

О ЧАСТНЫХ ИНДЕКСАХ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Г. КАМАЛЯН И А. В. САРГСЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: armen-kamalian@yahoo.com

Аннотация. Рассматривается класс матриц-функций второго порядка, заданных на единичной окружности. Левый нижний элемент этих матриц-функций записывается с помощью комбинаций остальных трех элементов матрицы-функции и двух мероморфных, соответственно внутри и вне единичного круга, функций.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ – единичная окружность комплексной плоскости $\mathbb{C}$, W – винеровская алгебра непрерывных функций, определенных на Γ и допускающих представление в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье. Через $W^{n \times m}$ обозначим множество матриц-функций (далее, м.-ф.) порядка $n \times m$, с компонентами из W . Для краткости, вместо $W^{n \times 1}$ и $W^{1 \times 1}$ будем пользоваться обозначением W^n и W . Определим действующие в $W^{n \times m}$ проекторы следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i^-(f)(t) &= \sum_{k=-\infty}^{i-1} \langle f \rangle_k t^k, \quad \mathcal{P}_i^+(f)(t) = \sum_{k=i}^{\infty} \langle f \rangle_k t^k, \\ \mathcal{P}_{ij}^0(f)(t) &= \sum_{k=i}^{j-1} \langle f \rangle_k t^k, \quad t \in \Gamma, \quad \langle f \rangle_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) z^{-k-1} dz, \end{aligned}$$

где $i < j$ и $i, j \in \mathbb{Z}$. Будем считать, что $\mathcal{P}_{ij}^0(f)(t) = 0$ при $i \geq j$. Пусть $W_+^{n \times m} = \mathcal{P}_0^+(W^{n \times m})$, $W_-^{n \times m} = \mathcal{P}_1^-(W^{n \times m})$ and $W_-^{n \times m} = \mathcal{P}_0^-(W^{n \times m})$.

Под факторизацией м.-ф. $G \in W^{2 \times 2}$ мы понимаем представление

$$G = G_- \wedge G_+,$$

где $G_-, G_-^{-1} \in W_-^{2 \times 2}$, $G_+, G_+^{-1} \in W_+^{2 \times 2}$, $\wedge(t) = \text{diag}[t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}]$, $t \in \Gamma$, $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{Z}$ и $\kappa_1 \leq \kappa_2$. Числа κ_1 and κ_2 называются частными индексами м.-ф. G . Если $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, то факторизация называется канонической.

Пусть $G_{11}, G_{12}, G_{22}, h_1, h_2 \in W$. Будем предполагать, что существуют неотрицательное целое число $\mathcal{N}$ и многочлены q_- и q_+ с нулями соответственно в $\Gamma_+ = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ и $\Gamma_- = \mathbb{C} \setminus \bar{\Gamma}_+$ такие, что $p_- = \frac{q_+ h_1}{\tau^{\mathcal{N}}} \in W_-$, $p_+ = q_- h_2 \in W_+$, где $\tau(t) = t$ ($t \in \Gamma$). Без потери общности, в дальнейшем будем считать,

что $\deg q_+ \leq \mathcal{N}$. Заметим, что в качестве h_1, h_2 , в частности, могут быть взяты произвольные рациональные функции с полюсами вне Γ .

В данной работе мы рассматриваем задачу нахождения частных индексов м.-ф. $G \in W^{2 \times 2}$ вида

$$(1) \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ h_1 G_{11} + h_2 G_{22} - h_1 h_2 G_{12} & G_{22} \end{pmatrix}.$$

Как известно, для факторизации в W м.-ф. G (см. гл. II в [1], гл. V в [2]) необходимо и достаточно, чтобы $\det G(t) \neq 0$ ($t \in \Gamma$). Последнее эквивалентно условиям $V_i(t) \neq 0$ ($t \in \Gamma, i = 1, 2$), где

$$V_1 = (q_- G_{11} - p_+ G_{12}) \frac{\tau^{\mathcal{N}}}{q_+ q_-} \quad \text{и} \quad V_2 = (\tau^{-\mathcal{N}} q_+ G_{22} - p_- G_{12}) \frac{\tau^{\mathcal{N}}}{q_+ q_-}.$$

Возможность эффективной факторизации м.-ф. вида (1) замечено еще в [3].

В работах [4], [5], [6] предложен алгоритм, названный авторами EF-алгоритмом, для факторизации м.-ф. вида (1) в случаях, когда $h_1 = 0$ либо $h_2 = 0$.

Если $a, b \in W$, а p, q, r, s – многочлены, удовлетворяющие условию $s^2 + pq = r^2$, то взяв в (1) $G_{11} = a - bs$, $G_{22} = a + bs$, $G_{12} = bp$, $h_+ = h_- = (r-s)/p$, получим представление $G = aI + bR$, где R – произвольная полиномиальная матрица, удовлетворяющая условию $trR = 0$ и определитель которой является квадратом от полинома. Класс м.-ф. G , допускающих представление $G = aI + bR$, где $trR = 0$ и R – полиномиальная матрица, известен в литературе как класс Даниэля-Храпкова. Проблема факторизации м.-ф. из класса Даниэля-Храпкова часто возникает в задачах механики (см., например, [7], [8]). Эффективные методы факторизации м.-ф. этого класса при различных дополнительных условиях предложены многими авторами (см., например, [4], [7]–[13] и цитированную там литературу).

В данной работе получены явные формулы для частных индексов м.-ф. вида (1). Эти формулы позволяют найти частные индексы м.-ф. G , с помощью рангов конечного числа блочных матриц, блочные элементы являются коэффициентами Фурье некоторых м.-ф. Указанные м.-ф. явно определяются с помощью м.-ф. G и факторов функций V_i ($i = 1, 2$).

2. ОДНО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ G

В дальнейшем мы предполагаем выполнение условий $V_i(t) \neq 0$ ($t \in \Gamma$) и

$$\chi_i = \operatorname{ind} V_i = \frac{1}{2\pi} \operatorname{var} \arg V_i(t) \Big|_{t \in \Gamma}, \quad i = 1, 2, \quad \chi_0 = \max\{\chi_1, \chi_2\}.$$

Рассмотрим треугольную м.-ф.

$$V = \begin{pmatrix} \tau^{-\chi_1} V_1 & \frac{\tau^{\mathcal{N}-\chi_1}}{q_+ q_-} G_{12} \\ 0 & \tau^{-\chi_2} V_2 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \Gamma.$$

Нетрудно убедиться, что V позволяет каноническую факторизацию $V = V_- V_+$, где факторы $V_{\pm} = \begin{pmatrix} V_1^{\pm} & V_{12}^{\pm} \\ 0 & V_2^{\pm} \end{pmatrix}$ могут быть восстановлены по формулам

$$V_i^{\pm} = \exp \mathcal{P}_0^{\pm} (\ln (\tau^{-\chi_i} V_i)) , \quad i = 1, 2,$$

$$V_{12}^+ = V_2^+ \mathcal{P}_0^+ \left(\frac{\tau^{\mathcal{N}-\chi_1} G_{12}}{V_1^- V_2^+ q_+ q_-} \right) , \quad V_{12}^- = V_1^- \mathcal{P}_0^- \left(\frac{\tau^{\mathcal{N}-\chi_1} G_{12}}{V_1^- V_2^+ q_- q_+} \right) .$$

М.-ф. G вида (1) допускает разложение $G = \tau^{\chi_0} G_0$, где $G_0 = AB$ и

$$A = \begin{pmatrix} \frac{q_+}{\tau^{\mathcal{N}}} & 0 \\ p_- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^{\chi_1-\chi_0} & 0 \\ 0 & \tau^{\chi_2-\chi_0} \end{pmatrix} V_- , \quad B = V_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_+ & q_- \end{pmatrix}$$

Обозначив $\nu_- = \mathcal{N} + |\chi_1 - \chi_2|$, $n_- = \deg q_+$, $\nu_+ = \deg q_-$ и учитывая, что $q_+ \tau^{-\nu_-} A^{-1} \in W_-^{2 \times 2}$ and $q_- B^{-1} \in W_+^{2 \times 2}$, получим

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{n_-} \langle A^{-1} \rangle_{m-k} \langle q_+ \rangle_k = 0, \quad m = \nu_- + 1, \nu_- + 2, \dots,$$

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{\nu_+} \langle B^{-1} \rangle_{m-k} \langle q_- \rangle_k = 0, \quad m = -1, -2, \dots$$

Определим м.-ф. U равенством

$$U = \tau^{-\nu_-} \mathcal{P}_{\nu_-}^- (B^{-1}) \mathcal{P}_{\nu_-}^+ (A^{-1}) .$$

Поскольку

$$q_- U = \left(q_- B^{-1} - q_- \mathcal{P}_{\nu_-}^+ (B^{-1}) \right) \tau^{-\nu_-} \mathcal{P}_{\nu_-}^+ (A^{-1}) ,$$

то $q_- U \in W_+^{2 \times 2}$, и, следовательно,

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{\nu_+} \langle U \rangle_{m-k} \langle q_- \rangle_k = 0, \quad m = -1, -2, \dots$$

3. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

Рассмотрим семейства генкелевых операторов

$$H_j^- : \overset{\circ}{W}_-^2 \longrightarrow W_+^2, \quad H_j^+ : W_+^2 \longrightarrow \overset{\circ}{W}_-^2 \quad (j \in \mathbb{Z})$$

и теплицевых операторов $T_j : W_+^2 \rightarrow W_+^2$ ($j \in \mathbb{Z}$), действующих по формуле:

$$H_j^- \varphi = \mathcal{P}_0^+ \left(\tau^{\hat{j}} (A^{-1} \varphi) \right), \quad H_j^+ \varphi = \mathcal{P}_0^- \left(\tau^{\check{j}} (B^{-1} \varphi) \right),$$

$$T_j \varphi = \mathcal{P}_0^+ \left(\tau^j (G_0 \varphi) \right),$$

где $\hat{j} = (j + |j|)/2$, $\check{j} = (j - |j|)/2$, $j \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathcal{L}_j$ в случае $j > 0$, $j \in \mathbb{Z}$ пространство векторных многочленов $\sum_{k=0}^{j-1} \varphi_k z^k$ ($\varphi_k \in \mathbb{C}^n$), а в случае

$j < 0$, $j \in \mathbb{Z}$ векторных многочленов от z^{-1} вида $\sum_{k=j}^{-1} \varphi_k z^k$. При $j = 0$ будем считать, что $\mathcal{L}_0 = \{0\}$. Определим семейство конечномерных операторов:

$$K_j = H_j^+ H_j^-|_{\mathcal{L}_{-(\nu_- + \hat{j})}}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 1. *Вектор-функция φ принадлежит $\text{Ker } T_j$ тогда и только тогда, когда существует $\psi \in \text{Ker } K_j$ такая, что $\varphi = \tau^{\hat{j}} B^{-1} H_j^-(\psi)$. Кроме того, имеют место равенства:*

$$(5) \quad \dim \text{Ker } T_j = \nu_- + 2\hat{j} - \dim \text{Im } K_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство: Как известно (см. [14])

$$(6) \quad \text{Im } H_j^- = \text{Im} \left(H_j^-|_{\mathcal{L}_{-(\nu_- + \hat{j})}} \right), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда следует равенство

$$(7) \quad H_j^-(\text{Ker } K_j) = \text{Ker} \left(H_j^+|_{\text{Im } H_j^-} \right).$$

Поэтому для доказательства первой части леммы достаточно убедиться, что $\varphi \in \text{Ker } T_j$ тогда и только тогда, когда вектор-функция

$$\varphi_0 = \tau^{-\hat{j}} B \varphi \in \text{Ker} \left(H_j^+|_{\text{Im } H_j^-} \right).$$

Пусть $\varphi \in \text{Ker } T_j$ ($j \in \mathbb{Z}$). Тогда $\varphi \in W_+^2$, $f = \tau^{-j} G \varphi \in \overset{\circ}{W}_-^2$ и $\tau^{\hat{j}} A^{-1} f = \tau^{-\hat{j}} B \varphi = \varphi_0 \in W_+^2$. Следовательно, $\varphi_0 = H_j^- f$ и $H_j^+ \varphi_0 = 0$, i.e. $\varphi_0 \in \text{Ker} \left(H_j^+|_{\text{Im } H_j^-} \right)$.

Пусть теперь $\varphi_0 \in \text{Ker} \left(H_j^+|_{\text{Im } H_j^-} \right)$. В силу (6) существует $f \in \mathcal{L}_{-(\nu_- + \hat{j})}$ такая, что $\varphi_0 = H_j^- f$. Поскольку $H_j^+ \varphi_0 = 0$ то $\varphi = \tau^{\hat{j}} B^{-1} \psi \in W_+^2$. Кроме того, из равенства $\varphi_0 = \tau^{\hat{j}} A^{-1} f - \mathcal{P}_0 \left(\tau^{\hat{j}} A^{-1} f \right)$ следует, что $\tau^{-j} A \psi = f - g$, где $g = \tau^{-j} A H_j^+ \in W_-^0$. Отсюда $T_j \varphi = \mathcal{P}_0^+ \left(\tau^{-j} A \psi \right) = \mathcal{P}_0^+ (f - g) = 0$, т.е. $\varphi \in \text{Ker } T_j$.

Докажем теперь равенство (5). Из утверждения первой части леммы и равенства (7)

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } T_j &= \dim \text{Ker} \left(H_j^+|_{\text{Im } H_j^-} \right) \\ &= \dim \text{Im } H_j^- - \dim \text{Im} \left(H_j^+|_{\text{Im } H_j^-} \right) \\ &= \dim \text{Im } H_j^- - \dim \text{Im } K_j. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что $\dim \text{Im } H_j^- = \nu_- + n\hat{j}$ (см. [14], предложение 5.2).

4. РАЗМЕРНОСТИ ЯДЕР ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Перейдем теперь к вычислению чисел $\dim \text{Ker } T_j$ ($j \in \mathbb{Z}$).

Предложение 1 Если $j \leq -\nu_-$, то $\dim \text{Ker } T_j = 0$.

Доказательство: Пусть $q \in \text{Ker } K_j$ и $\varphi \in H^-q$. Тогда в силу определения оператора K_j $\varphi \in \text{Ker } H_j^+$ и поэтому $\varphi \in W_+^2$ и $\psi = \tau^j B^- \varphi \in W_+^2$. Из равенства $\varphi = \tau^{-j} B \psi$ следует, что

$$\langle \varphi \rangle_0 = \langle \varphi \rangle_1 = s = \langle \varphi \rangle_{-j-1} = 0.$$

Поскольку $q \in \mathcal{L}_{-\nu_-}$, то $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=1}^{\nu_-} \langle A^{-1} \rangle_{m+k} \langle q \rangle_{-k}$, а так как $\nu_- - 1 \leq -j - 1$, то $\sum_{k=1}^{\nu_-} \langle A^{-1} \rangle_{m+k} \langle q \rangle_{-k} = 0$ ($m = 0, \dots, \nu_- - 1$). Отсюда, пользуясь (2) и заметив, что $\langle q_+ \rangle_0 \neq 0$ и $n_- \leq \nu_-$, получим

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle_{\nu_-} &= \sum_{k=1}^{\nu_-} \langle A^{-1} \rangle_{\nu_-+k} \langle q \rangle_{-k} \\ &= - \sum_{k=1}^{\nu_-} \sum_{i=1}^{n_-} \frac{\langle q_+ \rangle_i}{\langle q_+ \rangle_0} \langle A^{-1} \rangle_{\nu_-+k-i} \langle q \rangle_{-k} \\ &= - \sum_{i=1}^{n_-} \frac{\langle q_+ \rangle_i}{\langle q_+ \rangle_0} \sum_{k=1}^{\nu_-} \langle A^{-1} \rangle_{\nu_-+k-i} \langle q \rangle_{-k} = 0. \end{aligned}$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получим $\langle \varphi \rangle_{\nu_-+1} = \langle \varphi \rangle_{\nu_-+2} = s = 0$, т.е. $\varphi = 0$. Из леммы 1 следует, что $\text{Ker } T_j = \{0\}$.

Предложение 2 Если $j \geq \nu_+$, то

$$(8) \quad \dim \text{Ker } T_j = \nu_- + 2j - \nu_+.$$

Доказательство: Заметим, что если $j > 0$ и $q \in \mathcal{L}_j$, то $\varphi = \tau^{-j} A q \in \overset{\circ}{W}_-^2$ то $H_j^- \varphi = q$. Следовательно,

$$(9) \quad \mathcal{L}_j \subset \text{Im } H_j^-.$$

Вектор-функцию $y \in W_+^2$ представим в виде $y = q + q_- y_0$, где $y_0 \in W_+^2$, а q – векторный многочлен, степень которого не превышает $\nu_+ - 1$. Поскольку $q_- B^{-1} y_0 \in W_+^2$, то из равенства $B^{-1} y = B^{-1} q + q_- B^{-1} y_0$ следует, что $H_0^+ y = H_0^+ q$, т.е.

$$(10) \quad \text{Im } H_0^+ = \text{Im} \left(H_0^+ |_{\mathcal{L}_{\nu_+}} \right).$$

Оператор $T' : \overset{\circ}{W}_-^2 \rightarrow \overset{\circ}{W}_-^2$ определим по формуле $T' y = \mathcal{P}_0^-(By)$. Докажем, что $\text{Ker } T' = \text{Im } H_0^+$. Действительно, если $\varphi \in \text{Im } H_0^+$, а $y \in W_+^2$ такой, что $\varphi = H_0^+ y$, тогда $B\varphi = y - B\mathcal{P}_0^+(B^{-1}y) \in W_+^2$, т.е. $\varphi \in \text{Ker } T'$. Обратно, если $\varphi \in \text{Ker } T'$, то $\psi = B\varphi \in W_+^2$ и $\varphi = H_0^+ \psi$.

Так как $\det B(t) \neq 0$ ($t \in \Gamma$), то B допускает факторизацию в W . Как известно, $\dim \text{Ker } T'$ совпадает с суммой положительных частных индексов B . Поскольку B аналитична внутри окружности, то ее частные индексы неотрицательны (см., например, [14]). Поэтому $\dim \text{Ker } T'$ совпадает с суммарным индексом B . С другой стороны, суммарный индекс B равен количеству нулей внутри окружности

(с учетом их кратностей) функции $\det B$. Из определения м.ф. B следует, что это число равно ν_+ . Таким образом,

$$(11) \quad \dim \operatorname{Im} H_0^+ = \nu_+.$$

Пользуясь (6) и (9) для $j \geq 0$ получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} H_0^+ \supset \operatorname{Im} K_j &= \operatorname{Im} \left(H_0^+ |_{H_j^- (\mathcal{L}_{-(\nu_-+j)})} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(H_0^+ |_{\operatorname{Im} H_j^-} \right) \supset \operatorname{Im} \left(H_0^+ |_{\mathcal{L}_j} \right). \end{aligned}$$

Как только $j \geq \nu_+$, из (10) следует, что $\operatorname{Im} H_0^+ \supset \operatorname{Im} K_j \supset \operatorname{Im} H_0^+$. Следовательно, пользуясь (11), имеем $\dim \operatorname{Im} K_j = \dim \operatorname{Im} H_0^+ = \nu_+$, как только $j \geq \nu_+$. Отсюда и из (5) следует (8). Предложение доказано.

Пусть $\nu_- + \nu_+ \geq 2$. Для $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих условиям $-\nu_- + 1 \leq j \leq \nu_+ - 1$ и $\nu_- + \hat{j} > 1$, ведем матрицы $\mathcal{B}_j$ и $\mathcal{A}_j$ порядков $2(\nu_+ - \check{j}) \times 2(\hat{j} + \nu_- - 1)$ и $2(\nu_- + \hat{j} - 1) \times 2(\nu_- + \hat{j})$ соответственно:

$$\mathcal{B}_j = \begin{pmatrix} \langle B^{-1} \rangle_{-1-\check{j}} & \langle B^{-1} \rangle_{-2-\check{j}} & s & \langle B^{-1} \rangle_{-\nu_- - j + 1} \\ \langle B^{-1} \rangle_{-2-\check{j}} & \langle B^{-1} \rangle_{-3-\check{j}} & s & \langle B^{-1} \rangle_{-\nu_- - j} \\ s & s & s & s \\ \langle B^{-1} \rangle_{-\nu_+} & \langle B^{-1} \rangle_{-\nu_+ - 1} & s & \langle B^{-1} \rangle_{-(\nu_+ + \nu_-) + 2 - \hat{j}} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_- - 1} & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_- - 2} & s & \langle A^{-1} \rangle_{1 - \hat{j}} \\ 0 & 0 & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_- - 1} & s & \langle A^{-1} \rangle_{2 - \hat{j}} \\ 0 & 0 & 0 & s & s \\ 0 & 0 & 0 & s & \langle A^{-1} \rangle_{\nu_- - 1} \end{pmatrix}.$$

Для $j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих условиям $-\nu_- + 1 \leq j \leq \nu_+ - 1$, матрицы $\mathcal{U}_j$ and $\mathcal{K}_j$ порядка $2(\nu_+ - \check{j}) \times 2(\nu_- + \hat{j})$ определим по формулам

$$\mathcal{U}_j = \begin{pmatrix} \langle U \rangle_{-1-\check{j}} & \langle U \rangle_{-2-\check{j}} & s & \langle U \rangle_{-\nu_- - j} \\ \langle U \rangle_{-2-\check{j}} & \langle U \rangle_{-3-\check{j}} & s & \langle U \rangle_{-\nu_- - j - 1} \\ s & s & s & s \\ \langle U \rangle_{-\nu_+} & \langle U \rangle_{-\nu_+ - 1} & s & \langle U \rangle_{-(\nu_+ + \nu_-) + 1 - \hat{j}} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{K}_j = \mathcal{U}_j + \mathcal{B}_j \mathcal{A}_j$, если $\nu_- + \hat{j} > 1$ и $\mathcal{K}_j = \mathcal{U}_j$, если $\nu_- + \hat{j} = 1$.

Тогда верно следующее утверждение.

Предложение 3 Пусть $j \in \mathbb{Z}$, $\nu_- + \nu_+ \geq 2$ и $-\nu_- + 1 \leq j \leq \nu_+ - 1$, тогда

$$(12) \quad \dim \operatorname{Ker} T_j = \nu_- + 2\hat{j} - r_j,$$

где $r_j = \operatorname{rang} \mathcal{K}_j$.

Доказательство: Пусть $q \in \mathcal{L}_{-(\nu_- + \hat{j})}$. Пользуясь

$$\tau^{\hat{j}} \mathcal{P}_{-\hat{j}+1}^- (A^{-1}) q \in \overset{\circ}{W}_-^2, \quad \tau^{\hat{j}} \mathcal{P}_{\nu_-}^+ (A^{-1}) q \in W_+^2$$

и равенством $A^{-1} = \mathcal{P}_{-\hat{j}+1}^- (A^{-1}) + \mathcal{P}_{-\hat{j}+1, \nu_-}^0 (A^{-1}) + \mathcal{P}_{\nu_-}^+ (A^{-1})$, получим, что $H_j^- q = \tau^{\hat{j}} \mathcal{P}_{\nu_-}^+ (A^{-1}) q + g$, где

$$(13) \quad g(t) = \mathcal{P}_0^+ \left(\tau^{\hat{j}} \mathcal{P}_{-\hat{j}+1, \nu_-}^0 (A^{-1}) q \right) (t) = \sum_{k=0}^{\nu_- + \hat{j} - 2} \langle g \rangle_k t^k, \text{ а}$$

$$\langle g \rangle_k = \sum_{m=k-(\nu_- + \hat{j})+1}^{-1} \langle A^{-1} \rangle_{k-m-\hat{j}} \langle q \rangle_m.$$

Отсюда, учитывая $\tau^{\hat{j}} \mathcal{P}_{\nu_-}^+ (B^{-1}) \mathcal{P}_{\nu_-}^+ (A^{-1}) q \in W_+^2$, получим $K_j q = \mathcal{P}_0^- \left(\tau^{\hat{j}} U h \right) + H_j^+ g$, где $h = \tau^{\nu_- + \hat{j}} q$. Следовательно, условие $K_j q = 0$ эквивалентно следующей бесконечной системе равенств

$$\sum_{k=0}^{\nu_- + \hat{j} - 1} \langle U \rangle_{m-k-\hat{j}} \langle h \rangle_k + \sum_{k=0}^{\nu_- + \hat{j} - 2} \langle B^{-1} \rangle_{m-k-\hat{j}} \langle g \rangle_k = 0, \quad m = -1, -2, -3, \dots$$

Заметим, что в силу (3) и (4) эти равенства справедливы при $m = -1, -2, \dots$ тогда и только тогда, когда они справедливы при $m = -1, \dots, -(\nu_+ - \hat{j})$.

Рассмотрим векторы

$$\bar{h}_j = \left(\langle h \rangle_0^T, \dots, \langle h \rangle_{\nu_- + \hat{j} - 1}^T \right)^T, \quad \bar{g}_j = \left(\langle g \rangle_0^T, \dots, \langle g \rangle_{\nu_- + \hat{j} - 2}^T \right)^T,$$

$$\bar{q}_j = \left(\langle q \rangle_{-\nu_- - \hat{j}}^T, \dots, \langle q \rangle_{-1}^T \right)^T.$$

Пользуясь определением вектор-функции h и равенствами (13), получим, что $\bar{h}_j = \bar{q}_j$ и $\bar{g}_j = A_j \bar{q}_j$. Из сделанного замечания следует, что условие $q \in \text{Ker } K_j$ эквивалентно равенству $\mathcal{U}_j \bar{h}_j + \mathcal{B}_j \bar{g}_j = 0$. Записав последнее равенство в виде $\mathcal{K}_j \bar{q}_j = 0$, окончательно получим, что $K_j q = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}_j \bar{q}_j = 0$. Следовательно,

$$\dim \text{Ker } K_j = \dim \text{Ker } \mathcal{K}_j$$

. В силу (5) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } T_j &= \nu_- + 2\hat{j} - \dim \text{Im } K_j \\ &= \nu_- + 2\hat{j} - \left(2(\nu_- + \hat{j}) - \dim \text{Ker } \mathcal{K}_j \right) = \nu_- + 2\hat{j} - r_j. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ

Пусть $r_{-\nu_-} = \nu_-$, $r_{\nu_+} = \nu_+$, $\theta_j = 1$ при $j > 0$ и $\theta_j = 0$ при $j \leq 0$ ($j \in \mathbb{Z}$). Основным результатом этой работы является следующая

Теорема 1. Пусть $V_i(t) \neq 0$ ($i = 1, 2$, $t \in \Gamma$). Тогда м.ф. G , определенная равенством (1), факторизуема и для частных индексов справедливы равенства: $\kappa_1 = -\nu_- + \nu_0 + \chi_0$, $\kappa_2 = \nu_+ - \nu_0 + \chi_0$, где $\nu_0 = 0$, если $\nu_- + \nu_+ \leq 1$ и $\nu_0 = \text{card} \{j; r_j = 2\theta_j + r_{j-1}; j = -\nu_- + 1, \dots, \nu_+\}$, если $\nu_- + \nu_+ \geq 2$.

Доказательство: Как известно, $\dim \text{Ker } T_j$ равен сумме отрицательных частных индексов м.ф. $\tau^{-j} G_0$ с противоположным знаком. Так как частные индексы м.ф. $\tau^{-j} G_0$ равны $\kappa_1 - \chi_0 - j$ и $\kappa_2 - \chi_0 - j$, то как только $j \geq \kappa_1 - \chi_0$ имеем $\dim \text{Ker } T_j > 0$. Следовательно, согласно предложению $1 - \nu_- \leq \kappa_1 - \chi_0$. Заметим также, что

$$\begin{aligned} \kappa_1 + \kappa_2 - 2\chi_0 &= \text{ind det } G_0 = \text{ind det } A + \text{ind det } B \\ &= \text{ind } q_+ - \text{ind } \tau^N - |\chi_1 - \chi_2| + \text{ind } q_- = \nu_+ - \nu_-. \end{aligned}$$

Следовательно, $\kappa_2 - \chi_0 \leq \nu_+$. Таким образом, имеют место оценка

$$-\nu_- \leq \kappa_1 - \chi_0 \leq \kappa_2 - \chi_0 \leq \nu_+$$

и равенство

$$\kappa_1 + \kappa_2 - 2\chi_0 = \nu_+ - \nu_-.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы в случае $\nu_- + \nu_+ \leq 1$.

Аналогично предложению 2.1 из [14], нетрудно убедиться, что

$$(14) \quad \kappa_1 - \chi_0 = \eta_- + \text{card} \{j | \dim \text{Ker } T_j - \dim \text{Ker } T_{j-1} < 1; j = \eta_- + 1, \dots, \eta_+\},$$

где η_- and η_+ произвольные целые числа, удовлетворяющие условиям

$$\eta_- \leq \kappa_1 - \chi_0 \leq \kappa_2 - \chi_0 \leq \eta_+.$$

Из определения чисел r_j ($j = -\nu_-, \dots, \nu_+$) и предложений 1-3 имеем

$$\dim \text{Ker } T_j = \nu_- + 2\hat{j} - r_j \quad (j = -\nu_-, \dots, \nu_+).$$

Следовательно,

$$(15) \quad \dim \text{Ker } T_j - \dim \text{Ker } T_{j-1} = 2\theta_j + r_{j-1} - r_j.$$

Взяв $\eta_- = \nu_-$, $\eta_+ = \nu_+$, из (14) и (15), получим утверждение теоремы и в случае $\nu_- + \nu_+ \geq 2$. Теорема доказана.

Abstract. We consider a class of second order matrix-functions defined on the unit circle of the complex plane. The left below elements of these matrix-functions are assumed to be representable by combinations of the other three elements and two functions meromorphic in the interior and exterior of the circle. For such matrix-functions the Winer-Hopf factorization problem is studied. Some formulas for partial indices are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Clancey and I. Gohberg, "Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators", in *Operator Theory: Advances and Appl. 3* (Birkhäuser, Basel 1981).
- [2] G. S. Litvinchuk and I. M. Spitkovskii, *Factorization of Matrix-Functions* (Akademie-Verlag, Berlin 1987).
- [3] V. N. Gavdzinskii, I. M. Spitkovskii, "On a Way of Effective Construction of Factorization", *Ukr. Mat. J. [Ukrainian Mathematical Journal]* **34** (1), 15-19 (1982).
- [4] I. Feldman, I. Gohberg, N. Krupnik, "A Method of Explicit Factorization of Matrix Functions and Applications", *IEOT* **18**, 277-302 (1994).
- [5] I. Feldman, I. Gohberg, N. Krupnik, "On Explicit Factorization and Applications", *IEOT* **21**, 430-459 (1995).
- [6] I. Feldman, I. Gohberg, N. Krupnik, "An Explicit Factorization Algorithm", *IEOT*, **49**, 149-164 (2004).
- [7] A. A. Khrapkov, "Certain Cases of Elastic Equilibrium of an Infinite Wedge With a Non-Symmetric Notch at the Vertex, Subjected to the Concentrated Force", *Prikl. Mat. Mekh. [Applicable Mathematics and Mechanics]* **35**, 625-637 (1971).
- [8] V. T. Daniele, "On the Solution of Two Coupled Wiener-Hopf Equations", *SIAM J. Appl. Math.* **44** (4), 667-680, (1984).
- [9] E. Meister, F.-O. Speck, "Wiener-Hopf Factorization of Certain Non-Rational Matrix Functions in Mathematical Physics", in *The Gohberg Anniversary Collection 11* (Birkhäuser, Basel 1989).
- [10] S. Prösdorf, F. O. Speck, "A Factorization Procedure for Two by Two Matrix Functions on the Circle with Two Rationally Independent Entries", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **115A**, 119-138 (1990).
- [11] A. B. Lebre, "Factorization in the Wiener Algebra of a Class of 2×2 Matrix Functions", *Integral Equations and Operator Theory* **12**, 408-423 (1989).

- [12] А. Г. Камалян, В. А. Оганян, “О факторизации f -циркулянтных матриц-функций”, Изв. НАН Армении, Математика, **28** (5), 44-62 (1993).
- [13] А. Г. Камалян, В. А. Оганян, “Метод конструктивного построения факторизации для одного класса матриц-функций”, Изв. НАН Армении, Математика, **28** (3), 44-62 (1993).
- [14] А. Г. Камалян, “Явная обобщенная факторизация ограниченных голоморфных функций”, Изв. НАН Армении, Математика, **32** (2), 19-38 (1997).

Поступила 18 ноября 2006