обозначается через $H_C(A)$, что есть замкнутое, $\mathbb{C}$ -линейное подпространство в A . Отметим, что $H_C(A)$ – банахова алгебра Ли относительно коммутатора.

Будем говорить, что элемент $a \in A$ принадлежит классу $Gr(A)$, если существует элемент $b \in A$ такой, что

$$\max \{ \|e^{-\lambda b} e^{\bar{\lambda} a}\|, \|e^{-\bar{\lambda} a} e^{\lambda b}\| \} = o(|\lambda|^{1/2}) \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Теорема 1. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и элемент $a \in Gr(A)$. Если элемент $x \in A$ такой, что $[a, x] = 0$, то $[b, x] = 0$.

Доказательство: Пусть $\varphi \in St(A)$, рассмотрим функцию

$$F_x(\lambda, \bar{\lambda}) = \varphi \left(e^{-\lambda b} e^{\bar{\lambda} a} x e^{-\bar{\lambda} a} e^{\lambda b} \right).$$

Так как

$$\frac{\partial F_x}{\partial \bar{\lambda}} = \varphi \left(e^{-\lambda b} e^{\bar{\lambda} a} [a, x] e^{-\bar{\lambda} a} e^{\lambda b} \right)$$

и $[a, x] = 0$, то $\partial F_x / \partial \bar{\lambda} = 0$, т.е. функция $F_x(\lambda, \bar{\lambda})$ не зависит от $\bar{\lambda}$ и, следовательно, есть A -значная, целая функция по λ . Этот факт можно увидеть также из того, что если $[a, x] = 0$, то $x = e^{\bar{\lambda} a} x e^{-\bar{\lambda} a}$ и поэтому

$$F_x(\lambda, \bar{\lambda}) = F_x(\lambda) = \varphi \left(e^{-\lambda b} x e^{\lambda b} \right).$$

Так как

$$|F_x(\lambda)| \leq \|x\| \left\| e^{-\lambda b} e^{\bar{\lambda} a} \right\| \left\| e^{-\bar{\lambda} a} e^{\lambda b} \right\| = o(|\lambda|) \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

то в силу теоремы Лиувилля $F_x(\lambda) \equiv F_x(0)$. Но тогда $\partial F_x / \partial \lambda = 0$, а так как $\partial F_x / \partial \lambda = -\varphi(e^{-\lambda b} [b, x] e^{\lambda b})$, то $\varphi([b, x]) = 0$, а значит $[b, x] = 0$.

Следствие 1. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и $a \in Gr(A) \cap H_C(A)$. Если $x \in A$ такой элемент, что $[a, x] = 0$, то $[a^+, x] = 0$.

Для доказательства применим вышеуказанные рассуждения при $b = a^+$.

Теорема 2. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и $a \in Gr(A)$. Если элемент $x \in A$ такой, что $ax = xb$, то $bx = xa$.

Доказательство: Пусть $\varphi \in St(A)$ и рассмотрим функцию

$$\Phi_x(\lambda, \bar{\lambda}) = \varphi \left(e^{-\lambda b} e^{\bar{\lambda} a} x e^{-\bar{\lambda} b} e^{\lambda a} \right).$$

Полагая $\mu = \bar{\lambda}$, имеем $e^{-\bar{\lambda} b} e^{\lambda a} = e^{-\mu b} e^{\bar{\mu} a}$ и

$$\left\| e^{-\bar{\lambda} b} e^{\lambda a} \right\| = \left\| e^{-\mu b} e^{\bar{\mu} a} \right\| = o(|\mu|^{1/2}) = o(|\lambda|^{1/2}) \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Так как $ax = xb$, то для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $e^{\bar{\lambda} a} x e^{-\bar{\lambda} b} = x$. Поэтому $\Phi_x(\lambda, \bar{\lambda}) = \varphi(e^{-\lambda b} x e^{\lambda a})$. Этот факт, как было указано выше, следует и из того, что

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial \bar{\lambda}} = \varphi \left(e^{-\lambda b} e^{\bar{\lambda} a} (ax - xb) e^{-\bar{\lambda} b} e^{\lambda a} \right),$$

и поэтому $\partial \Phi_x / \partial \bar{\lambda} = 0$. Таким образом, $\Phi_x(\lambda, \bar{\lambda})$ есть A -значная целая функция по λ , которую обозначим через $\Phi_x(\lambda)$. Так как $|\Phi_x(\lambda)| = o(|\lambda|)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$,

$\lambda \in \mathbb{C}$, то в силу теоремы Лиувилля $\Phi_x(\lambda) \equiv \Phi_x(0)$. Поэтому $0 = \partial\Phi_x/\partial\lambda = -\varphi(e^{-\lambda b}(bx - ax)e^{\lambda a})$, откуда следует, что $bx = xa$.

Следствие 2. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей и $a \in Gr(A) \cap H_{\mathbb{C}}(A)$. Если элемент $x \in A$ такой, что $ax = xa^+$, то $a^+x = xa$.

Теорема 3 есть усиление результатов из [17].

2. В данном пункте мы рассмотрим асимптотический вариант вышеуказанной теоремы Фугледе-Путнама для некоторых основных операторных топологий в случае, когда операторы действуют в разных комплексных банаховых пространствах.

Теорема 3. Пусть X и Y – комплексные банаховы пространства, $A, A^+ \in BL(X)$ и $B, B^+ \in BL(Y)$, причем $[A, A^+] = 0$, $[B, B^+] = 0$ и

$$(1) \quad \left\| e^{\bar{\lambda}A - \lambda A^+} \right\| = o(|\lambda|^{1/2}) \text{ и } \left\| e^{\bar{\lambda}B - \lambda B^+} \right\| = o(|\lambda|^{1/2})$$

при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда по $\varepsilon > 0$ и $R > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $T \in BL(X, Y)$, $\|T\| \leq R$ и $\|BT - TA\| < \delta$, то $\|B^+T - TA^+\| < \varepsilon$.

Доказательство: Не ограничивая общности, предположим, что $\|A\| \leq 1$, $\|A^+\| \leq 1$, $\|B\| \leq 1$, $\|B^+\| \leq 1$ и $R = 1$. Пусть $T \in BL(X, Y)$, $\|T\| \leq 1$ и $\|BT - TA\| = \eta$. Так как при каждом натуральном p и q операторы $B^p T A^q$ принадлежат $BL(X, Y)$, то по индукции получим, что $\|B^k T - T A^k\| \leq k\eta$ при каждом натуральном k . Следовательно,

$$\left\| e^{\bar{\lambda}B} T - T e^{\bar{\lambda}A} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{k!} \|B^k T - T A^k\| \leq k\eta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{k!} = \eta |\lambda| e^{|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим операторозначную целую функцию $F(\lambda) = e^{\lambda B^+} T e^{-\lambda A^+}$. Так как

$$\left\| e^{\lambda B^+} \left(e^{-\bar{\lambda}B} T - T e^{-\bar{\lambda}A} \right) e^{\bar{\lambda}A} e^{-\lambda A^+} \right\| \leq \eta |\lambda| e^{4|\lambda|}$$

и

$$F(\lambda) = e^{\lambda B^+ - \bar{\lambda}B} T e^{\bar{\lambda}A - \lambda A^+} - \left[e^{\lambda B^+} \left(e^{-\bar{\lambda}B} T - T e^{-\bar{\lambda}A} \right) e^{\bar{\lambda}A} e^{-\lambda A^+} \right],$$

то $\|F(\lambda)\| \leq o(|\lambda|) + \eta |\lambda| e^{4|\lambda|}$.

В силу интегральной формулы Коши

$$(2) \quad F'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda,$$

где Γ – замкнутая жорданова кривая, внутри которой находится начало координат. Выбирая вместо Γ окружность Γ_r радиуса r с центром в начале координат, получим $\|F'(0)\| \leq o(r)/r + \eta e^{4r}$. Таким образом, если по $\varepsilon > 0$ выбрать r таким, что $o(r)/r < \varepsilon/2$ и $\delta = e^{-4r}\varepsilon/2$, тогда при $\eta \leq \delta$ имеем, что $\|B^+T - TA^+\| < \varepsilon$.

Следствие 3. Пусть X и Y – комплексные банаховы пространства и $A, A^+ \in BL(X)$, $B, B^+ \in BL(Y)$, причем $[A, A^+] = 0$, $[B, B^+] = 0$ и имеет место (1). Тогда если $BT = TA$, то $B^+T = TA^+$.

В случае, когда $X = \mathbb{H}$ и $Y = \mathbb{K}$ – комплексные гильбертовы пространства, то следствие 6 приводит к вышеуказанной теореме Фугледе-Путнама.

Теорема 4. Пусть X и Y – комплексные банаховы пространства, $A, A^+ \in BL(X)$, $B, B^+ \in BL(Y)$, причем $[A, A^+] = 0$, $[B, B^+] = 0$ и справедливо (1).

Тогда для каждой окрестности нуля $U \subset BL(X, Y)$ в сильной (или слабой) операторной топологии существует такая окрестность нуля $V \subset BL(X, Y)$ в той же топологии, что из условия $\|T\| \leq 1$ и $BT - TA \in U$ следует, что $B^+T - TA^+ \in V$.

Доказательство: Доказательство проведем сначала для сильной операторной топологии. Как и выше, будем считать, что $\|A\| \leq 1$, $\|A^+\| \leq 1$ и $\|B\| \leq 1$, $\|B^+\| \leq 1$. Пусть

$$\omega_A(r) = \max_{|\lambda|=r} \|e^{\bar{\lambda}A - \lambda A^+}\| \quad \text{и} \quad \omega_B(r) = \max_{|\lambda|=r} \|e^{\bar{\lambda}B - \lambda B^+}\|.$$

Так как $\omega_A(r) = o(r^{1/2})$ и $\omega_B(r) = o(r^{1/2})$ при $r \rightarrow \infty$, то мы в дальнейшем опустим индексы A и B .

Рассмотрим окрестность нуля.

$$U = U(x; \varepsilon) = \{T \in BL(X, Y) : \|Tx\| < \varepsilon, \ x \in X, \|x\| = 1\}.$$

Пусть $h_{A^+}(\lambda) = e^{\lambda A^+}$ и $h_{B^+}(\lambda) = e^{\lambda B^+}$, тогда $h_{A^+}(\lambda)$ и $h_{B^+}(\lambda)$ – равномерно непрерывные функции от λ на $\Gamma_r = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r\}$ со значениями соответственно в алгебрах $BL(X)$ и $BL(Y)$. Поэтому существует такое конечное множество $\mathcal{F} \subset \Gamma_r$, что для каждого $\lambda \in \Gamma_r$ при подходящем $\gamma \in \mathcal{F}$ имеем

$$\|h_{B^+}(\lambda) - h_{B^+}(\gamma)\| + \|h_{-A^+}(\lambda) - h_{-A^+}(\gamma)\| < e^{-r}.$$

Отметим, что $\|h_{-A^+}(\lambda)\| \leq e^r$ и $\|h_{B^+}(\lambda)\| \leq e^r$. Пусть $\delta = (re^{2r})^{-1}$ и

$$V(\delta, \mathcal{F}) = \{L \in BL(X, Y) : \|LA^l y_\gamma\| < \delta,$$

$$y_\gamma = e^{\bar{\gamma}A - \gamma A^+} x, \quad x \in X, \quad \gamma \in \mathcal{F}, \quad l = 0, \dots, n\}.$$

Поятно, что $\|y_\gamma\| \leq \omega(r)$. Возьмем произвольный оператор $T \in BL(X, Y)$ такой, что $\|T\| \leq 1$ и рассмотрим векторнозначную целую функцию

$$f(\lambda) = h_{B^+}(\lambda)Th_{-A^+}(\lambda)x.$$

Так как

$$f(\lambda) - f(\gamma) = [h_{B^+}(\lambda) - h_{B^+}(\gamma)]Th_{-A^+}(\lambda)x + h_{B^+}(\gamma)T[h_{-A^+}(\lambda) - h_{-A^+}(\gamma)]x,$$

то $\|f(\lambda) - f(\gamma)\| \leq e^r \{\|h_{B^+}(\lambda) - h_{B^+}(\gamma)\| + \|h_{-A^+}(\lambda) - h_{-A^+}(\gamma)\|\} < 1$. Ввиду того, что

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= h_{B^+}(\gamma)Th_{-A^+}(\gamma)x \\ &= e^{\gamma B^+ - \bar{\gamma}B} T e^{\bar{\gamma}A - \gamma A^+} x - \left[e^{\gamma B^+} (e^{-\bar{\gamma}B} T - T e^{-\bar{\gamma}A}) e^{\bar{\gamma}A} e^{-\gamma A^+} x \right] \end{aligned}$$

то

$$\|f(\gamma)\| \leq \omega^2(r) + e^r \left\| (e^{-\bar{\gamma}B} T - T e^{-\bar{\gamma}A}) y_\gamma \right\|,$$

где $y_\gamma = e^{-\bar{\gamma}A - \gamma A^+} x$ и $\|y_\gamma\| \leq \omega(r)$. Так как

$$\left\| (e^{-\bar{\gamma}B} T - T e^{-\bar{\gamma}A}) y_\gamma \right\| \leq \sum_{k=0}^n \frac{r^k}{k!} \|(B^k T - T A^k) y_\gamma\| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{r^k}{k!} \|(B^k T - T A^k) y_\gamma\|,$$

$$B^k T - T A^k = \sum_{l=0}^{k-1} B^{k-1-l} (B T - T A) A^l,$$

а $B T - T A \in V$, то $\|(B^k T - T A^k)\| \leq k\delta$. Таким образом, мы имеем

$$\|(e^{-\gamma B} T - T e^{-\gamma A} y_\gamma)\| \leq e^{-r} \{1 + 2\omega(r)\}.$$

Обозначая через $k(r) = [\omega(r) + 1]^2 + 1$, окончательно получим $\|f\|_r \leq k(r)$.

В силу интегральной формулы Коши (2), $\|f'(0)\| \leq k(r)/r$. Если $r > k(r)/\varepsilon$, то $\|f'(0)\| < \varepsilon$. Но так как $f'(0) = (B^+ T - T A^+)x$, то получаем, что $B^+ T - T A^+ \in U$. Рассмотрим теперь случай слабой операторной топологии. Пусть

$$U = \{T \in BL(X, Y) : |\varphi(Tx)| < \varepsilon, \varphi \in Y^*, x \in X, \|x\| = 1, \|\varphi\| = 1\}.$$

Для целой функции $f(\lambda) = \varphi[e^{\lambda B^+} T e^{-\lambda A^+} x]$ положим $M_r(f) = \max\{|f(\lambda)| : |\lambda| = r\}$. Как и выше, для $\lambda, \gamma \in \Gamma_r$ ($\gamma \in \mathcal{F}$) имеем $M_r(f) \leq \max\{|f(\gamma)| : \gamma \in \mathcal{F}\} + 1$. При $\delta = (r e^{2r})^{-1}$ определим окрестность нуля

$$V = \{L \in BL(X, Y) : |\psi_\gamma(B^{k-1-l} L A^l y_\gamma)| < \delta, \\ l = 0, \dots, k-1, \quad k = 0, \dots, n, \quad \gamma \in \mathcal{F}\},$$

где функционал $\psi_\gamma \in Y^*$ определяется по формуле $\psi_\gamma(z) = \varphi(e^{\gamma B^+} z)$. Как и выше, $M_r(f) \leq k(r)$. Используя интегральную формулу Коши, получаем $|f'(0)| \leq k(r)/r$. Если $r > k(r)/\varepsilon$, то $|f'(0)| < \varepsilon$. Однако, так как $f'(0) = \varphi[(B^+ T - T A^+)x]$, то получаем, что $B^+ T - T A^+ \in U$.

Отметим, что вышеуказанные результаты можно доказать для широкого класса операторных топологий.

Abstract. The work proves some general theorems on commutators. These are connected with the Fuglede-Putnam classical theorem which is of great importance in the spectral theory of non-selfadjoint operators.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. фон Нейман, "Аппроксимативные свойства матриц высокого конечного порядка", *Избр. труды по функ. анал.* 1 (Наука, Москва, 1987).
- [2] B. Fuglede, "A Commutativity Theorem for Normal Operators", *Proc. Nat. Acad. Sci USA* **36**, 35-40 (1950).
- [3] C. R. Putnam, "On Normal Operators in Hilbert Space", *Amer. J. Math.* **73**, 357-362 (1951).
- [4] S. K. Berberyan, "Note on a Theorem Fuglede and Putnam", *Proc. Amer. Math. Soc.* **10**, 175-182 (1959).
- [5] R. Moore, "An Asymptotic Fuglede Theorem", *P.A.M.S.* **50**, 138-148 (1975).
- [6] D. D. Rogers, "On Fuglede's Theorem and Operator Topologies", *P.A.M.S.* **75**, 32-36 (1979).
- [7] T. Furuta, "Normality Can Be Relaxed in the Asymptotic Fuglede-Putnam Theorem", *P.A.M.S.* **79**, 593-596 (1980).
- [8] G. Weiss, "The Fuglede Commutativity Theorem Module Operator Ideals", *Amer. Math. Soc.* **8** (1), 186-189 (1981).
- [9] Е. А. Горин, М. И. Караханян, "Асимптотический вариант теоремы Фугледе-Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр", *Мат. зам.* **22** (2), 179-188 (1977).
- [10] М. И. Караханян, "Асимптотический вариант теоремы Фугледе-Путнама о коммутаторах линейных ограниченных операторов в сильной и слабой операторных топологиях" Доклады НАН Армении **23** (5), 265-268, (1981).

- [11] М. И. Караханян, “Асимптотические свойства коммутаторов” Изв. НАН Армении, Математика **29** (1), 50-58 (1994).
- [12] Е. А. Горин, “О теореме Фугледе”, Алгебра и анализ, АН РФ **5** (5), 83-97 (1993).
- [13] Е. А. Gorin, *Math Reviews* 98b. 46064, 46H05, 46L99, 47B47, February (1998).
- [14] М. И. Караханян, “Асимптотический вариант общих теорем о коммутаторах”, Функ. анализ и прилож. **39** (4), 80-83 (2005).
- [15] Е. А. Горин, “Оценки степеней разложимых элементов комплексной банаховой алгебры”, Функ. анализ и прилож. **39** (4), 14-31 (2005).
- [16] A. Uchiyama, K. Tanahashi, “Fuglede-Putnam’s Theorem for p -Hyponormal or log-Hyponormal Operator”, Glasgow Math. J. **44**, 397-410 (2002).
- [17] I. H. Jeon, K. Tanahashi and A. Uchiyama, “On Quasimilarity for log-Hyponormal Operators”, Glasgow Math. J. **46**, 169-176 (2004).

Поступила 15 октября 2006