

О ПОПЕРЕЧНИКАХ КОЛМОГОРОВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМ РОСТОМ

В. Х. Мусоян, С. В. Самарчян

Ереванский государственный университет
E-mail : approximation@gmail.com

Резюме. В пространстве $L^2(0, \infty)$ для целых функций экспоненциального типа установлена скорость убывания поперечников Колмогорова в терминах минимальных произведений Бляшке на множествах особенностей преобразований Бореля. Кроме того, в $C(K)$ подсчитана скорость убывания поперечников Колмогорова целых функций заданного конечного порядка.

Пусть Ω – выпуклая ограниченная область, замыкание которого $\overline{\Omega}$ содержится в открытой левой полуплоскости, а $H_{\overline{\Omega}}$ – класс целых функций экспоненциального типа, преобразования Бореля которых принадлежат единичному шару пространства Харди $H^\infty(\mathbf{C} \setminus \overline{\Omega})$. Далее обозначим

$$\gamma_n(\overline{\Omega}) = \inf_{\{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \overline{\Omega}} \sup_{\lambda \in \overline{\Omega}} \left| \prod_{i=1}^n \frac{\lambda - \lambda_i}{\lambda + \overline{\lambda}_i} \right|,$$

$$\delta_n(\overline{\Omega}) = \sup_{\{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \overline{\Omega}} \sqrt{\left[\frac{n(n-1)}{2} \right]} \left| \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \overline{\lambda}_j} \right|.$$

Тогда оба предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{[n]} \gamma_n(\overline{\Omega})$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(\overline{\Omega})$ существуют и равны. Обозначим общее значение этих пределов через $\gamma(\overline{\Omega})$ (см. [1]).

Теорема 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{[n]} d_n(H_{\overline{\Omega}}, L^2(0, \infty)) = \gamma(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Выберем область Ω_1 так, чтобы $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$. Тогда для некоторого набора $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n+1} \subset \overline{\Omega_1}$ имеем

$$\delta_{n+1}(\overline{\Omega_1}) = \sqrt{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]} \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \overline{\lambda_j}}.$$

Пусть далее S^n – единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ и

$$\Sigma_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} a_k e^{\lambda_k z} : (a_1, \dots, a_{n+1}) \in S^n \right\}.$$

Тогда (см. [2], стр. 419)

$$d_n(H_{\overline{\Omega}}, L^2(0, \infty)) \geq \frac{m}{n+1} d_n(\Sigma_n, L^2(0, \infty)) \geq \frac{m}{n+1} \inf_{y \in \Sigma_n} \|y\|_{L^2(0, \infty)} \quad (1)$$

для некоторой положительной константы $m > 0$, зависящей только от Ω_1 . С другой стороны имеем (см. [3]),

$$\inf_{y \in \Sigma_n} \|y\|_{L^2(0, \infty)} \geq \frac{1}{2\pi\sqrt{n+1}} \min_{1 \leq k \leq n+1} \frac{1}{\sqrt{2\operatorname{Re} \lambda_k}} \frac{\prod_{i=1, i \neq k}^{n+1} |\lambda_k - \lambda_i|}{\prod_{i=1, i \neq k}^{n+1} |\lambda_k + \overline{\lambda_i}|}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (1), получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt{[n]} d_n(H_{\overline{\Omega}}, L^2(0, \infty)) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt{[n]} \gamma_n(\overline{\Omega_1}) = \gamma(\overline{\Omega_1}).$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt{[n]} d_n(H_{\overline{\Omega}}, L^2(0, \infty)) \geq \gamma(\overline{\Omega})$$

(ввиду произвольности выбора $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$) и $d_n(H_{\overline{\Omega}}, L^2(0, \infty)) \leq M \gamma_n(\overline{\Omega})$ для некоторой константы M (см. [3]).

Подобные соотношения между поперечниками Колмогорова на компактных множествах и минимальными произведениями Бляшке изучены в ряде работ [4 – 7].

Перейдем теперь к изучению скорости убывания поперечников Колмогорова целых функций конечного порядка не больше $\rho \in (0, \infty)$ в пространстве $C(K)$, где $K \subset \mathbb{C}$ – компактное множество положительной логарифмической ёмкости. Пусть

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k, \quad \text{где} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{[k \ln k]} |g_k| = e^{-\frac{1}{\rho}}$$

и

$$H_g = \left\{ f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k : |f_k| \leq |g_k|, k = 0, 1, \dots \right\}.$$

Теорема 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{[n \ln n]} d_n(H_g, C(K)) = e^{-\frac{1}{\rho}}.$

Доказательство. Пусть $E_n(f, K)$ – наилучшее равномерное приближение целой функции f алгебраическими полиномами на компакте K . Несложно убедиться, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in H_g} \sqrt{[n \ln n]} E_n(f, K) \leq e^{-\frac{1}{\rho}}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{[n \ln n]} d_n(H_g, C(K)) \leq e^{-\frac{1}{\rho}},$$

и остаётся доказать, что

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{[n \ln n]} d_n(H_g, C(K)) \geq e^{-\frac{1}{\rho}}.$$

Обозначим $\Sigma_n = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k g_k x^k : (a_0, \dots, a_n) \in S^n \right\}$. Тогда (см. [2], стр. 419)

$$d_n(H_g, C(K)) \geq d_n(\Sigma_n, C(K)) \geq \inf_{y \in \Sigma_n} \|y\|_{C(K)}. \quad (2)$$

Кроме того, для произвольной точки $(a_0, \dots, a_n) \in S^n$ имеем (см. [8])

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k g_k x^k \right\|_{C(K)} \geq \frac{\max_{0 \leq k \leq n} |a_k g_k|}{M^n} c_n(K) \geq \frac{c_n(K)}{\sqrt{n+1} M^n} \min_{0 \leq k \leq n} |g_k|, \quad (3)$$

где $c_n(K) = \inf_{\{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset K} \sup_{\lambda \in K} \left| \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k) \right|$, а M – некоторая постоянная, зависящая только от компакта K . Таким образом, в силу (2), (3) и определения функции g получаем

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{[n \ln n]} d_n(H_g, C(K)) \geq e^{-\frac{1}{\rho}}.$$

Теорема доказана.

Abstract. The paper establishes the decrease rate of the Kolmogorov diameters of entire functions from the space $L^2(0, \infty)$ in terms of minimal Blaschke products on the singularity sets of Borel transforms. Besides, in $C(K)$ the decrease rate of the Kolmogorov diameters is calculated for entire functions with given finite order.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. D. Fisher and E. B. Saff, “The asymptotic distribution of zeros of minimal Blaschke products,” *Journal of Approximation Theory*, vol. 98, pp. 104–116, 1999.
2. George G. Lorentz, Manfred V. Golitschek, and Yuly Makovoz, *Constructive approximation : advanced problems*, Springer Verlag, Berlin, 1996.

3. В. Х. Мусоян, “О скорости приближения целых функций полной системой Дирихле”, Мат. заметки, том 36, № 6, стр. 857–863, 1984.
4. S. D. Fisher and C. A. Micchelli, “The n -width of sets of analytic functions,” Duke Math. J., vol. 47, pp. 789–801, 1980.
5. S. D. Fisher and M. I. Stessin, “The n -width of the unit ball of H^q ,” JAT, vol. 67, pp. 347–356, 1991.
6. S. D. Fisher and M. I. Stessin, “Corrigendum : the n -width of the unit ball of H^q ,” JAT, vol. 79, pp. 167–168, 1994.
7. L. Baratchart, V. A. Prokhorov and E. B. Saff, “On Blaschke products associated with n -widths,” JAT, vol. 126, pp. 40–51, 2004.
8. С. В. Самарчян, “Быстрое приближение в пространствах Харди и Лебега,” Изв. НАН Армении, серия Математика, том 39, № 6, стр. 69–81, 2004.

Поступила 15 октября 2006